ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση επί Πτυχίω στη Μηχανική Ι

9 Μαΐου 2011

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 10 ερωτήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες και τεκμηριωμένες όπου ζητείται απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

1. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση και εξωτερική διέγερση και την κίνηση που εκτελεί αυτός αν η αρχική θέση του είναι x_0 και η αρχική ταχύτητά του v_0. Το σημείο ισορροπίας είναι το $x = 0$, η μάζα m και η σκληρότητα του ελατηρίου k.

2. Ένας αρμονικός ταλαντωτής σαν τον παραπάνω ξεκινά τη στιγμή $t = 0$ από τη θέση ηρεμίας $x_m(0) = 0$ με ταχύτητα 0. Το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου (όχι αυτό στο οποίο είναι προσδεδεμένη η μάζα) τίθεται σε κίνηση κατά μήκος του άξονα x του ελατηρίου σύμφωνα με το νόμο $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ όπου a κάποια σταθερά. Να βρεθεί η θέση της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου $x_m(t)$.

3. Ποια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο μάζας m όταν αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης σε απόσταση $r < R$ από το κέντρο της; Η Γη θεωρείται σφαίρα με μάζα M και ακτίνα R σταθερής πυκνότητας. Γράψτε το διάνυσμα της δύναμης.

4. Ένα σωματίδιο μάζας m αφήνεται να πέσει στο εσωτερικό της Γης ξεκινώντας από την επιφάνεια αυτής με ταχύτητα 0. Θεωρήστε ότι η μάζα m είναι ίδια με αυτή της Γης M και ότι το σωματίδιο κινείται στο εσωτερικό της εξαιτίας μόνο της βαρυτικής δύναμης χωρίς να δέχεται καμία άλλη αντίσταση. Η Γη θεωρείται μη περιστρεφόμενη, αλλά **όχι** και ακίνητη κατά τη διαδικασία πτώσης του σωματιδίου στο εσωτερικό της (η Γη είναι ελεύθερη να κινείται). Να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου.

5. Έστω $\vec{r}_1(t) = \hat{x}\cos t + \hat{y}\sin t$ και $\vec{r}_2(t) = 2(-\hat{x}\sin t + \hat{y}\cos t)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες (i) $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, (ii) $d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)/dt$, (iii) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

6. Έστω το μέγεθος $\xi(t) = \vec{A} \cdot \vec{r}(t)$ και το $\vec{w}(t) = \vec{A} \times \vec{r}(t)$ με $\vec{A}$ κάποιο σταθερό διάνυσμα. Αν το $\xi(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $\frac{d}{dt}\xi(t) = 0$ και $\xi(0) = 0$ τι μπορείτε να συμπεράνετε για την κίνηση ενός σωματιδίου που περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r}(t)$; Αν επιπλέον (εκτός της προηγούμενης σχέσης) ισχύει και $\frac{d}{dt}\vec{w}(t) = 0$ πως κινείται το σωματίδιο;

7. Δύο δορυφόροι σε απόσταση H από το κέντρο της Γης βάλλονται κάθετα στην ακτίνα αυτή με ταχύτητες αντίθετης κατεύθυνσης. (Το H είναι μεγαλύτερο από την ακτίνα της Γης.) (i) Ποια σχέση πρέπει να έχουν τα μέτρα των δύο ταχυτήτων για να συγκρουστούν αυτοί όταν θα βρίσκονται από την πίσω πλευρά της Γης, στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν της αρχικής ακτίνας εκτόξευσής τους; (ii) Αν συγκρουστούν είναι η τροχιά που ακολούθησαν κατ' ανάγκη κυκλική; (Οι δορυφόροι θεωρούνται σημειακοί.)

8. Ένας δορυφόρος γυρίζει σε κυκλική τροχιά ακτίνας H γύρω από τη Γη. Ξαφνικά συμβαίνει μια έκρηξη που απελευθερώνει ενέργεια ακριβώς όση η ολική ενέργεια του δορυφόρου (κατ' απόλυτη τιμή) στη θέση αυτή και ο δορυφόρος χωρίζεται σε δύο κομμάτια τα οποία απομακρύνονται το ένα από το άλλο στην διεύθυνση κίνησης του αρχικού δορυφόρου. Ποιος ο λόγος των μαζών των δύο κομματιών αν αυτά συγκρουστούν τελικά στην πίσω πλευρά της Γης (όπως στο προηγούμενο ερώτημα);

9. Ζωγραφίστε το ενεργό δυναμικό για ένα κεντρικό πεδίο της μορφής $V(r) = -k/r$ με $k > 0$. Μέσω του ενεργού δυναμικού υπολογίστε με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα σωματίδιο στο πεδίο αυτό για να εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας r_0.

