ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πτυχιακή Εξέταση στη Μηχανική Ι

12 Μαΐου 2008

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα 20 ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα. Καλή σας επιτυχία.

Φανταστείτε ένα ιδιόμορφο ηλιακό σύστημα στο οποίο το κεντρικό σώμα (ο Ήλιος του) μάζας M είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων και η ιδιόμορφη βαρυτική δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης κάποιου πλανήτη μάζας m με το εν λόγω κεντρικό σώμα είναι $V = \frac{1}{2}GmM|\vec{r}|^2$, όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του πλανήτη ως προς το κεντρικό σώμα και G μια θετική σταθερά. Και τα δύο σώματα, Ήλιος και πλανήτης, θεωρούνται σημειακά.

1. Γράψτε την διανυσματική εξίσωση κίνησης του πλανήτη.

2. Γράψτε τη στροφορμή του πλανήτη ως προς το κεντρικό σώμα και δείξτε ότι αυτή διατηρείται.

3. Γράψτε την ενέργεια του πλανήτη και δείξτε ότι αυτή διατηρείται.

4. Ο πλανήτης βρίσκεται αρχικά στη θέση $\vec{r} = (0, 0, 1)$ με ταχύτητα $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Σχεδιάστε την τροχιά αυτού, προσδιορίζοντας τη μέγιστη απόσταση στην οποία θα φθάσει ο πλανήτης και την περίοδο της κίνησής του (ο χρόνος μέχρι να επανέλθει στην ίδια αρχική θέση με την ίδια ταχύτητα). Ο πλανήτης μπορεί να περάσει από τη θέση του Ήλιου (όντας και οι δύο αραιά νέφη) χωρίς να συμβεί καμία σύγκρουση. [Υπ: Αναλύστε την εξίσωση κίνησης στις καρτεσιανές συνιστώσες της.]

5. Αλλάξτε κατάλληλα την ταχύτητα του προηγούμενου ερωτήματος ώστε ο πλανήτης να διαγράψει κυκλική τροχιά γύρω από το κεντρικό σώμα.

Για τα παρακάτω ερωτήματα (6-10): ο πλανήτης αρχικά βρίσκεται στη θέση $\vec{r} = (1, 0, 0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

6. Προσδιορίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του πλανήτη ανά πάσα στιγμή. [Υπ: Αναλύστε τις εξισώσεις κίνησης στους 3 καρτεσιανούς άξονες.]

7. Σχεδιάστε την τροχιά και προσδιορίστε την περίοδο αυτής.

8. Εάν ο πλανήτης με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες έχει επιπλέον και φορτίο q και υπάρχει ένα ομογενές διαπλανητικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0(1, 0, 0)$ σε ολόκληρο το χώρο του ηλιακού αυτού συστήματος, προσδιορίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του πλανήτη ανά πάσα στιγμή.

9. Θεωρήστε τώρα ότι το ηλεκτρικό πεδίο του προηγούμενου ερωτήματος είναι χρονεξαρτημένο και έχει τη μορφή $\vec{E} = E_0(1, 0, 0)\cos(\omega t)$. Προσδιορίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του πλανήτη ανά πάσα στιγμή, αν $\omega \neq \sqrt{GM})$.

10. Λαμβάνοντας το όριο της λύσης που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα όταν, $\omega \to \sqrt{GM}$, προσδιορίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του πλανήτη στην περίπτωση που είναι $\omega = \sqrt{GM}$. [Δίδεται η ταυτότητα $\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2) = -2\sin((\phi_1 + \phi_2)/2)\sin((\phi 1 - \phi_2)/2)$.]

Θεωρήστε τώρα ότι ο πλανήτης έχει φορτίο q, αλλά αντί για το ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει ένα σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε ολόκληρο το χώρο του ηλιακού συστήματος, οπότε δέχεται επιπλέον της βαρυτικής μια δύναμη $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$.

