ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

29 Αυγούστου 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα, αλλά οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα A: Σωματίδιο μάζας m κινείται μπρος και πίσω μεταξύ δύο επιπέδων τοιχωμάτων μάζας M που πλησιάζουν το ένα το άλλο μένοντας πάντα παράλληλα μεταξύ τους. Η απόσταση των δύο τοιχωμάτων κάθε χρονική στιγμή είναι $L(t)$. Το δεξιό τοίχωμα κινείται προς το αριστερά με ταχύτητα $-V(t)$ ενώ το αριστερό με ταχύτητα $+V(t)$ προς τα δεξιά. Το σωματίδιο έχει ταχύτητα $v(t)$ και κινείται κάθετα στα δύο τοιχώματα (μονοδιάστατη κίνηση). Η τριβή είναι αμελητέα και οι κρούσεις του σωματιδίου με τα τοιχώματα θεωρούνται ότι είναι ελαστικές.

1. Θεωρήστε μία κρούση του σωματιδίου με το δεξιό τοίχωμα (καμία άλλη δύναμη δεν ασκείται στο σύστημα εκτός των δυνάμεων κρούσης). Δείξτε ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος σωματίδιο-δεξί τοίχωμα είναι $v_{\kappa\mu} = (mv - MV)/(m + M)$. Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου μετά την κρούση χρησιμοποιώντας δύο αρχές διατήρησης που ισχύουν στη περίπτωση αυτή και εξηγώντας με σαφήνεια τις παραδοχές που κάνουμε για να ισχύουν αυτές οι αρχές διατήρησης.

2. Υποθέστε τώρα ότι το σωματίδιο είναι πολύ ελαφρύτερο από το τοίχωμα, είναι δηλαδή $m << M$. Δείξτε τότε ότι μετά από κάθε κρούση η ταχύτητα του σωματιδίου αυξάνεται κατά $2V$.

3. Υποθέστε επιπλέον ότι $v >> V$ (οπότε οι κρούσεις είναι πολύ συχνές) και ότι οι ταχύτητες των τοιχωμάτων παραμένουν σταθερές καθόλη τη διάρκεια του φαινομένου. Ποια η σχέση μεταξύ των δύο μικρών ποσοτήτων V/v και m/M προκειμένου να μην αλλάζουν σημαντικά ταχύτητα τα τοιχώματα παρόλο που αλλάζει η ταχύτητα του σωματιδίου;

4. Δείξτε ότι σε ένα χρονικό διάστημα Δt, αρκούντως μικρό ώστε η ταχύτητα των τοιχωμάτων V να μη έχει μεταβληθεί σημαντικά, η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων έχει μεταβληθεί κατά $\Delta L \approx -2V\Delta t << L$. Δείξτε ότι ο αριθμός κρούσεων στη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος Δt είναι κατά προσέγγιση $v\Delta t/L$ και ότι η ταχύτητα του σωματιδίου έχει αυξηθεί κατά $\Delta v \approx -(\Delta L/L)v$.

5. Δείξτε τέλος, ότι, κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις, η ταχύτητα του σωματιδίου v είναι κατά προσέγγιση ανάλογη με L^{-1}.

Θέμα B: Ένας κλασικός αρμονικός ταλαντωτής φυσικής συχνότητας ω βρίσκεται αρχικά ακίνητος στο σημείο ισορροπίας. Η κίνηση του ταλαντωτή χαρακτηρίζεται από μηδενική απόσβεση. Στον ταλαντωτή αυτό ασκείται για θετικούς χρόνους, $t \geq 0$, δύναμη ανάλογη της $\cos(\omega' t)$ όπου η συχνότητα ω' είναι σχεδόν ίση με την φυσική συχνότητα ω οπότε τη γράφουμε ως $\omega' = \omega + \epsilon$ με $\epsilon << \omega$.

1. Δείξτε ότι η απόκριση αυτού του ταλαντωτή είναι ανάλογη της:

   $$\frac{\sin(\omega t)\sin(\epsilon t/2)}{\omega\epsilon}.$$

   Σχεδιάστε την απόκριση. [Υπ: $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$].

2. Εξηγήστε με ποιοτικά επιχειρήματα (χωρίς να κάνετε λεπτομερείς υπολογισμούς) γιατί αν υπήρχε απόσβεση δεν θα παρατηρούνταν αυτή η συμπεριφορά. Τι κίνηση θα εκτελούσε τότε ο ταλαντωτής;

3. Ας υποθέσουμε ότι η απόσβεση είναι πάρα πολύ μικρή ώστε να μπορούμε να την αγνοήσουμε πρακτικά. Ποια από τις δύο συμπεριφορές θα ακολουθούσε το σύστημα;

Θέμα Γ: Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται εντός ενός σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B\hat{e}_x$ υπό την επίδραση επίσης του σταθερού και ομογενούς πεδίου βαρύτητας έντασης, $-g\hat{e}_z$ ($\hat{e}_x$, $\hat{e}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στη x και z διεύθυνση αντίστοιχα).

