ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

2 Σεπτεμβρρίου 2008

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 ισοδύναμα θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως.

ΘΕΜΑ Α Δύο σημειακά σωματίδια ίδιας μάζας m συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο ελαστικότητας k και φυσικού μήκους l_0 και μπορούν να κινούνται μόνο επί του άξονα x πάνω στον οποίο βρίσκεται και το ελατήριο.

1. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για τα δύο σωματίδια και αφαιρώντας τες γγράψτε την εξίσωση κίνησης που διέπει την απόσταση των δύο σωματιδίων $x \equiv x_1 - x_2$.

2. Αρχικά το ελατήριο δεν βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και οι μάζες είναι ακίνητες. Με τι συχνότητα ανοιγοκλείνει το ελατήριο ;

3. Υπάρχει περίπτωση η αρχική ταχύτητα των σωματιδίων να είναι τέτοια ώστε, αν αρχικά το ελατήριο δεν βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα και τα δύο σωματίδια να ηρεμούν ; (Οι τριβές θεωρούνται μηδενικές.) Επιχειρηματολογήστε σχετικά.

4. Καθώς τα δύο σωματίδια ταλαντώνονται συμμετρικά (χωρίς το κέντρο μάζας του συστήματος να κινείται), ανοιγοκλείνοντας το ελατήριο, και τη στιγμή ακριβώς που το ελατήριο έχει το μέγιστο μήκος του $1.01\, l_0$, τα ψεκάζουμε με φορτία $+q$ και $+q$, αντίστοιχα. Τα φορτία είναι τέτοια ώστε ώστε η ηλεκτροστατική άπωση των δύο φορτίων, όταν αυτά βρίσκονται σε απόσταση l_0
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l_0^2}$$
να είναι 100/49 φορές όσο η δύναμη που ασκεί το ελατήριο τη στιγμή εκείνη. Αναπτύξτε κατά Taylor την ηλεκτροστατική άπωση και κρατήστε μέχρι και τον γραμμικό όρο. Σε αυτή την περίπτωση δείξτε ότι και πάλι η απόσταση των δύο σωματιδίων διέπεται (προσεγγιστικά) από μια εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή.

5. Ποια η εξέλιξη της κίνησης των δύο μαζών αφότου εναποτεθούν τα φορτία ; Τώρα μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η προσέγγιση της δύναμης μέσω των δύο μόνο πρώτων όρων του αναπτύγματος Taylor ήταν αρκετή για την ανάλυση της κίνησης ;

ΘΕΜΑ Β Ένα άστρο με μάζα M που βρίσκεται σε κάποιο γαλαξία κινείται κοντά στο γαλαξιακό δίσκο και μάλιστα κάθετα σε αυτόν. Σε πολύ καλή προσέγγιση ο γαλαξιακός δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επίπεδο στρώμα ύλης, άπειρης έκτασης, με ομογενή πυκνότητα ρ_0 και πάχος D.

1. Δείξτε ότι ενόσω το άστρο βρίσκεται εντός του στρώματος αυτού δέχεται μια αρμονική βαρυτική δύναμη. [Αυτό μπορείτε να το δείξετε είτε χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss η ροή της βαρυτικής επιτάχυνσης σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη της περιεχόμενης σε αυτή μάζα $M_{\text{περ}}$, δηλαδή $\oint \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{περ}}$, είτε καταφεύγοντας στον πιο επίπονο ολοκληρωτικό υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης που ασκείται εντός του στρώματος ύλης.]

2. Πόση είναι η δύναμη αυτή, αν το άστρο βρίσκεται εκτός του δίσκου;

3. Υπολογίστε και σχεδιάστε τη συχνότητα ταλάντωσης το άστρου ως συνάρτηση της απόστασής του s από το ενδιάμεσο επίπεδο του δίσκου, θεωρώντας ότι το άστρο ξεκινά την κίνησή του από το σημείο αυτό με μηδενική ταχύτητα.

4. Αν κατά τη δημιουργία του δίσκου όλα τα άστρα που αποτελούν το δίσκο βρίσκονταν σε κατάσταση ηρεμίας και ήταν κατανεμημένα ομοιόμορφα μέσα σε αυτόν με πυκνότητα ρ_0 σε πόσο χρόνο θα κατέρρεε ο δίσκος και θα γινόταν εντελώς επίπεδος (άνευ πάχους); [Αγνοήστε τις κινήσεις στο επίπεδο του δίσκου θεωρώντας ότι στο χρονικό διάστημα που συμβαίνουν οι εγκάρσιες κινήσεις δεν αλλάζει τίποτε όσον αφορά στην κατανομή των αστέρων σε κάθε επίπεδο παράλληλο του δίσκου.]

ΘΕΜΑ Γ Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου Q κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0\hat{z}$ μέσα σε ένα μέσο που ασκεί πάνω του δύναμη αντίστασης $\vec{F}_{\text{αντ}} = -m\gamma\vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

1. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και δείξτε (λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο αυτής με το $\vec{B}$) ότι αν αρχικά το σωματίδιο κινούνταν κάθετα στο μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο θα κινείται πάντα επί ενός επιπέδου.

