ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

16 Φεβρουαρίου, 2011

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται εντός του βαρυτικού πεδίου μιας σημειακής μάζας M η οποία βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και είναι ακλόνητη.

1. Γράψτε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο σε διανυσματική μορφή εξηγώντας όλους τους όρους,
2. Εξηγήστε γιατί η κίνηση του σωματιδίου θα είναι επίπεδη.
3. Αν $\hat{r}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα που συνδέεται με τη θέση του σωματιδίου, $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{v}$ η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου, δείξτε ότι το διάνυσμα
$$\vec{A} = \vec{l} \times \vec{v} + GM\hat{r}$$
διατηρείται, δηλαδή παραμένει σταθερό κατά την κίνηση του σωματιδίου.
4. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ με το $\vec{A}$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot \vec{l}$. Στη συνέχεια, γράψτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}||\vec{r}| \cos\theta$, και λύστε τη σχέση (του εσωτερικού γινομένου) ως προς $r = |\vec{r}|$.
5. Έχετε κατασκευάσει κατ' ουσίαν την πολική εξίσωση μιας κωνικής τομής (δείξτε το). Μπορείτε τώρα να ερμηνεύσετε τη φυσική σημασία του μέτρου του $\vec{A}$; Συγκεκριμένα μπορείτε να προβλέψετε την τιμή του αν η τροχιά του σωματιδίου είναι κυκλική; Για να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμά σας επιλέξτε κατάλληλες αρχικές συνθήκες ώστε να έχετε μια κυκλική τροχιά και εισάγετε αυτές στον ορισμό του $\vec{A}$ (ερώτημα 3). Τι τιμή παίρνετε για το $|\vec{A}|$;

Πρόβλημα Β Θέλετε να υπολογίσετε την έλξη που θα σας ασκούσε ένας πλανήτης αν είχε τη μορφή τετράγωνης ομογενούς λεπτής πλάκας πλευράς a και μάζας M και εσείς βρισκόσαστε σε απόσταση z πάνω από το κέντρο του. Λόγω του σχήματός του (δεν έχει αξονική συμμετρία) ο υπολογισμός της δύναμης είναι δύσκολος γι΄ αυτό αποφασίζετε να καταφύγετε στον υπολογισμό για ένα σχήμα που είναι πιο εύκολο, αυτό ενός κυκλικού λεπτού δίσκου ίδιας επιφανειακής πυκνότητας με τον πλανήτη προκειμένου να βρείτε μια προσεγγιστική απάντηση για τον τετράγωνο πλανήτη.

1. Υπολογίστε το βαρυτικό δυναμικό πάνω στον άξονα συμμετρίας και σε απόσταση d από το κέντρο ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R, απειροστού πάχους και επιφανειακής πυκνότητας σ.
2. Από το δυναμικό που βρήκατε υπολογίστε την ένταση του πεδίου βαρύτητας πάνω στον άξονα συμμετρίας του δίσκου και σε απόσταση z από το κέντρο του.
3. Εξηγήστε με επιχειρήματα γιατί η ένταση του πεδίου βαρύτητας πάνω στον άξονα συμμετρίας μιας τετράγωνης πλάκας είναι μικρότερη από αυτήν εξαιτίας ενός κυκλικού δίσκου περιγεγραμμένου στο τετράγωνο και μεγαλύτερη από αυτήν εξαιτίας ενός κυκλικού δίσκου εγγεγραμμένου στο τετράγωνο, εφόσον όλες οι πλάκες έχουν το ίδιο αμελητέο πάχος και την ίδια επιφανειακή πυκνότητα μάζας.
4. Με βάση την παραπάνω πρόταση βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας στον άξονα συμμετρίας της τετράγωνης πλάκας.

5. Αν μια σημειακή μάζα m βρεθεί σε απόσταση $z = a/10$ πάνω από την τετράγωνη πλάκα και επί του άξονα συμμετρίας αυτής, υπολογίστε αυτά τα δύο όρια των ελκτικών δυνάμεων από τους κυκλικούς δίσκους και από αυτά το σχετικό σφάλμα αβεβαιότητας εκτίμησης της βαρυτικής έλξης για την τετράγωνη πλάκα. [Δίνονται $1/\sqrt{51} \simeq 0.14, 1/\sqrt{26} \simeq 0.20$.]

