ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πτυχιακή εξέταση στη Μηχανική Ι

25 Ιουνίου 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Σωματίδιο μάζας m και φορτίου $-e$ κινείται υπό την επίδραση δύναμης Coulomb και δύναμης Lorentz:

$$\vec{F} = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} - e\vec{v}\times\vec{B} \ ,$$

όπου $\vec{r}(t)$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ η ταχύτητα του σωματιδίου, $r = |\vec{r}|$ η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων, και $\vec{B}$ ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο.

1. Δείξτε ότι κατά τη κίνηση του σωματιδίου διατηρείται η ενέργεια:

   $$E = \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r} \ ,$$

   και αναφέρατε τη φυσική σημασία κάθε όρου αυτής.

2. Δείξτε ότι αν αρχικά το σωματίδιο ικανοποιεί τις συνθήκες $\vec{r}(0)\cdot\vec{B} = 0$ και $\vec{v}(0)\cdot\vec{B} = 0$ τότε σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι:

   $$\vec{r}(t)\cdot\vec{B} = 0 \ .$$

   Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση διατηρείται επιπλέον και η ποσότητα:

   $$m\vec{r}\times\vec{v} - \frac{1}{2}er^2\vec{B} \ .$$

   [Μπορείτε να κάνετε χρήση της ταυτότητας: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.]

Θέμα Β: Θεωρήστε ότι όλη η μάζα του σύμπαντος έχει τη μορφή αερίου και είναι συγκεντρωμένη σε ένα άπειρο επίπεδο και είναι κατανεμημένη σε αυτό με σταθερή πυκνότητα σ ανά μονάδα επιφανείας. Θεωρήστε ότι το επίπεδο αυτό είναι το $z = 0$ και ότι είναι διαπερατό.

1. Υπολογίστε τη βαρυτική έλξη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο μάζας m το οποίο βρίσκεται στο σημείο (x, y, z) του χώρου.

2. Η μάζα αυτή βρίσκεται αρχικά ακίνητη σε απόσταση z_0 από το επίπεδο. Δείξτε ότι θα εκτελέσει ταλάντωση. Σχεδιάστε την κατακόρυφη θέση της, $z(t)$, συναρτήσει του χρόνου και προσδιορίστε την περίοδο της ταλάντωσης T.

3. Στη μάζα ασκείται τώρα μία επιπλέον δύναμη, η $\vec{F} = (0, 0, \cos t)$. Σχολιάστε αν είναι δυνατόν να γραφεί η κίνηση της μάζας ως υπέρθεση μίας κίνησης που ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση και μίας κίνησης που ικανοποιεί την διέγερση από τον εξαναγκασμό.

Θέμα Γ: Δύο σωματίδια ίσης μάζας, m, αλληπεδρούν με δυναμικό αλληλεπίδρασης:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{mk}{2}|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$$

όπου k μία σταθερά. Τα διανύσματα θέσεων των σωματιδίων είναι τα $\vec{x}_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

1. Ποια δύναμη άσκεί το ένα σωματίδιο στο άλλο. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του κάθε σωματιδίου και δείξτε ότι διατηρείται το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων

   $$m\dot{\vec{x}}_1 + m\dot{\vec{x}}_2$$

   καθώς επίσης και η σχετική στροφορμή τους ανά μονάδα μάζας:

   $$\vec{L} = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \times (\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2) \ .$$

2. Εάν $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ η σχετική θέση των σωματιδίων δείξτε ότι το $\vec{x}$ κείται σε επίπεδο, και ότι η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων $r = |\vec{x}|$ ικανοποιεί την εξίσωση

   $$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{r^3} + k = 0$$

   όπου $L = |\vec{L}|$.

3. Γράψτε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή

   $$\frac{dE}{dt} = 0$$

   όπου $E = \dot{r}^2/2 + V_{\epsilon\nu}(r, L)$ η σχετική ενέργεια (ανα μονάδα μάζας) και $V_{\epsilon\nu}(r, L)$ ένα αντίστοιχο ενεργό δυναμικό. Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό και δείξτε ότι τα σωματίδια εκτελούν κυκλικές τροχιές σε σχετική απόσταση r_c όταν διαθέτουν σχετική ενέργεια ίση με $E = 3kr_c/2$.