11. Είναι η ενέργεια που βρήκατε στο ερώτημα (3) και πάλι σταθερά της κίνησης;

12. Δείξτε σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{B}$ με την εξίσωση κίνησης ότι, αν αρχικά η θέση και η ταχύτητα του πλανήτη είναι κάθετες στο μαγνητικό πεδίο, θα παραμείνουν για πάντα κάθετες.

13. Δείξτε ότι το ακόλουθο διάνυσμα είναι σταθερό κατά την κίνηση

$$\vec{A} = m\vec{r} \times \vec{v} + \frac{q\vec{B}|\vec{r}|^2}{2}.$$

[Δίδεται η διανυσματική ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.]

Επιστρέφουμε στο ιδιόμορφο ηλιακό σύστημα, θεωρώντας τους πλανήτες δίχως φορτίο. Η δύναμη μεταξύ των πλανητών θεωρείται αμελητέα και έτσι η μόνη δύναμη που ασκείται σε αυτούς είναι η ιδιόμορφη βαρυτική δύναμη από το κεντρικό σώμα.

14. Διατυπώστε τον αντίστοιχο πρώτο νόμο του Κέπλερ σε αυτό το ηλιακό σύστημα και τονίστε τη διαφορά με τον αντίστοιχο νόμο στο δικό μας πραγματικό ηλιακό σύστημα.

15. Διατυπώστε τον αντίστοιχο δεύτερο νόμο του Κέπλερ σε αυτό το ηλιακό σύστημα. Υπάρχει καμία διαφορά από τον αντίστοιχο νόμο στο δικό μας πραγματικό ηλιακό σύστημα; Γιατί;

16. Διατυπώστε τον αντίστοιχο τρίτο νόμο του Κέπλερ (ποια ποσότητα που αφορά την περίοδο και την τροχιά του εκάστοτε πλανήτη είναι ίδια για όλους τους πλανήτες) σε αυτό το ηλιακό σύστημα και τονίστε τη διαφορά με τον αντίστοιχο νόμο στο δικό μας πραγματικό ηλιακό σύστημα.

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι το κεντρικό σώμα αποτελείται από έναν σφαιρικό φλοιό ακτίνας R και απειροστού πάχους, με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$. Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ σημειακών μαζών θεωρείται ότι είναι η ιδόμορφη δυναμική ενέργεια που εξετάζουμε εδώ.

17. Ολοκληρώστε τη δυναμική ενέργεια που δίνεται αρχικά μεταξύ μιας σημειακής μάζας m και των απειροστών δακτυλίων του σφαιρικού φλοιού που αποτελούνται από μάζες που ισαπέχουν από την m (λάβετε τη μάζα του κάθε τέτοιου δακτυλίου ως απειροστή dM και ολοκληρώστε σε ολόκληρη τη σφαίρα). Ποια η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης σφαιρικού φλοιού - σημειακής μάζας;

18. Ποια η δύναμη έλξης μεταξύ των δύο ανωτέρω σωμάτων;

19. Πόση είναι η δύναμη αυτή, αν η m βρίσκεται στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού;

20. Με βάση τα ανωτέρω ερωτήματα εκτιμήστε τη δύναμη έλξης μεταξύ δύο συμπαγών σφαιρών κατακευασμένων από ομογενές υλικό.

Καλή σας επιτυχία

Λύσεις

1. $$\vec{F} = -\nabla V = -GmM\vec{r} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -GmM\vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -GM\vec{r}$$

2. $$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

   αφού $\ddot{\vec{r}} \parallel \vec{r}$.

3. Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την εξίσωση κίνησης με $\vec{v}$ έχουμε
$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -GM\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \Rightarrow$$
$$|fracddt(\dot{\vec{r}})^2 = -GM\frac{d}{dt}(\vec{r})^2 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}GMm\vec{r}^2\right) = 0$$

   Η ενέργεια είναι η ποσότητα εντός της παρένθεσης.