1. Γράψτε τις τρεις συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης στο καρτεσιανό σύστημα (x, y, z) και λαμβάνοντας τη μιγαδική μεταβλητή $\zeta = y + iz$, γράψτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί αυτή και λύστε τη αδιαφορώντας για το ότι είναι μιγαδική εξίσωση (ίσως σας βοηθήσει να χρησιμοποιήσετε στην πορεία μια νέα μεταβλητή την $\xi = \dot{\zeta}$). Δείξτε ότι το σωματίδιο εκτελεί ομαλή κίνηση στον άξονα x, καθώς και έναν συνδυασμό κυκλικής κίνησης στο επίπεδο $y - z$ με ομαλή μεταφορική κίνηση στον άξονα y. Σχεδιάστε την κίνηση στο επίπεδο $y - z$ και προσδιορίστε τη σταθερή ταχύτητα μετακίνησης στον άξονα y.

2. Θέλετε τώρα να εξαλείψετε την μεταφορική κίνηση στον y άξονα με εφαρμογή κατάλληλου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$. Ποια πρέπει να είναι η διεύθυνση και η ένταση του πεδίου που πρέπει να χρησιμοποιήσετε;

Θέμα Δ: Ένας τρόπος να πραγματοποιούνται οι διαγαλαξιακές μεταφορές στο μέλλον είναι όλα τα διαστημικά οχήματα να κινούνται σε καθορισμένες διαστημικές λωρίδες με συγκεκριμένη ταχύτητα χωρίς τη χρήση προωθητικών πυραύλων. Η αλλαγή κατεύθυνσης στο διάστημα θα μπορούσαν να πραγματοποιούνται με την τοποθέτηση μεγάλων σφαιρικών μαζών M σε συγκεκριμένους διαστημικούς κόμβους. Για να μην προκαλείται μάλιστα κομφούζιο των τροχιών που μπορούν να πραγματοποιούνται, οι ταχύτητες στις διαστημικές λωρίδες καθορίζονται έτσι ώστε όλες οι τροχιές να "στρίβουν" κατά 90° όταν περνούν δίπλα από μια τέτοια μάζα.

1. Υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης σε κάθε τέτοια λωρίδα ως συνάρτηση της απόστασης της λωρίδας αυτής από τη μάζα-κόμβο, ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή στροφή. Προς τούτο γράψτε την πολική εξίσωση μιας υπερβολικής τροχιάς γύρω από μια ακλόνητη σφαιρική μάζα M και υπολογίστε την εκκεντρότητά της ώστε η συνολική αλλαγή κατεύθυνσης της τροχιάς να είναι 90°. Στη συνέχεια συσχετίστε την εκκεντρότητα με την ταχύτητα κίνησης σε μεγάλη απόσταση από τη μάζα και την απόσταση της διεύθυνσης κίνησης από τη μάζα. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η εκκεντρότητα μιας τροχιάς δίνεται από την έκφραση
$$e = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{(GM)^2}},$$
όπου $\tilde{E}$ και $\tilde{L}$ η ενέργεια και η στροφορμή του σωματιδίου που κινείται σε τροχιά ανά μονάδα μάζας αυτού.

2. Η μάζα του διαστημικού οχήματος που στρίβει χρειάζεται να ληφθεί υπόψη στην ταχύτητα κίνησής του;

3. Έστω ότι όλα τα οχήματα κινούνται σε τέτοιες τροχιές που στρίβουν κατά 90° οι οποίες είναι συνεπίπεδες και έχουν συγκεκριμένη φορά κίνησης ώστε να αποφεύγονται οι συγκρούσεις. Χρησιμοποιώντας τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα υπολογίστε την ώθηση που προκαλεί στη μάζα-κόμβο ένα όχημα μάζας m όταν εκτελέσει μια τέτοια στροφή. Πότε ένα όχημα προκαλεί μεγαλύτερη ώθηση, όταν κινείται σε εσωτερική στη στροφή λωρίδα (κοντά στην M) ή σε εξωτερική;