2. Δείξτε (λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με την ταχύτητα) ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου μειώνεται με το χρόνο ως $e^{-2\gamma t}$.

3. Δεδομένου ότι η κίνηση διεξάγεται στο επίπεδο $x-y$ γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στο επίπεδο αυτό (σε καρτεσιανές συντεταγμένες). Στη συνέχεια ορίζοντας την καινούργια μεταβλητή $\zeta = x + i\,y$ συνδέστε τις δύο εξισώσεις σε μια μιγαδική εξίσωση. Είναι η εξίσωση αυτή γραμμική; Είναι όλοι οι συντελεστές της πραγματικοί; Τι είδους λύσεις περιμένετε από μια τέτοια εξίσωση;

4. Βρείτε την ακριβή λύση δεδομένου ότι αρχικά $\vec{v}(0) = v_0\hat{x}$, $\vec{r}(0) = (0,0,0)$. Προσέξτε ότι η λύση σας είναι μιγαδική και επομένως κάθε σταθερά που εισέρχεται σε αυτή έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος.

5. Σε ποιο σημείο θα βρεθεί τελικά (μετά από πολύ χρόνο) το σωματίδιο;

Καλή σας επιτυχία

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1.
$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)\ ,\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \Rightarrow m\ddot{x} = -2kx$$
όπου $x = x_2 - x_1 - l_0$.

2. Η παραπάνω είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\omega = \sqrt{2k/m}$. Με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες η εξίσωση κίνησης του ελατηρίου είναι $x = x_0 \cos \omega t$ όπου x_0 η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου (αρνητική αν πρόκειται για συσπείρωση).

3. Όχι αφού η κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή αποκλείεται να είναι μηδενική (ακινησία) εφόσον υπάρχει είτε αρχική θέση (μη μηδενική) είτε αρχική ταχύτητα είτε και τα δύο. Ένα άλλο επιχείρημα είναι ότι η λύση πρέπει να είναι μοναδική. Αν υπάρχει αρχική θέση και/ή ταχύτητα δεν μπορεί να έχει την ίδια κίνηση με το να μην έχει ούτε αρχική απομάκρυνση ούτε ταχύτητα (ισορροπία του αρμονικού ταλαντωτή).

4. Τώρα εμφανίζεται και η μεταβλητή δύναμη
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0 + x)^2}$$
Αναπτύσσοντας αυτήν κατά Taylor θα έχουμε
$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l_0^2}\left(1 - 2\frac{x}{l_0} + \dots\right) \simeq F_0(1 - 2x/l_0),$$
όπου $F_0 = q^2/(4\pi\epsilon_0 l_0^2)$ και $F_0 = 100/49kx_0 = kl_0/49$, αφού το πλάτος της ταλάντωσης πριν ήταν $x_0 = 0.01l_0$. Τώρα η εξίσωση κίνησης είναι
$$m\ddot{x} = -2kx + F_0(1 - 2x/l_0) = -2(k + F_0/l_0)x + F_0.$$
Αυτή είναι και πάλι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με καινούργιο σημείο ισορροπίας.

5. Η γενική λύση αυτής είναι
$$x(t) = \frac{F_0}{2(k + F_0/l_0)} + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$$
όπου $\omega_1 = \sqrt{2(k + F_0/l_0)/m)}$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = x_0 = 0.01l_0$ και $v_0 = 0$. Έτσι
$$0.01l_0 = \frac{F_0}{2(k + F_0/l_0)} + A\ ,\ B\omega_1 = 0 \Rightarrow$$
$$A = 0.01l_0 - \frac{kl_0/49}{2(k + k/49)} = 0\ ,\ B = 0$$
Επομένως στη συνέχεια το ελατήριο θα παραμείνει για πάντα με αυτό το άνοιγμα $1.01l_0$ και δεν θα συμβεί καμία ταλάντωση. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν χρειάζεται να κρατήσουμε κανέναν επιπλέον όρο στο ανάπτυγμα, αφού δεν πρόκειται να αλλάξει άλλο η απόσταση των φορτίων.

ΘΕΜΑ Β Ένα άστρο κάποιου γαλαξία κινείται κοντά στο γαλαξιακό δίσκο και μάλιστα κάθετα σε αυτόν. Σε πολύ καλή προσέγγιση ο γαλαξιακός δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επίπεδο στρώμα ύλης άπειρης έκτασης, με ομογενή πυκνότητα ρ και πάχος D.

1. Βάσει του νόμου του Gauss, για μια κυλινδρική επιφάνεια ολοκληρωτικά εντός του στρώματος ύλης από το $-z$ έως το $+z$,

$$g(z)S + g(-z)S = -4\pi G\rho(2zS) \Rightarrow g(z) = -4\pi G\rho z$$

Πρόκειται για επιτάχυνση γραμμική (τύπου αρμονικού ταλαντωτή).