Θέμα Δ: Δύο σωματίδια ίσης μάζας, m, αλληπεδρούν με δυναμικό αλληλεπίδρασης:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{mk}{2}|2\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2$$

όπου k μία σταθερά και το διάνυσμα θέσης κάθε σωματιδίου είναι $\vec{x}_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

1. Προσδιορίστε τη σχέση μεταξύ της δύναμης που ασκεί το πρώτο σωματίδιο στο δεύτερο, $\vec{F}_{12}$, και της δύναμης, $\vec{F}_{21}$, που ασκεί το δεύτερο στο πρώτο. Ικανοποιείται ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα;

2. Δείξτε ότι η ποσότητα:

   $$2m\dot{\vec{x}}_1 + m\dot{\vec{x}}_2$$

   διατηρείται κατά τη κίνηση.

3. Θεωρήστε τις νέες συντεταγμένες

   $$\vec{X} = 2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad , \quad \vec{x} = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad ,$$

   και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε αυτές τις συντεταγμένες.

4. Περιγράψτε τη γενική κίνηση του συστήματος σε αυτές τις συντεταγμένες. Αν προκύπτουν κλειστές τροχιές ποια είναι η περίοδος της κίνησης;

Λύσεις

Θέμα Α:

1. Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} - e\vec{v}\times\vec{B}\ ,$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με την ταχύτητα $\vec{v}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{m}{2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m|\vec{v}|^2}{2}\right) \\ &= -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{v}\cdot\vec{r} \\ &= -\frac{qe}{8\pi\epsilon_0 r^3}\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt} \\ &= -\frac{qe}{8\pi\epsilon_0 r^3}\frac{dr^2}{dt} \\ &= -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} \\ &= -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\ . \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = 0$$

οπότε διατηρείται κατα τη κίνηση η ενέργεια:

$$E = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r}\ .$$

Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου, ο δεύτερος είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Το μαγνητικό πεδίο δεν συμβάλει στην ενέργεια διότι το έργο από τη μαγνητική δύναμη είναι μηδενικό.

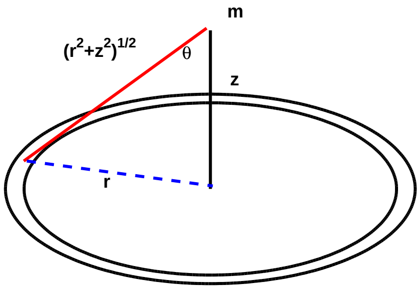
2. Παρατηρούμε λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ότι:

$$m\frac{d^2(\vec{r}\cdot\vec{B})}{dt^2} = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\vec{B}$$

οπότε με τις αρχικές συνθήκες $\vec{r}(0)\cdot\vec{B} = 0$ και $\vec{v}(0)\cdot\vec{B} = 0$ θα είναι και $\ddot{\vec{r}}(0)\cdot\vec{B} = 0$ καθώς επίσης, παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση και πάλι ως προς το χρόνο, θα μηδενίζεται και το εσωτερικό γινόμενο κάθε τάξης χρονικής παραγώγου της θέσης υπολογισμένης στον χρόνο 0 με το μαγνητικό πεδίο.

Αναπτύσσοντας τώρα κατά Taylor το $\vec{r}(t)\cdot\vec{B}$ προκύπτει ότι

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{B} = \vec{r}(0)\cdot\vec{B} + t\left.\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{B})}{dt}\right|_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left.\frac{d^2(\vec{r}\cdot\vec{B})}{dt^2}\right|_{t=0} + \cdots = 0\ .$$



῎Εχοντας αποδείξει ότι η κίνηση θα εξελίσσεται σε επίπεδο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο, λαμβάνουμε το εξωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το $\vec{r}$, και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= m\frac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt} \\ &= -e\vec{r}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \\ &= -e(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{v} + e(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{B} \\ &= e(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{B} \\ &= e\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\vec{B}\right) , \end{aligned}$$

κατα συνέπεια

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\times\vec{v} - e\frac{r^2}{2}\vec{B}\right) = 0 ,$$

