ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

12 Φεβρουαρίου 2008

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα, αλλά οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα ταλάντωσης $\omega_1 = 1$. Αγνοήστε την τριβή.

1. Γράψτε τη μορφή του δυναμικού, τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο και την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή.

2. Προσδιορίστε την κίνηση του σωματιδίου δεδομένου ότι αρχικά $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

3. Το σωματίδιο κινείται για χρονικό διάστημα ίσο με το 1/4 της περιόδου T_1 του ταλαντωτή που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_1. Ποια η τελική θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου;

4. Τη στιγμή αυτή η συχνότητα του σωματιδίου αλλάζει ακαριαία σε $\omega_2 = 1/2$ και παραμένει σταθερά για χρόνο ίσο με το 1/4 της *νέας περιόδου* T_2 που αντιστοιχεί στο ταλαντωτή με ω_2. Ποια η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου στο τέλος του νέου αυτού χρονικού διαστήματος;

5. Η διαδικασία αυτή εναλλαγής της τιμής του ω μεταξύ ω_1 και ω_2 συνεχίζεται να επαναλαμβάνεται για χρονικά διαστήματα $T_1/4$ και $T_2/4$ ατίστοιχα. Μετά από N τέτοιες εναλλαγές ποιο θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης;

6. Διενεργείται τώρα ένα διαφορετικό πείραμα με τον ταλαντωτή με συχνότητα ταλάντωσης $\omega_1 = 1$. Αντί να του μεταβάλλουμε τη συχνότητα τον διεγείρουμε με εξωτερική αρμονική δύναμη σε συχνότητα συντονισμού της μορφής:
$$F(t) = 100\cos(\omega_1 t) \, .$$
Ο εν λόγω ταλαντωτής βρίσκεται αρχικά στο σημείο ισορροπίας σε κατάστασης ηρεμίας. Προσδιορίστε την κίνηση του ταλαντωτή και σχεδιάστε τη θέση του με τον χρόνο. Συγκρίνετε το πλάτος της ταλάντωσης του προηγούμενου πειράματος ύστερα από N εναλλαγές, με το πλάτος του ταλαντωτή αυτού του πειράματος την αντίστοιχη χρονική στιγμή $t_{\text{ολ}} = N(T_1 + T_2)/4$.

7. Ύστερα από πόσες εναλλαγές N ο ταλαντωτής του πρώτου πειράματος θα υπερβεί το πλάτος της ταλάντωσης του δεύτερου πειράματος; Σε πόσα λεπτά περίπου επιτυγχάνεται αυτό; [Υπ: Η εξίσωση που έχετε να λύσετε λύνεται προσεγγιστικά (± 1) με απλές αριθμητικές δοκιμές.]

Θέμα Β: Ένα από τα μελλοντικά σχέδια για την πραγματοποίηση διαστημικών αποστολών αποτελεί ο αποκαλούμενος διαστημικός ανελκυστήρας. Η ιδέα αφορά σε ένα πολύ μακρύ καλώδιο το ένα άκρο του οποίου θα είναι προσδεδεμένο στη Γη ενώ το άλλο άκρο θα είναι ελεύθερο. Ολόκληρο το καλώδιο θα περιστρέφεται μαζί με τη Γη και ή φυγόκεντρος δύναμη εξαιτίας αυτής τη περιστροφής θα κρατά το καλώδιο τεντωμένο.

1. Αν η επιφάνεια τη Γης στη θέση του Ισημερινού, όπου έχει προσδεθεί το ένα άκρο του καλωδίου, περιστρέφεται με ταχύτητα $450\ m/s$, πόσο μακρύ, σε ακτίνες Γης, πρέπει να είναι καλώδιο, ώστε όταν ανεβάσουμε κάποιο φορτίο στο ελεύθερο άκρο αυτού η ταχύτητα περιστροφής του φορτίου να είναι v (για $v > 450\ m/s$ βεβαίως);

2. Δεδομένου ότι η τροχιακή ταχύτητα της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $v_\Gamma = 3 \times 10^4\ m/s$ και είναι περίπου κυκλική με τι ταχύτητα V_0 θα κινείται αρχικά το φορτίο μέσα στο ηλιακό σύστημα αν αφότου αυτό ανυψωθεί στο ελεύθερο άκρο του καλωδίου, στη συνέχεια απελευθερωθεί από το καλώδιο που το συγκρατεί; Υποθέστε ότι το καλώδιο και η επιβατική (προς τα έξω) ακτίνα της θέσης της Γης (ως προς τον Ήλιο) σχηματίζουν γωνία θ. Για ποια τιμή της γωνίας θ η ταχύτητα V_0 γίνεται μέγιστη;

