ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

22 Φεβρουαρίου 2010

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 2 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (5 μονάδες)

Ένα σημειακό σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B\hat{z}$ και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E} = E\hat{y}$.
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο σε διανυσματική μορφή και στη συνέχεια, αναλύοντας τη θέση τού σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου όσον αφορά στις τρεις αυτές συντεταγμένες.
(β) Σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο της διανυσματικής εξίσωσης κίνησης με το $\vec{B}$ δείξτε ότι αν αρχικά το σωματίδιο κινούνταν κάθετα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, το σωματίδιο θα βρίσκεται πάντα σε αυτό το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο επίπεδο.
(γ) Λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση του (α) δείξτε ότι αν $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ το σωματίδιο θα κείται συνεχώς στο επίπεδο $z(t) = 0$ σε συμφωνία με το ερώτημα (β).
(δ) Ορίστε τη μιγαδική μεταβλητή

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{x}(t) + \imath\dot{y}(t),$$

όπου $\dot{s}$ σημαίνει ds/dt και με κατάλληλους πολλαπλασιασμούς συνδέστε τις δύο διαφορικές εξισώσεις του ερωτήματος (α) που αφορούν στις συντεταγμένες $x(t)$, $y(t)$ σε μια εξίσωση πρώτης τάξης ως προς $\dot{\zeta}$. Λύστε τυπικά αυτήν την εξίσωση, όπως μάθαμε να λύνουμε τις γραμμικές ομογενείς εξισώσεις, αγνοώντας το γεγονός ότι είναι μιγαδική, και βρείτε και μια ειδική λύση. [Υποδ: Η εύρεση της τελευταίας είναι εύκολη αφού το μη ομογενές κομμάτι της διαφορικής εξίσωσης είναι απλώς μια σταθερά.]
(ε) Ολοκληρώστε τη λύση που βρήκατε για το $\dot{\zeta}(t)$ για να υπολογίσετε την $\zeta(t)$.
(στ) Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ και $\dot{x}(0) = v_0$ και μέσω αυτών καθορίστε τις σταθερές στη γενική λύση που βρήκατε στο ερώτημα (δ). [Υποδ: Προσοχή οι σταθερές που ανακύπτουν στη λύση μιας μιγαδικής διαφορικής εξίσωσης είναι εν γένει μιγαδικές.]
(ζ) Δείξτε ότι κάθε στιγμή t η απόσταση του σωματιδίου από το σημείο

$$x_K(t) = \frac{Et}{B}\ ,\ y_K(t) = -\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\frac{1}{\omega}$$

είναι σταθερή, όπου $\omega = qB/m$. Περιγράψτε ποιοτικά, βάσει του αποτελέσματος αυτού, την τροχιά. Προς τα πού μετατοπίζεται τελικά το σωματίδιο;

ΘΕΜΑ Β (5 μονάδες)

Ένας δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Αγνοήστε τη βαρυτική επίδραση οποιουδήποτε άλλου σώματος εκτός της Γης.
(α) Αν ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής του δορυφόρου γύρω από τη Γη είναι T υπολογίστε τη μάζα της Γης;
(β) Υπολογίστε το ενεργό δυναμικό που διέπει την ακτινική κίνηση στο βαρυτικό πεδίο και δείξτε ότι, για δεδομένη στροφορμή ανά μονάδα μάζας, η τιμή του ενεργού δυναμικού ανά μονάδα μάζας του δορυφόρου που κινείται σε κυκλική τροχιά είναι η ελάχιστη δυνατή.

(γ) Ξαφνικά μια βίδα εκτινάσσεται από το διαστημόπλοιο με διεύθυνση (ως προς το διαστημόπλοιο) κάθετα στην ταχύτητα κίνησής του με φορά προς τα έξω και μέτρο v (ως προς το διαστημόπλοιο) πολύ μικρότερο από την ταχύτητα του διαστημοπλοίου ($v << 2\pi R/T$). Συγκρίνατε τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας της βίδας με αυτή του διαστημοπλοίου. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας της βίδας από αυτή του διαστημοπλοίου; Από τις απαντήσεις σας και το ερώτημα (β) περιγράψτε ποιοτικά τι είδους ακτινική κίνηση θα εκτελέσει η βίδα.
(δ) Τι είδους τροχιά θα εκτελέσει η βίδα γύρω από τη Γη;
(ε) Αποδείξτε ότι η ακτινική θέση $r(t)$ της βίδας ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(\dot{r})^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}(r-R)^2 = v^2$$

για πολύ μικρές τιμές της v. [Υπόδ: Χρειάζεται να αναπτύξετε το ενεργό δυναμικό σε μια περιοχή γύρω από τον πυθμένα του.]
(στ) Από τη μορφή της εξίσωσης αυτής και τις δεδομένες αρχικές συνθήκες για τη βίδα μπορείτε να κατασκευάσετε τη λύση $r(t)$;
(ζ) Προκειμένου να υπολογίσουμε σε ποια θέση θα βρίσκεται η βίδα ως προς το διαστημόπλοιο θα υπολογίσουμε στη συνέχεια τις γωνιακές μετατοπίσεις των δύο σωμάτων (διαστημοπλοίου και βίδας) κατά την περιστροφή τους γύρω από τη Γη. Ως γνωστό η περιστροφή ενός σώματος σε ένα κεντρικό πεδίο θα είναι

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta} dt = \int_0^t \frac{\tilde{L}}{r^2} dt$$

όπου $\tilde{L}$ η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σώματος. Υπολογίστε τη διαφορά των γωνιακών θέσεων $\delta\theta(t)$ των δύο σωμάτων γράφοντας το $r(t)$ για τη βίδα ως $R+\epsilon(t)$ και κρατώντας στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς $\epsilon(t)$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια του σχήματος υπολογίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x(t) = r(t)\sin(\delta\theta(t)) \;,\; y(t) = r(t)\cos(\delta\theta(t)) - R$$

της βίδας ως προς το διαστημόπλοιο (αρχή των αξόνων) κρατώντας στους υπολογισμούς σας και στα $\cos(\delta\theta(t))$, $\sin(\delta\theta(t))$ μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς $\epsilon(t)$ το οποίο με τη σειρά του είναι ανάλογο του v. Ποια είναι η τροχιά που διαγράφει η βίδα ως προς το διαστημόπλοιο εκπεφρασμένη στις καρτεσιανές συνεταγμένες $x-y$;