οπότε διατηρείται η γενικευμένη στροφορμή:

$$m\vec{r}\times\vec{v} - e\frac{r^2}{2}\vec{B} .$$

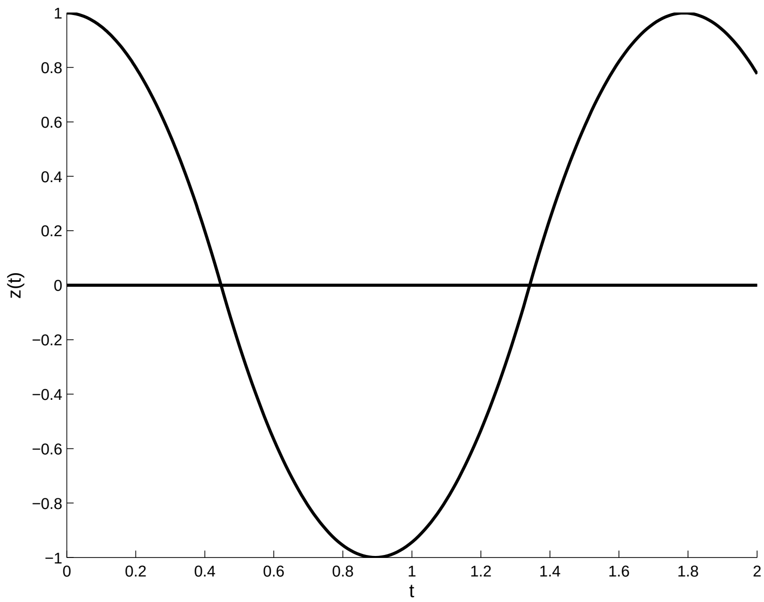
Θέμα B:

1. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο m από ένα δακτύλιο ακτίνας r πάχους dr (βλ. σχήμα) θα είναι στη αρνητική διεύθυνση z (ελκτική δύναμη) και ίση με

$$dF = -2\pi G m\sigma r dr\frac{\cos\theta}{r^2+z^2}$$

Ολοκληρώνοντας, θέτοντας $\cos\theta = z/(r^2+z^2)^{1/2}$, βρίσκουμε ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στη σημειακή μάζα από όλο το επίπεδο θα είναι:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty \frac{dF}{dr}dr \\ &= -2\pi G m\sigma\int_0^\infty \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr \\ &= -2\pi G m\sigma\frac{z}{|z|} \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Η χρονική εξάλιξη του ύψους του σωματιδίου από το επίπεδο. Η ταλάντωση αποτελείται από παραβολικές συναρτήσεις.

δηλαδή η δύναμη που ασκείται είναι:

$$\vec{F} = -2\pi m\sigma G \frac{z}{|z|}\vec{e}_z$$

όπου $\vec{e}_z$ το μονάδιαιο διάνυσμα στη z διεύθυνση. Η δύναμη είναι μία σταθερή ελκτική δύναμη.

2. Το σωματίδιο θα έλκεται με σταθερή δύναμη $2\pi m\sigma G$ οπότε θα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $2\pi\sigma G$ προς το επίπεδο, οπότε

$$z(t) = z_0 - \pi G\sigma t^2 \quad \gamma\iota\alpha \quad t_0 \geq t \geq 0$$

οπότε φτάνει στο $z = 0$ μετά από χρόνο $t_0 = \sqrt{z_0/(\pi G\sigma)}$ και συνεχίζει ώσπου να φτάσει στο $-z_0$ για να επαναλάβει τη κίνηση. Οπότε η κίνηση θα είναι περιοδική με περίοδο

$$T = 4\sqrt{\frac{z_0}{\pi G\sigma}}$$

3. Η εξίσωση κίνησης δεν είναι γραμμική. Συνεπώς η υπέρθεση λύσεων που ικανοποιούν τις εξισώσεις δεν είναι ικανοποιεί πλέον τις εξισώσεις.

Θέμα Γ:

1. Η δύναμη στο 1 από το 2 είναι

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_1} \\
&= -\frac{mk}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1}\left(\sqrt{(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}\right) \\
&= +\frac{mk}{2}\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}\,,
\end{aligned}$$

ενώ η

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_2} = -\frac{mk}{2}\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \ .$$

Η δύναμη είναι ελκτική , ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και έχει σταθερό μέτρο $mk/2$ ανεξάρτητα από τήν απόσταση των δύο σωματιδίων. Οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων είναι:

$$m\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} \quad , \quad m\ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{F}_{12}$$

