ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

6 Ιουλίου 2012

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Όλα τα ερωτήματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Σε σωματίδιο μάζας m και μοναδιαίου φορτίου που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}(t)$ ασκείται η δύναμη:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

όπου $\mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο, και $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ η δύναμη από ένα ιδιότυπο πεδίο που έχει κάποια κοινά με το σύνηθες μαγνητικό πεδίο. Και τα δύο πεδία έχουν χωρική μόνο εξάρτηση.

1. Δείξτε ότι κατά τη κίνηση του σωματιδίου η ποσότητα

   $$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \phi(\mathbf{r})$$

   δεν εξαρτάται από το χρόνο. Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο δεν εμφανίζεται στην ποσότητα αυτή το ιδιότυπο πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

2. Υποθέστε τώρα ότι είναι $\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\psi$ και ότι τα δύο δυναμικά ϕ, ψ έχουν σφαιρική συμμετρία και εξαρτώνται μόνο από την απόσταση $r = |\mathbf{r}|$ του σωματιδίου από την αρχή, δηλαδή είναι $\phi(r), \psi(r)$. Δείξτε ότι η ποσότητα

   $$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} - \psi\mathbf{r}$$

   είναι και αυτή σταθερά της κίνησης, αν το δυναμικό ψ έχει τη μορφή $\psi = \mu/r$, όπου μ οποιαδήποτε σταθερά.

3. Θεωρήστε τώρα την περίπτωση $\psi = 0$ οπότε μηδενίζεται το πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Εξηγήστε γιατί τότε η κίνηση του σωματιδίου γίνεται επίπεδη. Προσδιορίστε τότε το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου $\phi(r)$ έτσι ώστε να διατηρείται η ποσότητα:

   $$\mathbf{K} = \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} - \phi\mathbf{r}\ .$$

[Υπ: Θυμηθείτε ότι $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times c) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, ότι $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ και ότι αν η f εξαρτάται μόνο από το $r = |\mathbf{r}|$ τότε $\boldsymbol{\nabla}f(r) = f'(r)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.]

ΘΕΜΑ Β Σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται στο επίπεδο και η θέση του προσδιορίζεται με τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) , ενώ η αντίστοιχη σε αυτές τις συντεταγμένες επιτάχυνσή του είναι:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}).$$

Το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση δύναμης που απορρέει από δυναμικό: $-k/r$.

1. Δείξτε ότι οι ποσότητες

   $$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) \quad \text{και} \quad L = r^2\dot{\theta}$$

   είναι σταθερές της κίνησης, όπου:

   $$U(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{k}{r}\ .$$

   Σχεδιάστε το $U(r)$ για $k > 0$ και $k < 0$. Σε ποια φυσικά δυναμικά συναντάμε αυτές τις δύο περιπτώσεις;

2. Θεωρήστε τώρα την περίπτωση $k > 0$ και $L > 0$. Για ποιές τιμές του E προκύπτει φραγμένη κίνηση; Προσδιορίστε για αυτές τις τροχιές τη μικρότερη απόσταση, r_{min}, και τη μεγαλύτερη απόσταση του σωματιδίου από την αρχή, r_{max}, και δείξτε ότι ισχύει:

$$r_{\text{min}} + r_{\text{max}} = \frac{k}{|E|}.$$

3. Θεωρήστε τώρα τροχιές με $E > 0$ και k οποιουδήποτε προσήμου. Προσδιορίστε την κοντινότερη απόσταση r_{min} που μπορεί να φτάσει το σωματίδιο στην αρχή των αξόνων συναρτήσει του συντελεστή πρόσκρουσης b και της ταχύτητας που έχει το σωματίδιο v_∞ όταν $r \to \infty$. Ο συντελεστής πρόσκρουσης b είναι η απόσταση του κέντρου του πεδίου από την ευθεία κίνησης του σωματιδίου όταν αυτό βρίσκεται ακόμη πολύ μακριά από το κέντρο ($r \to \infty$).