3. Έστω ότι θέλουμε το φορτίο να ταξιδέψει σε έναν μακρινό πλανήτη ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση $8\ AU$ (όπου $1\ AU$: μία αστρονομική μονάδα, δηλαδή όσο η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς της Γης). Τι τροχιά θα εκτελέσει το φορτίο κατευθυνόμενο προς τον πλανήτη; Αν η μέγιστη ως προς θ ταχύτητα (που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα) που απέκτησε το φορτίο μόλις απελευθερώθηκε από το καλώδιο, είναι η ελάχιστη δυνατή ώστε το φορτίο να φτάσει στο μακρινό πλανήτη τι σχήμα ακριβώς θα έχει η τροχιά του μέχρι τον πλανήτη;

4. Βρείτε το ελάχιστο μήκος του καλωδίου του διαστημικού ανελκυστήρα ώστε το φορτίο να καταφέρει να φτάσει οριακά στην απόσταση των $8\ AU$. [Δίδεται για ευκολία η τιμή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας $\tilde{E}$ ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχιά με μεγάλο ημιάξονα a:
$$\tilde{E} = -\frac{GM_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{2a}.$$
Επίσης υποθέστε ότι το μήκος του καλωδίου αν και μεγάλο σε σχέση με την ακτίνα της Γης, είναι ασήμαντο σε σχέση με τη $1\ AU$.]

5. Με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Κέπλερ υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται το φορτίο για να φτάσει από την απελευθέρωσή του από το καλώδιο έως τον μακρινό πλανήτη.

Θέμα Γ: Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση του νευτώνειου βαρυτικού πεδίου μιας ακλόνητης ομογενούς σφαιρικής μάζας M το κέντρο Κ της οποίας θεωρείται η αρχή του συστήματος αναφοράς.

1. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το Κ
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}\ ,$$
διατηρείται κατά την κίνηση ($\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\vec{r}$ η θέση του σωματιδίου ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς). Δείξτε ότι η διατήρηση αυτή συνεπάγεται ότι το σωματίδιο θα κινείται επί ενός σταθερού επιπέδου και ότι η φορά της κίνησης δεν μπορεί να αντιστραφεί.

2. Δείξτε ότι επιπλέον και η διανυσματική ποσότητα
$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - GMm\hat{r},$$
όπου G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και $\hat{r}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, διατηρείται κατά την κίνηση του σωματιδίου. [Υπ: Σκεφτείτε τι γωνία σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα $\hat{r}$ και $\vec{L}$ ή χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.]

3. Σε τι τροχιά αντιστοιχεί ένα $\vec{A} = \vec{0}$;

4. Δείξτε ότι το διάνυσμα αυτό βρίσκεται στο επίπεδο της τροχιάς του σωματιδίου.

5. Πολλαπλασιάστε εσωτερικά το σταθερό αυτό διάνυσμα με το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου $\vec{r}$ και με τον τρόπο αυτό κατασκευάστε μια σχέση που να συνδέει την επιβατική ακτίνα r και τη γωνία ϕ που σχηματίζει αυτή με το σταθερό διάνυσμα $\vec{A}$, με τα φυσικά χαρακτηριστικά του προβλήματος M, m και τα αναλλοίωτα μεγέθη $|\vec{L}|, |\vec{A}|$. Δείξτε ότι η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από την πολική έκφραση των κωνικών τομών. [Υπ: Ισχύει ότι $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}$.]

6. Σκεπτόμενοι για ποια τιμή της γωνίας ϕ οδηγούμαστε στη θέση του περιηλίου, δηλαδή στην κοντινότερη απόσταση στη μάζα M, εξηγήστε ποια είναι η κατεύθυνση του σταθερού διανύσματος $\vec{A}$. Ποια η σχέση του $|\vec{A}|$ με την εκκεντρότητα της τροχιάς; Συμφωνεί το είδος της τροχιάς που οδηγεί σε μηδενικό $|\vec{A}|$ με αυτό που βρήκατε στο ερώτημα (3);

7. Στην περίπτωση ελλειπτικής τροχιάς, δεδομένων των διανυσμάτων $\vec{A}$, $\vec{L}$, και της ενέργειας ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου $\tilde{E}$ βρείτε τη διανυσματική θέση του αφηλίου της τροχιάς (του απώτερου σημείου). [Υπ. Οι σχέσεις που συνδέουν την ενέργεια ανά μονάδα μάζας και την εκκεντρότητα της τροχιάς με τις άλλες φυσικές παραμέτρους του προβλήματος είναι
$$\tilde{E} = -\frac{GM}{2a}, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2\tilde{E}}{(GMm)^2}},$$
όπου a ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς.]

