ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις επί Πτυχίω στη Μηχανική Ι

23 Φεβρουαρίου 2009

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

*Απαντήστε **στα 3 από τα 4** Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.*

ΘΕΜΑ Α ΄Ενα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό της μορφής $V_n(x) = ax^{2n}$ όπου a κάποιος θετικός αριθμός και n κάποιος φυσικός αριθμός (1,2, ...).

1. Να βρεθούν τα όρια κίνησης του σωματιδίου, δεδομένης της ενέργειάς του.
2. Να υπολογιστεί η εξάρτηση της περιόδου από την ενέργεια. (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο).
3. Για ποια τιμή του n η ταλάντωση είναι ισόχρονη (ανεξάρτητη της ενέργειας);
4. Σχεδιάστε τις καμπύλες κίνησης στο χώρο των φάσεων για κάποια τιμή του n, και υπολογίστε τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες x και $\dot{x}$.
5. Δίδεται ότι ένα τέτοιο κλειστό χωρίο έχει εμβαδόν ανάλογο του μήκους του (διάσταση χωρίου κατά μήκους του x) επί του πλάτους του (διάσταση χωρίου κατά μήκους του $\dot{x}$). (Ο συντελεστής αναλογίας αν και εξαρτάται από την ακριβή μορφή της καμπύλης, δεν είναι άλλος από έναν απλό αριθμητικό παράγοντα.) Τώρα υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης παραγωγίζοντας το εμβαδόν του χωρίου ως προς την ενέργεια για να ξανακαταλήξετε στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (2).

ΘΕΜΑ Β

1. Υπολογίστε το βαρυτικό δυναμικό σε απόσταση r από μια σημειακή μάζα M, έτσι ώστε το δυναμικό να είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από αυτό.
2. ΄Ενα σωματίδιο, **αρχικά ακίνητο**, με μάζα m (με $m << M$) πέφτει από απόσταση R στο βαρυτικό πεδίο της ακλόνητης μάζας M. Ποια η ταχύτητα προσέγγισης του σωματιδίου προς την M, ως συνάρτηση της απόστασης r από αυτήν;
3. Σε πόσο χρόνο συνολικά το σωματίδιο θα συγκρουστεί με την M; [Δίδεται το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1/x)-1}} = \pi/2$, αλλά μπορείτε να το υπολογίσετε και εκμεταλλευόμενοι τον τρίτο νόμο του Κέπλερ.]
4. Τώρα υποθέστε ότι η μάζα M δεν είναι σημειακή αλλά πρόκειται για ένα ομογενές (σταθερής πυκνότητας) νέφος το οποίο σχηματίζει μια σφαίρα ακτίνας R. Υπολογίστε το νέο βαρυτικό δυναμικό, θέτοντας την τιμή του μηδέν στο κέντρο του σφαιρικού νέφους.
5. Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει ένα αρχικά ακίνητο σωματίδιο μάζας m (με $m << M$) από την επιφάνεια του σφαιρικού νέφους ($r = R$) στο κέντρο αυτού ($r = 0$).
6. Εξηγήστε γιατί θα περιμένατε ο δεύτερος χρόνος (ερώτημα 5) να προκύψει μεγαλύτερος από τον πρώτο χρόνο (ερώτημα 3).

ΘΕΜΑ Γ Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση ενός αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω_0 χωρίς απόσβεση. Στο σωματίδιο ασκείται εξωτερική δύναμη της μορφής:

$$F(t) = F_1 \cos(\omega t) + F_2 \cos(2\omega t) + F_3 \cos(3\omega t)$$

δηλαδή μια περιοδική δύναμη με τρεις αρμονικές τέτοιες ώστε $k\omega \neq \omega_0$ για κάθε $k = 1, 2, 3$.

1. Γράψτε την εξίσωση που διέπει την κίνηση του ταλαντωτή.
2. Γράψτε την ομογενή λύση αυτής.
3. Βρείτε μια ειδική λύση αυτής.
4. Αν το σωματίδιο είναι αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας του υπολογίστε την μετέπειτα κίνηση αυτού.
5. Αν κάποια από τις αρμονικές της δύναμης (π.χ. η k-οστή) έχει την ιδιότητα $k\omega = \omega_0$ (αυτό ισχύει και για το ακόλουθο ερώτημα), δείξτε ότι για μεγάλους χρόνους t το σωματίδιο θα κινείται με γραμμικά αυξανόμενο πλάτος.
6. Αν $F_1 = F_2 = F_3$ για ποια τιμή του k (για το οποίο ισχύει $k\omega = \omega_0$) έχουμε το μέγιστο ρυθμό αύξησης του πλάτους του ταλαντωτή;

[Για ευκολία δίδεται η τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t) = -2\sin(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t)\sin(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t)$$

η οποία όμως δεν χρειάζεται οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των ερωτημάτων.]