Πρόβλημα Γ Ένας κομήτης μάζας m ο οποίος θεωρούμε ότι ξεκίνησε από άπειρη απόσταση με μηδενική ταχύτητα πέφτει πάνω στη Γη ακτινικά και εισχωρεί μέσα σε αυτήν. (Η μάζα της Γης είναι τεράστια σε σχέση με αυτή του κομήτη.) Θεωρώντας τη Γη ως μια ομογενή σφαίρα μάζας M και ακτίνας R:

1. Υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη που θα ασκείται στον κομήτη καθώς αυτός θα βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης σε απόσταση r από το κέντρο της.

2. Αν στον κομήτη δεν ασκείται άλλη δύναμη εκτός της βαρυτικής (ακόμη και όταν κινείται στο εσωτερικό της Γης) περιγράψτε ολόκληρη την κίνησή του (απ' όταν βρισκόταν σε άπειρη απόσταση μακριά από τη Γη) και σχεδιάστε ποιοτικά τη θέση του ως συνάρτηση του χρόνου. Πότε θα έχει ο κομήτης τη μέγιστη ταχύτητά του;

3. Στην πραγματικότητα καθώς ο κομήτης εισχωρεί στη Γη δέχεται μια δύναμη αντίστασης (δηλαδή με φορά αντίστροφη της ταχύτητας) σταθερού μέτρου. Ως συνέπεια ο κομήτης αφού διαπεράσει όλη τη Γη φθάνει μόλις μέχρι τον αντίποδα του σημείου πρόσκρουσής του στη Γη με ταχύτητα 0. Να γραφεί η συνάρτηση που περιγράφει την κίνησή μέσα στη Γη ως συνάρτηση του χρόνου ($t = 0$ αντιστοιχεί στη στιγμή της πρόσκρουσης στην επιφάνεια της Γης) και να τεθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες σύμφωνα με τα δεδομένα του ερωτήματος.

4. Λύστε το σύστημα των εξισώσεων ώστε να προσδιορίσετε τη δύναμη της αντίστασης.

5. Τη στιγμή που φθάνει ο κομήτης με ταχύτητα 0 στον αντίποδα του σημείου πρόσκρουσης ένας ακριβώς **ίδιος** κομήτης πέφτει πάνω του κινούμενος σε αντίθετη κατεύθυνση με τον πρώτο και ο οποίος ξεκίνησε με τις ίδιες αρχικές συνθήκες με τον πρώτο. Αν η σύγκρουση είναι **ελαστική** θα καταφέρει ο πρώτος κομήτης να βγει από τη Γη;

Πρόβλημα Δ Στο μονοδιάστατο δυναμικό (διαστάσεις ενέργειας)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ \lambda x & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$$

βάλλονται σωματίδια μάζας m από κάποια θέση $x_0 < 0$ με διάφορες ταχύτητες (θετικού προσήμου). Εκτελούμε πειράματα παρατηρώντας πόσο χρόνο χρειάζονται τα σωματίδια για να επιστρέψουν στο σημείο εκκίνησης.

1. Βρείτε το απώτατο x ($x = \max$) στο οποίο φθάνει ένα σωματίδιο αν ξεκινήσει με αρχική ταχύτητα v_0 από το σημείο εκκίνησης x_0.

2. Πόσο χρόνο χρειάζεται το σωματίδιο από την αρχή της κίνησής του για να φθάσει για πρώτη φορά μέχρι το $x = 0$; Στη συνέχεια άλλο πόσο χρόνο χρειάζεται για να φθάσει στο απώτερο σημείο; Πόσος είναι ο συνολικός χρόνος μέχρι να επιστρέψει το σωματίδιο στο σημείο εκκίνησης;

3. Υπάρχει κάποια αρχική ταχύτητα σωματιδίων v_0 για την οποία τα σωματίδια να επιστρέφουν στο σημείο εκκίνησης στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;

4. Ποια σχέση μεταξύ δύο διαφορετικών αρχικών ταχυτήτων δύο σωματιδίων που ξεκινούν ταυτόχρονα, καθιστά εφικτή την ταυτόχρονη άφιξη των δύο σωματιδίων;