4. Δείξτε ότι αν $b << |k|/v_\infty^2$ τότε σε πρώτη προσέγγιση θα είναι:

$$r_{\text{min}} \simeq \frac{2|k|}{v_\infty^2} \quad \text{όταν} \quad k < 0 \ , \quad \text{και} \quad r_{\text{min}} \simeq \frac{b^2 v_\infty^2}{2k} \quad \text{όταν} \quad k > 0 \ .$$

Τι φυσική πετρίπτωση περιγράφει η προσέγγιση αυτή (μικρό b ή μεγάλο u_∞); Σχεδιάστε τις τροχιές στις δύο αυτές περιπτώσεις. [Υπ: Δίδεται ότι $\sqrt{1+\epsilon} \simeq \epsilon/2$ για $|\epsilon| << 1$.]

ΘΕΜΑ Γ Πάνω σε μια οριζόντια πλατφόρμα μήκους $2L$ βρίσκεται ένα όχημα μάζας m το οποίο είναι συνδεδεμένο με το δεξί άκρο της πλατφόρμας μέσω ενός οριζόντιου, αβαρούς ελατηρίου σταθεράς k. Το όχημα, του οποίου οι διαστάσεις θεωρούνται αμελητέες, βρίσκεται ακριβώς στο μέσο της πλατφόρμας όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

1. Αν το όχημα κινείται χωρίς τριβές πάνω στην πλατφόρμα, ποιο περιορισμό πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές συνθήκες θέσης x_0 και ταχύτητας v_0 του οχήματος ώστε το όχημα κατά την κίνησή του να μην ξεφεύγει από τα όρια της πλατφόρμας;

2. Μετά από αρκετές ταλαντώσεις του οχήματος, παρατηρούμε ότι στην πραγματικότητα το όχημα κινείται πάνω στην πλατφόρμα υπό την επίδραση τριβής της μορφής $\mathbf{F}_{\text{τρ}} = -2m\gamma\mathbf{v}$ όπου $\mathbf{v}$ η στιγμιαία ταχύτητα του οχήματος. Αν καταγράφουμε τα διαδοχικά πλάτη της ταλάντωσης $A_1, A_2, \ldots$ και τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots$ πώς μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι η τριβή έχει αυτή ακριβώς τη μορφή και πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά γ από αυτές τις παρατηρήσεις; [Υπ: Θεωρήστε ότι τα πλάτη καταγράφονται πάντα από την ίδια πλευρά της ταλάντωσης, π.χ. στο δεξί μέρος της πλατφόρμας.]

3. Τώρα η πλατφόρμα αλλάζει κλίση με τη βοήθεια ενός μηχανισμού. Η κλίση αυτή σα συνάρτηση του χρόνου είναι $\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)$, όπου θ_0 είναι μια πολύ μικρή γωνία. Υπάρχει φόβος τώρα το όχημα να φτάσει στα άκρα της πλατφόρμας; Αν ναι ποιος θα πρέπει να είναι ο περιορισμός για την Ω ώστε να μην συμβεί αυτό; Εφαρμόστε τα συμπεράσματά σας στην περίπτωση που $(mg\theta_0)/(kL) = 1$ και $\gamma = 0.1\sqrt{k/m}$. [Υπ: Για πολύ μικρές γωνίες είναι $\sin\theta \simeq \theta$.]

καλή επιτυχία και

καλό καλοκαίρι

Λύσεις

Θέμα Α Επειδή $\mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\phi'}{r}\mathbf{r}$ και $\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\psi = -\frac{\psi'}{r}\mathbf{r}$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} &= m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\psi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \psi\dot{\mathbf{r}} \\
&= -\frac{\phi'}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) - \frac{\psi'}{r}\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}) - \frac{\psi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \psi\dot{\mathbf{r}} \\
&= \frac{\psi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r\psi'\dot{\mathbf{r}} - \frac{\psi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \psi\dot{\mathbf{r}} \\
&= -(r\psi' + \psi)\dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

το οποίο γίνεται χρονοανεξάρτητο άν: $\psi = \mu/r$.

3. Το $\mathbf{L}$ είναι σταθερό, οπότε:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{L}\times\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\phi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \phi\dot{\mathbf{r}} \\
&= -(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\times\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\phi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \phi\dot{\mathbf{r}} \\
&= \frac{\phi'}{r}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) - \frac{\phi'}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - \phi\dot{\mathbf{r}} \\
&= -(r\phi' + \phi)\dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

και συνεπώς για να μένει σταθερό το $\mathbf{K}$, το ϕ πρέπει να είναι δυναμικό Coulomb: $\phi = k/r$ με k κάποια σταθερά.