4. Αναλύοντας την εξίσωση κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες φαίνεται ότι $x(t) = y(t) = 0$ και
$$\ddot{z} = -GMz \Rightarrow z = A\cos(\sqrt{GM}t) + B\sin(\sqrt{GM}t)$$
   με αρχικές συνθήκες $z(0) = 1, \dot{z}(0) = 1$. Έτσι $A = 1, B = 1/\sqrt{GM}$. Η κίνηση θα είναι ευθύγραμμη αρμονική ταλάντωση με περίοδο $2\pi/\sqrt{GM}$ και πλάτος $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{1+1/GM}$.

5. Θα πρέπει η δύναμη $GMm|\vec{r}| = GMm$ να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου $mv^2/|\vec{r}| = mv^2$, επομένως η ταχύτητα θα πρέπει να είναι $v = \sqrt{GM}$ και κατεύθυνση κάθετη στην ακτίνα. Θα μπορούσαμε λοιπόν να επιλέξουμε $\vec{v} = \sqrt{GM}(1,0,0)$.

6. Οι εξισώσεις κίνησης όπως και στο ερώτημα (4) θα είναι αυτές αρμονικού ταλαντωτή σε κάθε άξονα.

7. Με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες οι κινήσεις στους 3 άξονες θα είναι
$$x(t) = \cos(\sqrt{GM}t)$$
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{GM}}\sin(\sqrt{GM}t)$$
$$z(t) = 0$$

   Η τροχιά λοιπόν είναι μια έλλειψη στο επίπεδο $x-y$ η $x^2 + GMy^2 = 1$. Η περίοδος της κίνησης θα είναι $T = 2\pi/\sqrt{GM}$.

8. Αυτό που αλλάζει τώρα είναι ότι προστίθεται μια σταθερή δύναμη στον άξονα x.
$$m\ddot{x} = -GMmx + qE_0$$

   με λύση
$$x(t) = A\cos(\sqrt{GM}t) + B\sin(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0}{GMm}$$

που με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες γίνεται

$$x(t) = \left(1 - \frac{qE_0}{GMm}\right)\cos(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0}{GMm}.$$

Αυτή είναι η μόνη συντεταγμένη που θα αλλάξει. Η τροχιά είναι και πάλι έλλειψη με μετατοπισμένο το κέντρο της:

$$\left(\frac{x - \frac{qE_0}{GMm}}{1 - \frac{qE_0}{GMm}}\right)^2 + GMy^2 = 1$$

9. Αν υπάρχει χρονοεξάρτηση τότε

$$m\ddot{x} - GMmx + qE_0\cos(\omega t)$$

με λύση

$$x(t) = A\cos(\sqrt{GM}t) + B\sin(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0/m}{GM - \omega^2}\cos(\omega t).$$

Επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες για το x έχουμε

$$x(t) = (1 - \frac{qE_0/m}{GM - \omega^2})\cos(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0/m}{GM - \omega^2})\cos(\omega t)$$

Η κίνηση στο x είναι ένα διακρότημα.

10. Μαζεύοντας τους συνιμητονικούς όρους με τον ίδιο πολλ/στικό παράγοντα έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0/m}{GM - \omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{GM}t)) \\ &= \cos(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0/m}{(\sqrt{GM} - \omega)(\sqrt{GM} + \omega)}(-2)\sin(\frac{\omega + \sqrt{GM}}{2}t)\sin(\frac{\omega - \sqrt{GM}}{2}t) \end{aligned}$$

που στο όριο $\omega \to \sqrt{GM}$ γίνεται

$$x(t) = \cos(\sqrt{GM}t) + \frac{qE_0/m}{2\sqrt{GM}}t\sin(\sqrt{GM}t)$$

11. Ναι γιατί η μαγνητική δύναμη δεν παράγει έργο όντας κάθετη στην κίνηση. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί άμεσα χρησιμοποιώντας την καινούργια δύναμη στην απόδειξη διατήρησης της ενέργειας του ερωτήματος (3).

