

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



## Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική I 16 Ιουλίου 2009

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 ισοδύναμα θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαίτερα.

**ΘΕΜΑ Α** Δύο σωματίδια με μάζες  $m_1, m_2$  αντίστοιχα κινούνται μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας που ασκεί το ένα στο άλλο.

- (1) Δείξτε, ξεκινώντας από το νόμο του Νεύτωνα ότι η ακόλουθη ποσότητα διατηρείται κατά την κίνηση των δύο σωματιδίων:

$$A = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - \frac{GM}{r},$$

όπου  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  είναι το διάνυσμα θέσης του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο,  $r = |\vec{r}|$  η σχετική τους απόσταση και  $M = m_1 + m_2$  η συνολική τους μάζα.

- (2) Θεωρήστε ότι τα σωματίδια είναι αρχικά ακίνητα και σε πολύ μεγάλη απόσταση το ένα από το άλλο. Δείξτε ότι το κέντρο μάζας αυτών θα είναι ακίνητο κατά την κίνηση των σωματιδίων, ενώ η σχετική τους ταχύτητα όταν αυτά θα βρίσκονται σε σχετική απόσταση  $r$  θα είναι  $v = \sqrt{2GM/r}$ .
- (3) Καθώς τα σωματίδια πλησιάζουν το ένα το άλλο, μόλις βρεθούν σε απόσταση  $a$  δέχονται και τα δύο στιγμιαίες ωθήσεις μεγέθους  $I$  αντίθετες η μια στην άλλη και σε διεύθυνση κάθετη στην ευθεία που τα ενώνει. Δείξτε ότι η μετέπειτα γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\theta}$  με την οποία περιστρέφεται το διάνυσμα της σχετικής τους θέσης ικανοποιεί τη σχέση  $r^2\dot{\theta} = aI/\mu$ , όπου  $\mu$  η ανηγμένη μάζα των δύο σωματιδίων. (Οι ωθήσεις προκαλούνται από δύο αντίθετες στιγμιαίες δυνάμεις που προσδίδουν στα σωματίδια ορμή κάθετη στην αρχική τους κίνηση ίση κατά μέτρο με την ώθηση  $I$ .)
- (4) Δείξτε ότι εξαιτίας των ωθήσεων τα σωματίδια θα αποφύγουν τη σύγκρουση, ενώ η ελάχιστη σχετική απόσταση  $d$  που θα πλησιάσουν μεταξύ τους ικανοποιεί τη σχέση

$$(a^2 - d^2)I^2 = 2GM\mu^2 d.$$

[Υπ: Η διατήρηση του μεγέθους  $A$  του ερωτήματος (1), όπως αυτό διαμορφώνεται μετά τη δράση των ωθήσεων ίσως σας βοηθήσει.]

- (5) Τελικά τα σωματίδια θα γυρίζουν το ένα γύρω από το άλλο ή θα πλησιάσουν στη μικρότερη αυτή απόσταση και στη συνέχεια θα απομακρυνθούν για πάντα το ένα από το άλλο;

**ΘΕΜΑ Β** Σε ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  στην περιοχή του Βόρειου Πόλου της Γης ασκείται η δύναμη:

$$\vec{F} = \alpha \vec{v} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

όπου  $\alpha$  μια σταθερά, ενώ η θέση του ηλεκτρονίου  $\vec{x}$  λαμβάνεται ως προς αδρανειακό σύστημα με αρχή τον Βόρειο Πόλο.

- (1) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης του ηλεκτρονίου αμελώντας τη δύναμη της βαρύτητας.

- (2) Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με την ταχύτητα του ηλεκτρονίου, δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου παραμένει σταθερό. Με βάση αυτή την παρατήρηση και τη μορφή της δύναμης θα μπορούσατε να κάνετε κάποια υπόθεση σχετικά με την προέλευση αυτής της δύναμης;
- (3) Τώρα λάβετε το εξωτερικό γινόμενο του  $\vec{x}$  με την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι το διάνυσμα

$$\vec{L} = m\vec{x} \times \vec{v} - \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

είναι σταθερό. [Δίδεται ότι  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .]