οπότε αθροίζοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{x}}_1 + m\dot{\vec{x}}_2\right) = 0$$

οπότε διατηρείται η ποσότητα $m\dot{\vec{x}}_1 + m\dot{\vec{x}}_2$ και το κέντρο μάζας των σωματιδίων κινείται με σταθερή ταχύτητα, ενώ αφαιρώντας τις εξισώσεις έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{x}}_1 - m\dot{\vec{x}}_2\right) = 2\frac{mk}{2}\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}$$

και λαμβάνοντας το εξωτερικό γινόμενο έχουμε

$$(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{x}}_1 - m\dot{\vec{x}}_2\right) = 0$$

διότι ισχύει η ταυτότητα:

$$(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{x}}_1 - m\dot{\vec{x}}_2\right) = \frac{d}{dt}\left((\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times(m\dot{\vec{x}}_1 - m\dot{\vec{x}}_2)\right) \ .$$

Διατηρείται έτσι η σχετική στροφορμή:

$$\vec{L} = (\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times(\dot{\vec{x}}_1-\dot{\vec{x}}_2) \ .$$

2. Η εξίσωση της σχετικής κίνησης $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ των σωματιδίων είναι:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Επειδή διατηρείται η σχετική στροφορμή, η κίνηση εξελίσσεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{L}$. Οι εξισώσεις κίνησης σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + k = 0 \quad ; \quad r^2\dot{\theta} = |\vec{L}| = L \ .$$

οπότε απαλείφωντας την γωνιακή εξάρτηση καταλήγουμε στην ακτινική εξίσωση:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} + k = 0$$

3. Η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} + kr\right) = 0$$

και το ενεργό δυναμικό είναι:

$$V_{en} = \frac{L^2}{2r^2} + kr \ .$$

Το δυναμικό αυτό έχει ένα ελάχιστο (απειρίζεται και για μικρές και μεγάλες αποστάσεις) το οποίο βρίσκεται στην ακτίνα:

$$r_c = \left(\frac{k}{L^2}\right)^{1/3}$$

Αν το σωματίδιο βρίσκεται στην ακτίνα αυτή με μηδενική ακτινική ταχύτητα και ενέγεια ίση με

$$\begin{aligned} E &= r_c\left(\frac{L^2}{2r_c^3}+k\right) \\ &= \frac{3}{2}kr_c\ , \end{aligned}$$

το σωματίδιο θα εκτελέσει κυκλική κίνηση.

Θέμα Δ:

1. Η δύναμη στο 1 από το 2 είναι

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_1} \\ &= -\frac{mk}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1}\left((2\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot(2\vec{x}_2-\vec{x}_1)\right) \\ &= +mk(2\vec{x}_2-\vec{x}_1)\ , \end{aligned}$$

ενώ η

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_2} \\ &= -2mk(2\vec{x}_2-\vec{x}_1)\ , \end{aligned}$$

συνεπώς είναι

$$\vec{F}_{21} = -2\vec{F}_{12}$$

και ο τρίτος νόμος δεν ικανοποιείται.

2. Οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων είναι:

$$m\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} \quad , \quad m\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{21} = -2\vec{F}_{12}$$

συνεπώς

$$2m\ddot{\vec{x}}_1 + m\ddot{\vec{x}}_2 = 0$$

οπότε το παρακάτω άθροισμα των ορμών

$$2m\dot{\vec{x}}_1 + m\dot{\vec{x}}_2$$

διατηρείται κατά τη κίνηση.

3. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται αμέσως στη μορφή:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}}_1 &= mk\vec{x} \qquad (1) \\ m\ddot{\vec{x}}_2 &= -2mk\vec{x} \qquad (2) \end{aligned}$$

Οπότε 2 X εξίσωση (1) + εξίσωση (2) δίνει

$$m\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = 0\ ,$$

ενώ 2 X εξίσωση (2) - εξίσωση (1) δίνει

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + 5mk\vec{x} = 0\ .$$

4. Η εξίσωση της σχετικής κίνησης είναι αυτή του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή, κείται σε ένα επίπεδο, και είναι γενικά μία έλλειψη (όπως προκύπτει αμέσως γράφοντας τις εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες), με την αρχή στο κέντρο της έλλειψης (και όχι στην εστία), η δε περίοδος είναι $T = 2\pi/\sqrt{5k}$.