ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

21 Φεβρουαρίου 2012

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Όλα τα ερωτήματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Ένα πλήθος N σωματιδίων με μάζες m_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις νευτώνειου τύπου, χωρίς να δέχονται καμία άλλη εξωτερική (εκτός του συστήματος των σωματιδίων) δύναμη.

1. Δείξτε ότι το διάνυσμα
$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$
που έχει διαστάσεις μήκους, ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης ενός ελεύθερου σωματιδίου ($\mathbf{r}_i$ είναι οι θέσεις των σωματιδίων, όπως αυτές μετριούνται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς).

2. Ορίζοντας τα διανύσματα θέσης του κάθε σωματιδίου ως προς τη θέση $\mathbf{R}$ ως $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, υπολογίστε την ποσότητα
$$\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i'}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$
Υπολογίστε επίσης τη συνολική ορμή του συστήματος ως προς το σημείο $\mathbf{R}$ δηλαδή την ποσότητα
$$\mathbf{P}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt}.$$

3. Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ της συνολικής στροφορμής των σωματιδίων, όπως αυτή υπολογίζεται ως προς την αρχή των αξόνων του αδρανειακού συστήματος, και αυτής ως προς το σημείο που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$.

4. Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ της συνολικής κινητικής ενέργειας των σωματιδίων όπως αυτή υπολογίζεται ως προς την αρχή των αξόνων του αδρανειακού συστήματος και αυτής ως προς το σημείο που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$.

5. Τώρα παρατηρούμε τα σωματίδια από ένα μη αδρανειακό σύστημα που έχει τους άξονές του παράλληλους με αυτούς τουτ αδρανειακού και η αρχή του οποίου κινείται σε σχέση με αυτήν του αδρανειακού ακολουθώντας την προκαθορισμένη χρονοεξαρτημένη διαδρομή $\mathbf{r_0}(t)$. Να βρεθεί η σχέση της ολικής στροφορμής του συστήματος ως προς το μη αδρανειακό σύστημα με αυτήν ως προς το αδρανειακό σύστημα, αν στο αρχικό αδρανειακό σύστημα ήταν $\mathbf{R} = 0$ και για την κίνηση του μη αδρανειακού συστήματος ίσχυε ότι $\mathbf{r_0}(t) = f(t)\hat{\mathbf{n}}$ όπου $\hat{\mathbf{n}}$ κάποιο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα και $f(t)$ τυχαία συνάρτηση. Δικαιολογήστε το αποτέλεσμά σας.

ΘΕΜΑ Β Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, όπου $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{z}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι: $\mathbf{r}(t)$.

1. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι από αυτήν προκύπτει ότι:

$$\dot{\mathbf{r}} - \omega \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}$$

όπου το $\mathbf{c}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα και ω μία σταθερά, την οποία θα πρέπει να προσδιορίσετε.

2. Προσδίοριστε τη σταθερά $\mathbf{c}$ για τις αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{r}(0) = a\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = v\hat{\mathbf{y}}$$

3. Για αυτές τις αρχικές συνθήκες γράψτε τις αντίστοιχες εξισώσεις εξέλιξης των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων.

4. Προσδιορίστε τώρα τη χρονική εξέλιξη κατά σειρά: πρώτα της z, έπειτα της y και τέλος της x συντεταγμένης.

5. Για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες προσδιορίστε και σχεδιάστε την τροχιά όταν είναι $v = -a\omega$ καθώς και όταν $v \neq -a\omega$.

ΘΕΜΑ Γ Σωματίδιο μάζας m κινείται στον τριδιάστατο χώρο υπό την επίδραση δυναμικού $V(\mathbf{r})$.

1. Εξηγήστε τι εννοούμε όταν λέμε ότι στο σωματίδιο ασκείται μία κεντρική ισοτροπική (ανεξάρτητη της διεύθυνσης) δύναμη και δείξτε ότι αν το δυναμικό είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου της θέσης του σωματιδίου $|\mathbf{r}|$ η δύναμη είναι πράγματι τέτοια. Δείξτε ακόμη ότι σε αυτή την περίπτωση η κίνηση περιορίζεται σε ένα επίπεδο.

Θεωρούμε τώρα 4 μάζες M που βρίσκονται καρφωμένες στις κορυφές ενός τετραγώνου και συγκεκριμένα στα σημεία με καρτεσιανές συντεταγμένες $(\pm a, \pm a)$ (η τρίτη συντεταγμένη θα είναι πάντα 0 και δεν θα την αναφέρουμε πλέον). Θα εξετάσουμε τώρα την κίνηση σωματιδίου μάζας m στο επίπεδο του τετραγώνου υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου των 4 μαζών. Η θέση του σωματιδίου προσδιορίζεται από δύο συντεταγμένες (x, y).

2. Γράψτε τη δυναμική ενέργεια $V(x, y)$ του σωματίδιου στη θέση (x, y) λόγω του βαρυτικού πεδίου μίας μόνο μάζας M που βρίσκεται στο σημείο $(\epsilon a, \eta a)$, όπου ϵ, η αναπαριστούν αριθμούς με τιμή ± 1.

3. Δεδομένου ότι το ανάπτυγμα της παραπάνω δυναμικής ενέργειας για x, y κοντά στην αρχή των αξόνων $(0, 0)$ μέχρι σε δεύτερη τάξη ως προς x, y είναι:

$$V(x, y) = -\frac{GmM}{a\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\epsilon x + \eta y}{2a} + \frac{1}{8a^2}(x^2 + y^2 + 6\epsilon\eta xy) \right) ,$$

υπολογίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σωματιδίου $V(x, y)$ λόγω του βαρυτικού πεδίου και των τεσσάρων μαζών που βρίσκονται στις κορυφές του τετραγώνου χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα.

4. Γράψτε το διάνυσμα της δύναμης και ελέγξτε αν είναι ισοτροπική και κεντρική;

5. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι η γενική λύση είναι της μορφής:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cosh \omega t + \mathbf{b} \sinh \omega t \ ,$$

   και προσδιορίστε τη σταθερά ω και τα διανύσματα **a** και **b** συναρτήσει του αρχικού διανύσματος θέσης και του αρχικού διανύσματος της ταχύτητας. Από τη λύση αυτή τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$;

6. Από τη μορφή της λύσης δείξτε ότι διατηρείται η στροφορμή. Δείξτε επίσης ότι για χρόνους $t >> 1/\omega$ η τροχιά είναι κατά προσέγγιση μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Προσδιορίστε αυτή την ασύμπτωτη ευθεία. Είναι η κίνηση επί αυτής της ευθείας συμβατή με τη διατήρηση της στροφορμής;