5. Αν το δυναμικό ήταν της μορφής λx^n για $x \geq 0$ (αντί του λx) σε τι συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε για τον εκθέτη n, αν παρατηρούσαμε ότι υπάρχει μια πεπερασμένη αρχική ταχύτητα σωματιδίων για την οποία συμβαίνει η συντομότερη επιστροφή του σωματιδίου στο σημείο εκκίνησης;

ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα Α

1.
$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

2.
$$\dot{\vec{l}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{u}) = \vec{r}\times\dot{\vec{u}} = \vec{r}\times(-\frac{GM}{r^2}\hat{r}) = 0$$

επομένως το διάνυσμα αυτό που είναι κάθετο στη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου διατηρείται. Συνεπώς η τροχιά θα εξελίσσεται στο επίπεδο το κάθετο στο διατηρούμενο αυτό διάνυσμα.

3.
$$\dot{\vec{A}} = \vec{l}\times\dot{\vec{u}} + GM\dot{\hat{r}} = \tag{1}$$
$$r^2\dot{\theta}(\hat{r}\times\hat{\theta})\times(-\frac{GM}{r^2}\hat{r}) + GM\dot{\theta}\hat{\theta} = \tag{2}$$
$$GM\dot{\theta}(-\hat{\theta}+\hat{\theta}) = 0 \tag{3}$$

4.
$$\vec{A}\cdot\vec{r} = (\vec{l}\times\vec{u})\cdot\vec{r} + GMr = \tag{4}$$
$$(\vec{u}\times\vec{r})\cdot\vec{l} + GMr = -l^2 + GMr \Rightarrow \tag{5}$$
$$r = \frac{l^2}{GM - |\vec{A}|\cos\theta} \tag{6}$$

5. Η παραπάνω είναι η πολική εξίσωση μιας κωνικής τομής με $p = l^2/(GM)$ και εκκεντρότητα $|\vec{A}|/(GM)$ (το πλην πρόσημο δεν αλλάζει τη μορφή της πολικής εξίσωσης απλώς αλλάζει τη διεύθυνση στην οποία έχουμε ελάχιστο r). Γνωρίζουμε ότι η κυκλική τροχιά αντιστοιχεί σε $e = 0$ οπότε θα είναι και $\vec{A} = 0$.

   Κυκλική τροχιά θα είχαμε αν $\vec{r}(0) = r_0\hat{x}$ και $\vec{u}(0) = u_0\hat{y}$ με $u_0^2/r_0 = GM/r_0^2$, δηλαδή $u_0^2 = GM/r_0$. Με τις αρχικές αυτές συνθήκες το διατηρούμενο διάνυσμα $\vec{A}$ (είναι γνωστό ως διάνυσμα Runge-Lenz-Laplace με ανάποδο πρόσημο) είναι

$$\vec{A} = (\vec{r}(0)\times\vec{u}(0))\times\vec{u}(0) + GM\hat{x} = \tag{7}$$
$$r_0u_0^2(-\hat{x}) + GM\hat{x} = \tag{8}$$
$$GM(-\hat{x}+\hat{x}) = 0. \tag{9}$$

   Επιβεβαιώθηκε ο ισχυρισμός μας περί μηδενισμού του $\vec{A}$ στην περίπτωση κυκλικής τροχιάς.

Πρόβλημα Β

1. Διαχωρίζοντας τον κυκλικό δίσκο σε ομόκεντρους δακτυλίους

$$\Phi = -G\int\frac{dm}{\sqrt{z^2+r^2}} = -G\sigma\int_0^R\frac{2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = -G\sigma\pi\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -2G\sigma\pi(\sqrt{z^2+R^2}-z)$$

2.
$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = \hat{z}2G\sigma\pi\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-1\right)$$

3. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι "μύτες" της τετράγωνης πλάκας που περισσεύουν από τον εγγεγραμένο στο τετράγωνο κυκλικό δίσκο θα ασκούν μια επιπρόσθετη προς τα κάτω επιτάχυνση της βαρύτητας (λόγω συμμετρίας θα έχει διεύθυνση προς τα κάτω), Για τον ίδιο λόγω τα τόξα του περιγεγραμμένου κυκλικού δίσκου που περισσεύουν από το τετράγωνο θα ασκούν μια επιπρόσθετη προς τα κάτω επιτάχυνση της βαρύτητας.