2. Αν τα όρια του κυλίνδρου της επιφάνειας Gauss ξεπερνούν το πάχος του στρώματος D τότε

$$g(z) = -4\pi G\rho D/2 = -2\pi G\rho D,$$

δηλαδή σταθερή και ανεξάρτητη της απόστασης από το στρώμα.

3. Για $s < D/2$ όντας αρμονικός ταλαντωτής το άστρο έχει συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega(s < D/2) = \sqrt{\frac{M|g(z)|/z}{M}} = \sqrt{4\pi G\rho} = \omega_0$$

Για $s > D/2$ πρέπει να συνυπολογιστεί και ο χρόνος κάλυψης υπό σταθερή δύναμη της απόστασης μέχρι την επιφάνεια του δίσκου:

$$\omega(s > D/2) = \frac{2\pi}{T_{\text{αρμ}} + 4T_{F\,=\text{σταθ}}}$$

όπου

$$T_{F\,=\text{σταθ}} = \sqrt{2(s - D/2)/|g|} = \sqrt{\frac{2s - D}{2\pi G\rho D}}$$

(ο χρόνος αυτός τετραπλασιάζεται γιατί πρέπει να εκληφθεί ο χρόνος ανόδου και καθόδου εκατέρωθεν του στρώματος σε αυτό το σταθερό πεδίο). Μετά από πράξεις

$$\omega(s > D/2) = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4s}{D} - 2}}$$

4. Καθώς θα καταρρέει ο δίσκος υπό την επίδραση της ίδιοας του της βαρύτητας και να γίνεται πιο λεπτός αλλάζει η πυκνότητα του. Όμως η βαρυτική επιτάχυνση που δέχεται ένα άστρο στην επιφάνειά του είναι σταθερή αφού η περιεχόμενη μάζα στον κύλινδρο που καλύπτει όλο το εύρος του στρώματος είναι σταθερή. Επομένως ο χρόνος κατάρρευσης είναι ο χρόνος κάλυψης του $D/2$ υπό την επίδραση αυτής της σταθερής επιτάχυνσης.

$$T_{\text{καταρ}} = \sqrt{\frac{2(D/2)}{2\pi G\rho_0 D}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}.$$

ΘΕΜΑ Γ

1.

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\gamma\dot{\vec{r}} + Q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το $\vec{B}$

$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{B} = -\gamma\vec{v} \cdot \vec{B} + \vec{0}$$

και συμβολίζοντας το $\vec{v} \cdot \vec{B}$ με s

$$ds/dt = -\gamma s$$

Αν αρχικά $s(0) = 0$ θα είναι για πάντα $s(t) = 0$, δηλαδή πάντα η κίνηση θα είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο και επομένως επίπεδη.

2.

$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = -\gamma\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{0}$$

και συμβολίζοντας το $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ με w

$$(1/2)dw/dt = -\gamma w \Rightarrow w = w_0 e^{-2\gamma t}$$

3.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{QB_0}{m}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma\frac{dy}{dt} - \frac{QB_0}{m}\frac{dx}{dt}$$

δηλαδή

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\gamma\frac{d\zeta}{dt} - i\frac{QB_0}{m}\frac{d\zeta}{dt}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική με σταθερούς μη πραγματικούς συντελεστές επομένως οι λύσεις της αναμένεται να έχουν τη μορφή $\zeta = \zeta_0 e^{\Lambda t}$.

4. Με απλή αντικατάσταση της παραπάνω λύσης βρίσκουμε $\Lambda_2 = -(\gamma + iQB_0/m)$ ή $\Lambda_1 = 0$. Έτσι

$$x(t) + iy(t) = \zeta(t) = \zeta_{01} + \zeta_{02}e^{-(\gamma+iQB_0/m)t}$$

Από τις αρχικές συνθήκες θεωρώντας ότι αρχικά βρίσκεται στη θέση $x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow \zeta(0) = 0$ έχουμε

$$\zeta_{01} + \zeta_{02} = 0\ ,\ \zeta_{02}\Lambda_2 = v_0 + i0$$

Λύνοντας τις παραπάνω βρίσκουμε

$$\zeta_{01} = -\zeta_{02} = \frac{v_0}{\gamma + iQB_0/m}$$

5. Μετά από αρκετό χρόνο θα σβήσει η εκθετική λύση και θα μείνει η σταθερή.

$$x(\infty) + iy(\infty) = \zeta_{01} = \frac{v_0}{\gamma^2 + (QB_0/m)^2}(\gamma - iQB_0/m)$$

απ' όπου διαβάζουμε την τελική θέση

$$x(\infty)\frac{v_0\gamma}{\gamma^2 + (QB_0/m)^2}\ ,\ y(\infty)\frac{-v_0QB_0/m}{\gamma^2 + (QB_0/m)^2}.$$