



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική I 27 Μαΐου 2013

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε έναν σφαιρικό και ομογενή πλανήτη πυκνότητας ρ και ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m (η m είναι πολύ μικρότερη της μάζας του πλανήτη, ώστε αυτός να μπορεί να θεωρηθεί ακίνητος).

1. Υπολογίστε το δυναμικό που προκαλείται από τον πλανήτη σε σημείο του χώρου που βρίσκεται σε απόσταση $r > R$ (όπου R η ακτίνα του πλανήτη) από το κέντρο του πλανήτη, θεωρώντας ως δεδομένο ότι το δυναμικό σε απόσταση r από μια σημειακή μάζα μ είναι $-G\mu/r$.
2. Αν \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου με αρχή το κέντρο του πλανήτη, γράψτε την διανυσματική εξίσωση κίνησης του σώματος, υπό την προϋπόθεση ότι για όλους τους χρόνους ισχύει ότι $|\vec{r}| > R$ (δηλαδή ότι το σωματίδιο βρίσκεται έξω από τον πλανήτη). Υπολογίστε προσεκτικά τη δύναμη που ασκείται στο σώμα, από το δυναμικό που υπολογίσατε στο ερώτημα (1).
3. Από τις εξισώσεις κίνησης αποδείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο του πλανήτη διατηρείται κατά την κίνηση, καθώς και ότι η ενέργεια του σώματος (που πρέπει να την προσδιορίσετε) διατηρείται και αυτή κατά την κίνηση.
4. Έστω ότι το σωματίδιο εκτελεί παραβολική τροχιά η οποία εφάπτεται στον πλανήτη όταν το σωματίδιο βρίσκεται στη μικρότερη απόσταση από τον πλανήτη. Κάνοντας χρήση αρχών διατήρησης, προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος ως προς το κέντρο του πλανήτη όταν αυτό περνά από την κοντινότερη αυτή απόσταση. [Σκεφθείτε ποια συνθήκη καθιστά την τροχιά παραβολική.]
5. Θα μπορούσε το σωματίδιο να εκτελέσει παραβολική τροχιά, αλλά να μην διέρχεται στην κοντινότερή του απόσταση από την επιφάνεια του πλανήτη (να περνά για παράδειγμα σε απόσταση μεγαλύτερη από R από το κέντρο του πλανήτη); Σε τι θα διαφέρει αυτό το σωματίδιο από εκείνο του ερωτήματος (4);
6. Τι μπορείτε να πείτε για τη γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου (ως προς το κέντρο του πλανήτη) όταν αυτό διέρχεται από το σημείο επαφής (την κοντινότερη απόσταση από το κέντρο του πλανήτη), αν η τροχιά ήταν υπερβολική, αντί για παραβολική;
7. Δείξτε ότι αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά ακίνητο εντός του πλανήτη και στη συνέχεια κινείται εξαιτίας μόνο της βαρυντικής δύναμης του πλανήτη (καμία αντίσταση εξαιτίας της κίνησης) θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Ποια η συχνότητα αυτής; [Συγκρίνετέ την με τη γωνιακή ταχύτητα του ερωτήματος (4).]

ΘΕΜΑ Β

Θεωρήστε τον μονοδιάστατο ταλαντωτή μάζας m ο οποίος έχει συντελεστή απόσβεσης $\gamma > 0$ και φυσική συχνότητα ω_0 . Η θέση του ταλαντωτή είναι $x(t)$ και η εξίσωση που τη διέπει είναι:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

1. Ορίστε τι σημαίνει σημείο ισορροπίας προσδιορίζοντας τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στο σημείο αυτό. Ποιο είναι το σημείο ισορροπίας αυτού του ταλαντωτή;
2. Γράψτε τη γενική μορφή της κίνησης του ταλαντωτή για $\gamma < \omega_0$ και για $\gamma > \omega_0$ (δεν ζητείται να προσαρμόσετε τη γενική αυτή λύση σε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες).
3. Εξηγήστε απλά με ποσοτικά επιχειρήματα για ποιο λόγο η επιλογή $\gamma = \omega_0$ επτυγχάνει τον ταχύτερο ρυθμό επαναφοράς του ταλαντωτή στη θέση ισορροπίας. Για ποιο λόγο δεν είναι αναγκαίο να γνωρίζετε την ακριβή μορφή της κίνησης για $\gamma = \omega_0$ για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό, παρά μόνο τις απαντήσεις του προηγούμενου ερωτήματος που αναφέρονται στις περιπτώσεις $\gamma \neq \omega_0$;
4. Γράψτε τη γενική λύση όταν η απόσβεση είναι ιδιαίτερα ασθενής, δηλαδή $\omega_0 \gg \gamma$, αμελώντας όλους τους όρους τάξης γ^2/ω_0^2 .
5. Θεωρήστε τώρα ότι ασκείται στον ταλαντωτή η περιοδική δύναμη $F \cos(\omega t)$. Μετά από πόσο χρόνο (τάξη μεγέθους) ο ταλαντωτής θα εκτελεί περιοδική κίνηση; Προσδιορίστε τη μορφή της εξαναγκασμένης αυτής κίνησης, μετά από το μεταβατικό αυτό χρονικό διάστημα.
6. Υπολογίστε τώρα τη μέση τιμή ρυθμού μεταφοράς έργου από τη διεγείρουσα δύναμη στον ταλαντωτή $I(\omega)$, όταν αυτός έχει φτάσει στην τελική του περιοδική κίνηση και σχεδιάστε την συναρτήσει του ω . Αν θέλουμε να αποθηκεύσουμε ενέργεια στον ταλαντωτή σε ποιά συχνότητα πρέπει να διεγείρουμε τον ταλαντωτή για να επιτύχουμε τον μέγιστο ρυθμό μεταφοράς ενέργειας στον ταλαντωτή;
7. Υπολογίστε το μέσο ρυθμό ενέργειας που καταναλίσκεται από τη δύναμη της τριβής του ταλαντωτή, όταν αυτός έχει φτάσει στην τελική του περιοδική κίνηση, και συγκρίνετέ την με αυτήν του ερωτήματος (6).
8. Εξηγήστε ποιοτικά τι ισχύει για τους μέσους ρυθμούς προσφοράς έργου και απώλειας ενέργειας λόγω τριβής, όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται στη μεταβατική κατάσταση προς την τελική περιοδική κίνηση.