4. Έχει μετρηθεί ότι από έναν τέτοιο κόμβο διέρχεται κατά μέσο όρο συνολική μάζα οχημάτων Δm σε ένα έτος. Υποθέτωντας ότι όλη αυτή η μετακίνηση παραγματοποιείται στην πιο εσωτερική λωρίδα (μέγιστη δυνατή ώθηση) η οποία περνά σε απόσταση $b_{\min}$ από την M και μάλιστα με σταθερή ροή μάζας, πόση είναι η μετατόπιση της μάζας M που επιφέρει όλη αυτή κυκλοφορία σε χρονικό διάστημα ενός έτους και η οποία πρέπει να διορθωθεί με επανατοποθέτηση στη σωστή θέση της μάζας-κόμβου;

Λύσεις

Θέμα Α:

1.
$$v_{\kappa\mu} = \frac{M(-V)+mv}{M+m}$$

Θεωρώντας(α) ότι δεν ασκείται καμία άλλη δύναμη στο σύστημα παρά μόνο οι δυνάμεις κρούσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των συγκρουομένων σωμάτων διατηρείται η ορμή του συστήματος και (β) ότι καθόλου ενέργεια του συστήματος δεν απορροφάται υπό μορφή δυναμικής ενέργειας ή θερμότητας κατά τη σύγκρουση διατηρείται η ολική κινητική ενέργεια. Έτσι

$$mv + M(-V) = mv' + MV'$$
$$mv^2 + MV^2 = mv'^2 + MV'^2$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε

$$v' = v\frac{m/M-1}{m/M+1} - 2V\frac{1}{m/M+1}$$

2. Για $m << M$, $v' = -v - 2V$, δηλαδή $|v'| = |v| + 2V$ όπου $V > 0$. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει λόγω συμμετρίας και για την κρούση με το άλλο τοίχωμα.

3. Από το σύστημα που λύσαμε παραπάνω ως προς v', αν το λύσουμε ως προς V' θα έχουμε

$$V' = V\frac{M/m-1}{M/m+1} + 2v\frac{1}{M/m+1}$$

Δηλαδή
$$\Delta V \approx 2\frac{m}{M}v$$
Για να είναι αυτή πολύ μικρή σε σχέση με τη V θα πρέπει

$$\frac{m}{M}\frac{v}{V} << 1 \Rightarrow \frac{m}{M} << \frac{V}{v}$$

4. Αφού θεωρούμε τη V σταθερή τα τοιχώματα έχουν πλησιάσει στο χρονικό αυτό διάστημα κατά $\Delta L \approx -2V\Delta t$ (από 1 το κάθε τοίχωμα). Για αρκούντως μικρό Δt το $\Delta L << L$. Αφού λοιπόν δεν έχει αλλάξει σημαντικά το εύρος του διαστήματος μεταξύ των τοιχωμάτων και αφού $V << v$ η ταχύτητα του σωματιδίου δεν έχει αλλάξει σημαντικά το πλήθος των κρούσεων είναι $\Delta N \approx s_{\text{ολ}}/L \approx v\Delta t/L$. Λαμβάνοντας λοιπόν το πλήθος των κρούσεων ΔN η ταχύτητα έχει αυξηθεί κατά μέτρο σε $v(\Delta t) = v + \Delta N(2V)$. Δηλαδή

$$\Delta v \approx 2V\frac{v\Delta t}{L} \approx -v\frac{\Delta L}{L}$$

5. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση (θεωρώντας τη διαφορική)

$dv/v = -dL/L \Rightarrow \ln(v(t)/v_0) = \ln(L_0/L(t)) \Rightarrow L(t)v(t) = L_0v_0 = \text{σταθ} \Rightarrow v(t)$ ανάλογο του $L(t)^{-1}$

Θέμα Β:

1. Η εξίσωση κίνησης
$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = F_0\cos(\omega' t)$$
έχει ως λύση την ομογενή και την ειδική

$$x(t) = x_{\text{ομ}} + x_{\text{ε}} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F_0/m}{\omega^2-\omega'^2}\cos(\omega' t)$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε και τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ καταλήγουμε ότι $B = 0$ και $A = -F_0/m/(\omega^2 - \omega'^2)$. Η κίνηση λοιπόν περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega'^2}(\cos(\omega' t) - \cos(\omega t)) = \\ \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega'^2}(-2)\sin(\frac{\omega' - \omega}{2}t)\sin(\frac{\omega' + \omega}{2}t) &\rightarrow_{\omega \simeq \omega'} \\ &\frac{F_0/m}{\epsilon\omega}\sin(\epsilon t/2)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Η απόκριση έχει τη μορφή διακροτήματος.