10. Ένα σωματίδιο κινείται σε κεντρικό πεδίο της μορφής $V(r) = -k/r + a/r^2$ με k, a θετικές σταθερές. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το σωματίδιο κινούμενο σε κυκλική τροχιά στο δυναμικό αυτό; Ποια η ακτίνα της κυκλικής αυτής τροχιάς; Σε ποια θέση το σωματίδιο θα μπορούσε να μένει ακίνητο στο πεδίο αυτό και να μην στρέφεται γύρω από το κέντρο;

1. $m\ddot{x} = -kx$, $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

2. $m\ddot{x}_m = -kx_m - ma$ στο επιταχυνόμενο σύστημα της πλατφόρμας με λύση $x_m(t) = \frac{am}{k}\left[\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - 1\right]$. Οπότε στο αδρανειακό σύστημα $x_m(t) = \frac{1}{2}at^2 + \frac{am}{k}\left[\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - 1\right]$.

3. $\vec{F} = -\frac{GMm}{R^3}\vec{r}$.

4. $m\ddot{\vec{r}}_m = \vec{F}_m = -\frac{GMm}{R^3}(\vec{r}_m - \vec{r}_M)$ η δύναμη που δέχεται η m και $M\ddot{\vec{r}}_M = \vec{F} = \frac{GMm}{R^3}(\vec{r}_m - \vec{r}_M)$ η δύναμη που δέχεται η M. Αφαιρώντας τις εξισώσεις κίνησης και θέτοντας τις αρχικές συνθήκες $\vec{r}_m(0) = \vec{R}$, $\vec{r}_M(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}_m(0) = \dot{\vec{r}}_M(0) = 0$ βρίσκουμε $\vec{r}_m(t) = (\vec{R}/2)\left[1 + \cos(\sqrt{\frac{2GM}{R^3}}t\right]$ όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι $m = M$.

5. (i) $\sqrt{5}$, (ii) $\frac{d}{dt}0 = 0$, (iii) $2\hat{z}$.

6. (i) Το $\vec{r}$ κινείται σε επίπεδο κάθετο στο $\vec{A}$. (ii) Το $\vec{r}$ δεν κινείται, άλλα μένει σταθερό κάθετο στο $\vec{A}$.

7. Οι ταχύτητες πρέπει να είναι ίσες ώστε να εκτελέσουν οι 2 δορυφόροι από μισή έλλειψη και να συναντηθούν στην πίσω πλευρά της Γης. Αρκεί η ταχύτητά τους να είναι μικρότερη της ταχύτητας διαφυγής $(\sqrt{\frac{2GM}{H}})$ και μεγαλύτερη από μια ελάχιστη τιμή $(\sqrt{\frac{2GMR}{H(H+R)}})$ που θα τους έριχνε στη Γη.

8. Από διατήρηση ορμής και ενέργειας (η συνολική ενέργεια είναι 0 μαζί με αυτή της έκρηξης) βρίσκουμε λόγο μαζών $(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$ ώστε να έχουν ίδια ταχύτητα και να συγκρουστούν. Δυστυχώς όμως δεν είναι δυνατό να συγκρουστούν γιατί τότε θα φύγουν με την ταχύτητα διαφυγής!

9. $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ πρόκειται για συνάρτηση με ένα ελάχιστο που συμβαίνει στην ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. $v_0^2 = \frac{k}{mr_0}$.

10. $V_{eff} = \frac{L^2+2am}{2mr^2} - \frac{k}{r}$. Από την απαίτηση $dV_{eff}/dr = 0$ στη θέση της κυκλικής τροχιάς r_0 βρίσκουμε $r_0 = \frac{L^2+2am}{km} = \frac{m^2v_0^2r_0^2+2am}{km}$. Για να έχει το τριώνυμο ρίζα θα πρέπει $v_0^2 \leq \frac{k^2}{8am}$. Τότε $r_0 = 4a/k$. Το δυναμικό αυτό επιτρέπει σημείο ισορροπίας ακόμη και αν $L = v_0 = 0$. Πρόκειται για το σημείο $r_0 = 2a/k$.