Λύσεις

Θέμα Α:

1.

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(m\omega_1^2)x^2 = \frac{1}{2}x^2 \quad (1)$$
$$F = -kx = -x \quad (2)$$
$$\ddot{x} = -x \quad (3)$$

2.

$$x(t) = \cos(t)$$

3.

$$x(T_1/4) = \cos(T_1/4) = \cos(2\pi/4) = 0 \;\text{ και }\; u(T_1/4) = \sin(T_1/4) = \sin(2\pi/4) = 1$$

4.

$$x(t + T_1/4) = x(T_1/4)\cos(\omega_2 t) + \frac{v(T_1/4)}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \Rightarrow$$
$$x((T_2 + T_1)/4) = 2v(T_1/4) = 2 \;\text{ και }\; v((T_2 + T_1)/4) = -x(T_1/4)\omega_2 \sin(\omega_2 T_2/4) = 0 \quad (4)$$

5. Από τα προηγούμενα ερωτήματα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$x(N(T_2 + T_1)/4) = 2^N \;\text{ και }\; v(N(T_2 + T_1)/4) = 0$$

6. Γνωρίζουμε ότι η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι

$$x(t) = \frac{100}{2}t\sin(\omega_1 t)$$

γεγονός το οποίο μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με απλή αντικατάσταση. Επομένως ενώ ο προηγούμενος ταλαντωτής αυξάνει εκθετικά με το N το πλάτος του

$$x_0^{(1)}(N(T_2 + T_1)/4) = 2^N = e^{N\ln 2}$$

ο δεύτερος διεγειρόμενος ταλαντωτής αυξάνει γραμμικά με το N το πλάτος του:

$$x_0^{(2)}(N(T_2 + T_1)/4) = 50N(T_2 + T_1)/4 = 75\pi N$$

7. Τα πλάτη θα εξισωθούν για N τέτοιο ώστε

$$2^N = 75\pi N$$

Με απλές δοκιμές βρίσκουμε ότι $\ldots, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096$ και $\ldots, 75\pi 11 = 2592, 75\pi 12 = 2827$. Δηλαδή μετά από $\cong 11 - 12$ ο πρώτος ταλαντωτής ξεπερνά σε πλάτος το δεύτερο. Η πραγματική απάντηση είναι $= 11.4$. Ο αντίστοιχος χρόνος είναι $t_{\text{ολ}} = 3\pi N/2 =\cong 54s$ κάτι λιγότερο από 1 λεπτό. Το ενδιαφέρον λοιπόν είναι ότι τόσο σύντομα ο ταλαντωτής με τη μεταβαλλόμενη συχνότητα θα ξεπεράσει σε πλάτος ακόμη και έναν ταλαντωτή σε συντονισμό με μια δύναμη 100πλάσια της μέγιστης δύναμης του 1ου ταλαντωτή αρχικά. Επομένως η κατάλληλα μεταβαλλόμενη συχνότητα έχει πολύ πιο έντονη δράση σε έναν ταλαντωτή απ' ότι ο συντονισμός.

Θέμα Β:

1.

$$v/H = \omega = (450\, m/s)/R \Rightarrow v = (450\, m/s)(H/R)$$

2. Από τη διανυσματική πρόσθεση των ταχυτήτων

$$V_0 = \sqrt{v_\Gamma^2 + v^2 + 2 v_\Gamma v \cos\theta}$$

το οποίο γίνεται μέγιστο για $\theta = 0$:

$$V_{0\ \max} = \left(3 \times 10^4 + 450 \frac{H}{R}\right)\ m/s$$

3. Γενικά η κίνηση θα είναι μία κωνική τομή. Αφού θέλουμε να φτάσουμε σε μια μέγιστη απόσταση $8\ AU$ μέσα στο ηλιακό σύστημα ξεκινώντας από τη $1\ AU$ η κίνηση πρέπει να είναι μία έλλειψη με αφήλιο τις $8\ AU$. Επειδή μάλιστα $\theta = 90°$ το περιήλιο της έλλειψης θα είναι $1\ AU + H \cong 1\ AU$.