   Θα είναι λοιπόν

$$|g_{\text{περιγ}}| = |g(R = a/\sqrt{2})| > |g_{\text{τετρ}}| > |g(R = a/2)| = |g_{\text{εγγεγ}}|.$$

4. Θα έχουμε

$$2G\sigma\pi(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2/2}}) > |g_{\text{τετρ}}| > 2G\sigma\pi(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + (a/2)^2}}).$$

5. Θέτοντας $z = a/10$ βρίσκουμε

$$2G\sigma\pi(1 - 0.14) > |g_{\text{τετρ}}| > 2G\sigma\pi(1 - 0.20)$$

   δηλαδή

$$0.86 > \frac{|g_{\text{τετρ}}|}{2G\sigma\pi} > 0.80.$$

   Το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό μας αν διαλέξουμε μια αριθμητική τιμή μεταξύ 0.80 και 0.86 δεν υπερβαίνει το 6/80 δηλαδή το 7.5%.

Πρόβλημα Γ

1.

$$\vec{F} = -\frac{GM(r)m}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMr^3m}{R^3r^2}\hat{r} = -\frac{GMrm}{R^3}\hat{r} = -\frac{GMm}{R^3}\vec{r}.$$

2. Ερχόμενος από το άπειρο ο κομήτης επιταχύνεται ολοένα και περισσότερο πλησιάζοντας τη Γη. Απ' όταν όμως εισχωρήσει στη Γη θα εκτελέσει κομμάτι αρμονικής ταλάντωσης με αρχική ταχύτητα. Στη συνέχεια εξερχόμενος από τη Γη (με την ίδια ταχύτητα με την οποία μπήκε) θα αρχίσει να επιβραδύνει φτάνοντας μέχρι το άπειρο με ταχύτητα 0. Η επιβράδυνση αρχίζει μόλις περάσει το κέντρο της Γης, οπότε τότε θα έχει και τη μέγιστη ταχύτητα.

3. Η κίνηση στο εσωτερικό της Γης θα ακολουθεί την εξίσωση (μονοδιάστατη κίνηση)

$$m\ddot{r} = -\frac{GMmr}{R^3} - F_0$$

   με λύση

$$r(t) = C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t) - F_0/(m\omega^2)$$

   όπου $\omega = \sqrt{GM/R^3}$. Τα δεδομένα είναι $r(0) = -R, \dot{r}(0) = \sqrt{GM/R} = \omega R, r(T) = R, \dot{r}(T) = 0$ που μεταφράζονται στις ακόλουθες σχέσεις

$$C - F_0/(m\omega^2) = -R \tag{10}$$
$$S\omega = \omega R \tag{11}$$
$$C\cos(\omega T) + S\sin(\omega T) - F_0/(m\omega^2) = R \tag{12}$$
$$\omega(-C\sin(\omega T) + S\cos(\omega T)) = 0 \tag{13}$$

4. Λύνοντας το σύστημα έχουμε $S = R$, από άθροιση τετραγώνων των 2 τελευταίων $C^2 + S^2 = [R + F_0/(m\omega^2)]^2$, $C = -R + F_0/(m\omega^2)$. Συνεπώς

$$C^2 = [R + F_0/(m\omega^2)]^2 - R^2 = [-R + F_0/(m\omega^2)]^2.$$

   Λύνοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε $F_0/(m\omega^2) = R/4$ δηλαδή $F_0 = m\omega^2R/4$.

5. Μετά το χτύπημα ο κομήτης θα βρεθεί στην κατάσταση όπως όταν πρωτοπροσέκρουσε στη Γη (ανταλλαγή ταχυτήτων κατά την ελαστική κρούση), οπότε μόλις που θα καταφέρει να φτάσει στο αντίθετο άκρο (το σημείο πρόσκρουσης) με ταχύτητα 0.

Πρόβλημα Δ Στο μονοδιάστατο δυναμικό (διαστάσεις ενέργειας)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ \lambda x & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$$

βάλλονται σωματίδια μάζας m από κάποια θέση $x_0 < 0$ με διάφορες ταχύτητες (θετικού προσήμου). Εκτελούμε πειράματα παρατηρώντας πόσο χρόνο χρειάζονται τα σωματίδια για να επιστρέψουν στο σημείο εκκίνησης.