ΘΕΜΑ Δ

1. Να υπολογίσετε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται από ένα άπειρο επίπεδο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ σε μια σημειακή μάζα η οποία βρίσκεται σε απόσταση d από αυτή (είτε με απευθείας υπολογισμό της δύναμης, είτε μέσω του δυναμικού, είτε μέσω του θεωρήματος του Gauss).
2. Θεωρήστε τώρα δύο τέτοια ίδια επίπεδα τοποθετημένα κάθετα το ένα ως προς το άλλο. Υπολογίστε το συνολικό βαρυτικό πεδίο του συστήματος των δύο επιπέδων.
3. Είναι δυνατό η κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m εντός αυτού του βαρυτικού πεδίου να είναι κυκλική; Επιχειρηματολογήστε σχετικά.
4. Θέλουμε να βρούμε μια τροχιά η οποία να είναι κλειστή. Προς τούτο υπολογίστε την αρχική κάθετη ταχύτητα εκτόξευσης του σωματιδίου από το ένα επίπεδο σε απόσταση x_0 από την ευθεία τομής των δύο επιπέδων ώστε όταν το σωματίδιο “χτυπήσει” το δεύτερο επίπεδο να έχει ταχύτητα κάθετη σε αυτό. Ποια η απόσταση τότε του σωματιδίου από την ευθεία τομής των επιπέδων;
5. Πώς θα συνεχίσει να κινείται το σωματίδιο όταν περάσει από την πίσω μεριά του δεύτερου επιπέδου; Συμπληρώστε την τροχιά του συνολικά και δείξτε ότι θα είναι κλειστή. Τι μορφή έχουν τα τέσσερα κομμάτια της τροχιάς στο καθένα από τα 4 τεταρτημόρια που δημιουργούνται μεταξύ των επιπέδων;
6. Εξηγήστε γιατί θα περιμένετε στη γενική περίπτωση η τροχιά του σωματιδίου να μην είναι κλειστή;

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α Βλ. Πρόοδο 2008 - Λύσεις.

ΘΕΜΑ Β

1. Με ολοκλήρωση της δύναμης βρίσκουμε $V(r) = -GM/r|_{\infty}^{R} = -GM/R$.

2. Από διατήρηση ενέργειας $-GM/R = v^2/2 - GM/r$. Οπότε
$$v = -\sqrt{\frac{2GM}{R}(R/r-1)} = \frac{dr}{dt}, \tag{1}$$
το (-) λόγω της πτώσης στο κεντρικό σώμα.

3. $$T_{\pi\tau} = -\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{R}(R/r-1)}} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1/x-1}} = (\pi/2)\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}. \tag{2}$$

4. Η δύναμη είναι $F = -GmM(r)/r^2 = -Gm(M/R^3)r$. Επομένως το δυναμικό είναι
$$V(r) = -(1/m)\int_0^r F(r')dr' = \frac{GM}{2R^3}r^2. \tag{3}$$

5. Η δύναμη είναι αρμονικού ταλαντωτή επομένως η πτώση θα διαρκέσει όσο το (1/4) της περιόδου δηλαδή
$$T'_{\pi\tau} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = (\pi/2)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \tag{4}$$

6. Ο πρώτος χρόνος πτώσης είναι $1/\sqrt{2}$ του δεύτερου. Η πρώτη πτώση είναι γρηγορότερη αφού η ελκτική δύναμη είναι πάντα μεγαλύτερη (όλη η μάζα συμμετέχει στην έλξη).

ΘΕΜΑ Γ Βλ. Πρόοδο 2008 - Λύσεις.

ΘΕΜΑ Δ

1. Από το θεώρημα Gauss
$$\int \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\pi\varepsilon\rho} \tag{5}$$
θα έχουμε για έναν κύλιδρο διατομής S που τέμνει το επίπεδο έτσι ώστε να είναι μίσο επάνω και μισό κάτω από το επίπεδο $gS + gS = -4\pi G\sigma S$, οπότε $\vec{g} = \mp 2\pi G\sigma\hat{z}$ (τα πρόσημα αντιστοιχούν στο πάνω και κάτω μέρος του επιπέδου και ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο).

2. Το βαρυτικό πεδίο θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο πεδίων, επομένως θα σχηματίζει γωνία 45° με τα επίπεδα με φορά προς την τομή των επιπέδων.

3. Αφού το πεδίο είναι ομογενές σε κάθε περιοχή ανάμεσα στα επίπεδα, η τροχιά είναι παραβολική και όχι κυκλική.

4. Ο χρόνος πτώσης από το x_0 στο 0 (κατά μήκος του x) είναι $t = \sqrt{2x_0/g}$. Στο χρόνο αυτό για να μηδενιστεί η κάθετη (y) ταχύτητα θα πρέπει $v_0 - gt = 0$ δηλαδή $v_0 = \sqrt{2x_0 g}$. Το δε διάστημα που θα διανύσει θα είναι $y = v_0 t - gt^2/2 = x_0$.

5. Στη συνέχεια θα επαναληφθούν ίδιες παραβολές, αφού και πάλι ξεκινά το σωματίδιο από το ίδιο σημείο με την ίδια ταχύτητα ($v_x = gt = \sqrt{2x_0 g}$) αλλά από το άλλο επίπεδο τώρα.

6. Γενικά δεν αναμένουμε κλειστές διαδρομές αφού η κάθε ταλάντωση (κάθετα στο κάθε επίπεδο) διαρκεί χρόνο ανάλογο της ρίζας της μέγιστης απόστασης από το επίπεδο. Για να μπορούν να κλείνουν οι τροχιές θα πρέπει οι 2 περίοδοι να έχουν ρητό λόγο που γενικά δεν ισχύει αν το αρχικό σημείο εκκίνησης είναι τυχαίο.