4. Για να έχει αυτά τα στοιχεία η έλλειψη θα πρέπει

$$\frac{1}{2} V_{0\ \max}^2 - \frac{GM}{1\ AU + H} \cong -\frac{GM}{1 + 8\ AU}$$

δηλαδή

$$V_{0\ \max} = \left(3 \times 10^4 + 450 \frac{H}{R}\right)\ m/s \cong \sqrt{\frac{2GM}{1\ AU}(1 - 1/9)} = \sqrt{\frac{16}{9}} \times (3 \times 10^4\ m/s)$$

δηλαδή

$$1 + \frac{3}{200}\frac{H}{R} = \frac{4}{3} \Rightarrow H = \frac{200}{9} R \approx 22.2R$$

Πράγματι το μήκος αυτός είναι μόλις 1/1000 της AU.

5. Για την τροχιά αυτή $2a = 9\ AU$ οπότε

$$\frac{(4.5\ AU)^3}{(2\tau)^2} = \frac{(1\ AU)^3}{(1\ yr)^2} \Rightarrow \tau = \frac{4.5^{3/2}}{2}\ yr = 4.8 yr$$

Το 2τ έχει μπει γιατί αφού το ταξίδι αφορά το μισό της έλλειψης η συνολική περίοδος της τροχιάς θα είναι το διπλάσιο του ζητούμενου χρόνου.

Θέμα Γ:

1. Αφού η δύναμη είναι

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

δηλαδή είναι κεντρική θα διατηρείται το διάνυσμα της στροφορμής ($\dot{\vec{L}}$), η οποία εκ κατασκευής είναι κάθετη στο στιγμιαίο επίπεδο της τροχιάς (το επίπεδο των $\vec{r}, \vec{v}$). Επομένως το επίπεδο αυτό δεν θα αλλάζει και η τροχιά θα εξελίσσεται σε αυτό το επίπεδο.

2.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \dot{\vec{v}} \times \vec{L} + \vec{v} \times \dot{\vec{L}} - GMm\dot{\hat{r}} \\ &= -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \times \vec{L} + \vec{0} - GMm\dot{\theta}\hat{\theta} \end{aligned} \qquad (5)$$

Επειδή $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$, όπου $\hat{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο κίνησης, η 5 γράφεται

$$\dot{\vec{A}} = -GMm\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{k} + \hat{\theta}) = 0$$

αφού $\hat{k} = \hat{r} \times \hat{\theta}$.

3. Για να είναι $\vec{A} = \vec{0}$ θα πρέπει

$$\vec{v} \times \vec{L} = GMm\hat{r} \tag{6}$$

   Αφού $\vec{v} \perp \vec{L}$

$$vL = GMm$$

   δηλαδή η ταχύτητα θα είναι σταθερή και κάθετη στο $\vec{r}$ από τη σχέση (6). Επομένως η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

4. Το διάνυσμα $\vec{v} \times \vec{L}$ είναι κάθετο στο $\vec{L}$ και επομένως βρίσκεται στο επίπεδο της τροχιάς. Το ίδιο και το $\hat{r}$.

5.

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{r} &= |\vec{A}| r \cos\phi = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) - GMmr \\
&= \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) - GMmr \\
&= L^2/m - GMmr
\end{aligned} \tag{7}$$

   οπότε

$$r = \frac{L^2/m}{GMm + |\vec{A}|\cos\phi} = \frac{(L/m)^2/GM}{1 + \frac{A}{GMm}\cos\phi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

   Αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση μιας κωνικής τομής.

6. Το περιήλιο εμφανίζεται για $\phi = 0$ επομένως αφού οι γωνίες του $\vec{r}$ μετρώνται από το $\vec{A}$ το περιήλιο είναι σε γωνία $\phi = 0$. Με άλλα λόγια το $\vec{A}$ βρίσκεται στην κατεύθυνση του περιηλίου $\hat{r}_\Pi$. Από το προηγούμενο ερώτημα $|\vec{A}| = \epsilon GMm$. Συνεπώς

$$\vec{A} = GMm\epsilon\hat{r}_\Pi$$

   Για κυκλικές τροχιές όπου $\epsilon = 0$, δηλαδή $|\vec{A}| = 0$ όπως δείξαμε και στο ερώτημα (3).

7. Το αφήλιο βρίσκεται απέναντι από το περιήλιο και εφόσον το περιήλιο είναι σε απόσταση $a(1-\epsilon)$ το αφήλιο είναι σε απόσταση $a(1+\epsilon)$. Συνεπώς

$$\vec{r}_\mathrm{A} = -\vec{r}_\Pi \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = -a(1-\epsilon)\hat{r}_\Pi \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = -\frac{a\vec{A}}{GMm\epsilon}(1+\epsilon) = \frac{\vec{A}}{2\tilde{E}m}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2\tilde{E}}{(GMm)^2}}}\right)$$