1. Προφανώς θα πρέπει $\lambda > 0$ γιατί αλλιώς δεν θα έφτανε το σωματίδιο σε κάποιο σημείο και θα γύριζε. Το απώτατο σημείο θα είναι αυτό στο οποίο θα μηδενίζεται η ταχύτητα, δηλαδή

$$E = V(x_{\text{max}}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \lambda x_{\text{max}} \Rightarrow x_{\text{max}} = \frac{mv_0^2}{2\lambda}.$$

2.

$$t_1 = \frac{|x_0|}{v_0},$$
$$t_2 = \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{v} = \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}} \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{\sqrt{x_{\text{max}} - x}} = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}}\sqrt{x_{\text{max}}} = \frac{mv_0}{\lambda},$$
$$t_{\text{ολ}} = 2(t_1 + t_2) = 2\left(\frac{|x_0|}{v_0} + \frac{mv_0}{\lambda}\right)$$

Το 2 οφείλεται στο ότι η ταχύτητα σε κάθε σημείο είναι ίδια κατά μέτρο, είτε όταν προχωράει προς τα θετικά x είτε προς τα αρνητικά.

3.

$$\frac{dt_{\text{ολ}}}{dv_0} = 0 \Rightarrow -\frac{|x_0|}{v_0^2} + \frac{m}{\lambda} = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{|x_0|\lambda}{m}}$$

Αυτό είναι σίγουρα ελάχιστο αφού για $v_0 \to \infty$ και για $v_0 \to 0$, $t_{\text{ολ}} \to \infty$.

4. Θέτωντας $t_{\text{ολ}1} = t_{\text{ολ}2}$ παίρνουμε

$$\frac{|x_0|}{v_{01}} + \frac{mv_{01}}{\lambda} = \frac{|x_0|}{v_{02}} + \frac{mv_{02}}{\lambda} \Rightarrow \tag{14}$$
$$(v_{01} - v_{02})\left(\frac{m}{\lambda} - \frac{|x_0|}{v_{01}v_{02}}\right) = 0 \Rightarrow \tag{15}$$
$$v_{01}v_{02} = \frac{\lambda|x_0|}{m}. \tag{16}$$

5. Ο χρόνος κίνησης εντός του μεταβαλλόμενου δυναμικού θα είναι

$$t_2 = \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{v} = \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $t_2 \propto E^{1/n-1/2} \propto v_0^{2/n-1}$. Για να έχει η έκφραση του συνολικού χρόνου ελάχιστη τιμή ως προς v_0 θα πρέπει t_2 να είναι ανάλογο του v_0 σε κάποια θετική δύναμη. Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι για να υπάρχει ελάχιστος χρόνος θα πρέπει $n < 2$.

Σχόλιο στο Πρόβλημα Γ4 Αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα του δυναμικού εντός της Γης θα είναι αυτό ενός αρμονικού ταλαντωτή με $V(r) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Η αρχική ενέργεια του κομήτη όταν πρωτοεισέρχεται στη Γη στο $r = -R$ είναι όση η δυναμική του ταλαντωτή συν την κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$. Καθώς κινείται εντός της Γης χάνει ενέργεια από μια σταθερή δύναμη επομένως η ενέργεια πέφτει με σταθερή κλίση ως προς r (η δύναμη είναι η κλίση). Φτάνοντας ο κομήτης στον αντίποδα έχει μόνο δυναμική αλλά καθόλου κινητική ενέργεια. Επομένως η κλίση πτώσης της ενέργειας είναι $(\frac{1}{2}m\omega^2 R^2)/(2R)$. Συνεπώς

$$F_0 = \frac{m\omega^2}{4R}.$$

Αυτός είναι ένας γρήγορος τρόπος απάντησης του προβλήματος χωρίς να λύσει κανείς κανένα σύστημα εξισώσεων.

Σχόλιο στο Πρόβλημα Δ5 Γνωρίζουμε ότι για τον αρμονικό ταλαντωτή η περίοδος (και άρα και η ημιπερίοδος) είναι ανεξάρτητη της ενέργειας. Επομένως ο χρόνος αναστροφής στο δυναμικό θα ήταν ίδιος για όλα τα σωματίδια αν $n = 2$ και δεν επρόκειτο ποτέ να επιστρέψει ένα πιο αργό σωματίδιο στον ίδιο χρόνο με ένα πιο γρήγορο. Για $n = 1$ όμως συμβαίνει αυτό. Επόμενως υπάρχει μια πρώτη υποψία ότι πιθανώς αυτό να συμβαίνει για $n < 2$.