- (4) Λάβετε το εσωτερικό γινόμενο του  $\vec{L}$  με το  $\vec{x}$  και δείξτε ότι το ηλεκτρόνιο κινείται επί της επιφάνειας ενός κώνου με βάση τον Πόλο. Ποιο είναι το άνοιγμα του κώνου;
- (5) Ελέγξτε αν είναι δυνατόν τα ηλεκτρόνια να φτάσουν στον Πόλο (την κορυφή του κώνου).

**ΘΕΜΑ Γ** Ένα όχημα φέρει μια σειρά από αρμονικούς ταλαντωτές οι οποίοι δύνανται να κινούνται στη διεύθυνση κίνησης του οχήματος. Ο  $j$ -οστός από τους ταλαντωτές αποτελείται από μια μάζα  $m$  και ένα ελατήριο σκληρότητας  $j k$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ), και κινείται στον οριζόντιο άξονα που κινείται και το όχημα δίχως τριβές. (Όλα τα ελατήρια είναι στηριγμένα στο όχημα και κινούνται μαζί με αυτό ενώ στο άλλο τους άκρο είναι στερεωμένη η μάζα  $m$ .) Το όχημα, ξεκινώντας από την ηρεμία, επιταχύνει ομαλά για χρονικό διάστημα  $T$ , κινείται ομαλά για χρονικό διάστημα  $T$ , και στη συνέχεια επιβραδύνει για χρονικό διάστημα πάλι  $T$  φτάνοντας τελικά και πάλι στην ηρεμία.

- (1) Όσο το όχημα επιταχύνεται (ή επιβραδύνεται) ομαλά ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το όχημα; Γράψτε την εξίσωση κίνησης για τη μάζα στα άκρα του  $j$ -οστού ελατηρίου για έναν παρατηρητή που επιβαίνει στο όχημα, ενόσω αυτό επιταχύνεται.
- (2) Στο μεσοδιάστημα που το όχημα κινείται ομαλά, διαφέρει η εξίσωση κίνησης του κάθε ταλαντωτή από αυτήν σε ένα ακίνητο όχημα; Σχολιάστε όσον αφορά στη μελέτη της κίνησης κάποιου από τους ταλαντωτές προκειμένου να διερευνήσουμε την κίνηση ή την ακινησία του οχήματος.
- (3) Δεδομένων των αρχικών συνθηκών (όλοι οι ταλαντωτές ακίνητοι στη θέση ισορροπίας τους όταν ξεκινά να επιταχύνει το όχημα) βρείτε ποια κίνηση θα εκτελέσει ο  $j$ -οστός ταλαντωτής κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσης.
- (4) Θεωρώντας το τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης ως αρχή για την επόμενη κίνηση (την ομαλή) βρείτε την κίνηση που θα εκτελέσει ο  $j$ -οστός ταλαντωτής στη συνέχεια. Βρείτε τη συνθήκη μεταξύ  $m, j, k, T$  ώστε ο  $j$ -οστός αρμονικός ταλαντωτής να μην κινείται καθόλου σε αυτό το διάστημα.
- (5) Διερευνήστε ποια θα είναι η κίνηση του συγκεκριμένου αυτού ταλαντωτή (για τον οποίο ισχύει η συνθήκη που βρήκατε στο ερώτημα (4)) μετά το τέλος της κίνησης του οχήματος (το σταμάτημα αυτού). Βρείτε το συνολικό διάστημα  $L$  που διήνυσε το όχημα στο συνολικό χρόνο  $3T$  αν γνωρίζετε το συνολικό εύρος κίνησης του συγκεκριμένου ταλαντωτή  $\Delta x_{\max}$  (την απόσταση μεταξύ των πιο ακραίων θέσεων επί του οχήματος που κατέλαβε ο εν λόγω ταλαντωτής). Είναι μονοσήμαντη η απάντησή σας; Εξηγήστε ποιοτικά.

*Καλή σας επιτυχία*