2. Αν υπήρχε απόσβεση η λύση της ομογενούς θα έσβηνε σταδιακά και θα παρέμενε μια αρμονική ταλάντωση με τη συχνότητα της διέγερσης.

3. Ακόμη και αν η απόσβεση είναι μικρή τελικά θα παρέμενε μια αρμονική ταλάντωση. Βέβαια όσο πιο μικρή η απόσβεση τόσο πιο αργά θα σβήσει η ομογενής. ΄Ετσι για χρόνο της τάξης του $\sim 1/\gamma$ η λύση του διακροτήματος θα είναι ορθή, ενώ ύστερα από το διάστημα αυτό θα καθίσταται καθαρά αρμονική.

Θέμα Γ:

1.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= qB\dot{z} \\ m\ddot{z} &= qB(-\dot{y}) - mg \end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες που είναι πεπλεγμένες με χρήση της $\zeta = y + iz$ παίρνουν τη μορφή

$$m\ddot{\zeta} = qB(\dot{z} - i\dot{y}) - img = -iqB\dot{\zeta} - img \tag{1}$$

΄Η πιο απλά

$$\ddot{\zeta} + i\omega\dot{\zeta} + ig = 0$$

όπου $\omega = qB/m$. Η εξίσωση αυτή έχει ως λύση την

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} = \xi &= -\frac{g}{\omega} + Ae^{-i\omega t} \Rightarrow \\ y + iz = \zeta &= C - \frac{gt}{\omega} + \frac{A}{-i\omega}e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Η κίνηση στον x άξονα λοιπόν είναι ομαλή ενώ στο επίπεδο $y - z$ είναι συνδυασμός ομαλής κίνησης στον άξονα y που περιγράφεται από τον όρο $-gt/\omega$ και μιας κυκλικής που περιγράφεται από τον όρο $e^{-i\omega t}$. Η μεταφορική ταχύτητα στον y είναι $-g/\omega$. Η κίνηση είναι μια κυκλοειδής (τροχιά που διαγράφει ένα σημείο ενός δίσκου -είτε μέσα από την περιφέρειά του, είτε στο εξωτερικό μέρος αυτής- όταν αυτός κυλίεται.

2. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου γεννά τη μεταφορική κίνηση. Αν το ηλεκτρικό πεδίο αναιρούσε τη βαρυτική δύναμη η κίνηση θα απέμενε κυκλική στο $y - z$ επίπεδο (δηλαδή ελικοειδής συνολικά). ΄Ετσι το κατάλληλο προς τούτο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = -m\vec{g}/q.$$

Θέμα Δ:

1. $$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

   Για να είναι η στροφή 90° σε μια υπερβολική τροχιά θα πρέπει $1 + e\cos\theta = 0$ για γωνίες $\theta = \pm 135^\circ$. Έτσι $e = \sqrt{2}$. Συνεπώς

   $$1 = \frac{2\frac{1}{2}v_0^2(v_0 b)^2}{(GM)^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{GM/b}$$

   όπου b η απόσταση της ευθείας της λωρίδας από την κεντρική μάζα. (Η διατηρούμενη στροφορμή ανά μονάδα μάζας είναι $\tilde{L} = v_0 b$ και η ενέργεια $\tilde{E} = v_0^2/2$ υπολογιζόμενες και οι 2 όταν το όχημα βρίσκεται πολύ μακριά από τον κόμβο.

2. Όχι όπως πάντα όταν γίνεται η κίνηση εντός βαρυτικού πεδίου.

3. Η μεταβολή στην ορμή του κάθε οχήματος είναι ίση και αντίθετη με τη μεταβολή της ορμής της μάζας-κόμβου, δηλαδή $\sqrt{2}mv_0$ σε κατεύθυνση της διχοτόμου των 90°. Έτσι αφού η v_0 είναι μεγαλύτερη στις εσώτερες λωρίδες (μικρότερα b) τα οχήματα που κινούνται σε αυτές προκαλούν τη μέγσιτη ώθηση.

4. Θα έχουμε

   $$F = \sqrt{2}\frac{dm}{dt}v_0^{\max} = \sqrt{2\frac{GM}{b_{\min}}}\frac{\Delta m}{1yr} \tag{2}$$

   Υπό τη δράση μιας τέτοιας δύναμης επί ένα έτος η κεντρική μάζα θα μετακινηθεί κατά

   $$\delta s = \frac{F}{2M}(1yr)^2 = \sqrt{\frac{G}{2b_{\min}M}}\Delta m(1yr)$$

   Συνεπώς για να πραγματοποιείται η κυκλοφορία χωρίς προβλήματα θα πρέπει $\delta s << b_{\min}$.