12. Το εσωτερικό γινόμενο της μαγνητικής δύναμης με το μαγνητικό πεδίο είναι 0 οπότε

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{B}) = -GM(\vec{r} \cdot \vec{B})$$

που αποτελεί εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή για την ποσότητα $\chi = (\vec{r} \cdot \vec{B})$. Αν η ποσότητα αυτή είναι αρχικά 0 και έχει ταχύτητα $\dot{\chi} = (\vec{v} \cdot \vec{B}) = 0$ θα παραμείνει για πάντα 0. Επομένως συνεχώς το σωματίδιο θα κινείται στο επίπεδο το κάθετο στο $\vec{B}$.

13.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{v}) \\ &= \vec{r} \times (-GM\vec{r} + q(\vec{v}) \times \vec{B}) + q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{v}) \\ & q((\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{B}) + q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{v}) \\ &= q(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{v} = 0 \end{aligned}$$

αφού $\vec{r} \perp \vec{B}$.

14. Όπως βρήκαμε στα ερωτήματα (4,6) η τροχιά είναι έλλειψη με τον Ήλιο στο κέντρο αντί στην μία εστία αυτής.

15. Η στροφορμή διατηρείται (ερώτημα (2)) οπότε ο 2ος νόμος του Κέπλερ παραμένει ο ίδιος. Ο λόγος είναι ότι η δύναμη είναι και πάλι κεντρική (απ όπου πηγάζει η διατήρηση της στροφορμής).

16. Η περίοδος όλων των πλανητών είναι $2\pi/\sqrt{GM}$ και ανεξάρτητη από την εκάστοτε τροχιά αυτού.

17. Αν ο σημειακός πλανήτης βρίσκεται σε απόσταση a από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού τότε κάθε δακτύλιος του φλοιού σε γωνιακή θέση θ ως προς τον άξονα που ενώνει τα κέντρα φλοιού - πλανήτη θα απέχει από τον πλανήτη απόσταση

$$a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta$$

επομένως η συνεισφορά του στη δυν. ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι

$$dV = \frac{1}{2}GdMm(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta).$$

Επίσης

$$dM = \sigma 2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)$$

αφού ο κάθε δακτύλιος έχει ακτίνα $R\sin\theta$ και πλάτος $Rd\theta$. Έτσι ολοκληρώνοντας έχουμε

$$V = \int dV = \int_0^\pi \frac{1}{2}G\sigma R^2 2\pi\sin\theta d\theta m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta) = 2G\sigma\pi m R^2(a^2 + R^2)$$

αφού ο όρος με το $\sin\theta\cos\theta$ έχει μηδενικό ολοκλήρωμα. Τέλος αντικαθιστώντας $M = \sigma 4\pi R^2$ καταλήγουμε στο

$$V(a) = GMm\frac{1}{2}(a^2 + R^2).$$

18. Η σταθερά τιμή $GMm\frac{1}{2}R^2$ δεν έχει κανένα φυσικό νόημα αφού δεν έχει εξάρτηση από το a. Έτσι

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{a}}V = -GMm\vec{a}$$

που έχει την ίδια μορφή όπως και στα αρχικά ερωτήματα με σημειακό Ήλιο.

19. Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν διαφοροποιείται καθόλου αν ο πλανήτης βρίσκεται μέσα ή έξω από το φλοιό.

20. Αν προσθέσω τις δυνάμεις από πολλούς φλοιούς που απαρτίζουν μια ομογενή σφαίρα θα έχω της ίδιας μορφής συνολική δύναμη έλξης σε σημειακό πλανήτη.

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{a}}V = -GMm\vec{a}$$

Επομένως κάθε σφαιρικό σώμα δρα σαν όλη του η μάζα να είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο του. Από τον τρίτο όμως νόμο του Νεύτωνα η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στο σημειακό πλανήτη είναι ίδια με τη δύναμη του σημειακού πλανήτη στη σφαίρα. Όμως όπως είδαμε είτε ο πλανήτης είναι σημειακός είτε σφαίρα η επίδρασή του στα άλλα σώματα είναι η ίδια.

Μάλιστα στο ιδιόμορφο αυτό βαρυτικό κόσμο η έλξη των σωμάτων δεν αλλάζει μορφή ακόμη και αν εισχωρήσει το ένα μέσα στο άλλο διατηρώντας τη σφαιρικότητά τους !