ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Ι

24 Σεπτεμβρίου 2018

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Καλή σας επιτυχία. Σύνολο πόντων **130**.

Πρόβλημα Α

1. Να γραφεί το διάνυσμα της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε κάποιο σημείο Α, είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό ενός λεπτού ομογενούς σφαιρικού φλοιού ακτίνας R και μάζας M, ως συνάρτηση του διανύσματος θέσης του σημείου Α, μετρημένου από το κέντρο του φλοιού. **[5]**

2. Ας υποθέσουμε ότι ανοίγουμε στο φλοιό μια πολύ μικρή κυκλική τρύπα ακτίνας $\delta << R$. Να βρεθεί η ένταση του πεδίου στο κέντρο του τρύπιου φλοιού και να συγκριθεί με την ένταση αμέσως έξω από την επιφάνεια του φλοιού σε κάποια θέση μακριά από την τρύπα. [Υπόδ.: η τρύπα μπορεί να εκληφθεί ως παρουσία μιας μικρής αρνητικής μάζας στον πλήρη φλοιό.] **[10]**

3. Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποιο σημείο όπου η ένταση του πεδίου μηδενίζεται στον τρύπιο φλοιό. Υποθέτωντας ότι η μικρή τρύπα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημειακό σωματίδιο αρνητικής μάζας, ποια είναι η θέση του σημείου αυτού; **[10]**

4. Εξηγήστε γιατί η θεώρηση του σημειακού σωματιδίου είναι λανθασμένη για τον υπολογισμό του παραπάνω σημείου, συσχετίζοντας την απόσταση από την τρύπα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με τις διαστάσεις της τρύπας. **[5]**

5. Αφού τώρα θεωρήσετε την τρύπα ως κυκλικό δίσκο και υπολογίσετε την ένταση από έναν τέτοιο δίσκο αρνητικής μάζας επί του άξονα του δίσκου, ελέγξτε και πάλι αν υπάρχει σημείο μηδενισμού του πεδίου κάπου κοντά στην τρύπα, δηλαδή κοντά στη θέση που υπολογίσατε στο ερώτημα [3]. **[15]**

6. Δεδομένου ότι το βαρυτικό δυναμικό από έναν σφαιρικό λεπτό φλοιό με κυκλικό άνοιγμα που αντιστοιχεί σε γωνία ως προς τον άξονα συμμετρίας του ανοίγματος $\theta_0 = \delta/R$, σε απόσταση x από το κέντρο του φλοιού και κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του τρύπιου φλοιού δίνεται από την έκφραση

$$\Phi(x) = -2G\sigma\pi R\left\{\frac{R}{x} + 1 - \sqrt{1 - \frac{2R\cos\theta_0}{x} + \frac{R^2}{x^2}}\right\} \tag{1}$$

   να ελέγξετε αν υπάρχει θέση x όπου η ένταση του βαρυτικού πεδίου να μηδενίζεται. **[10]**

Πρόβλημα Β Ένα σωματίδιο γυρίζει σε κυκλική τροχιά σε ύψος H πάνω από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη μάζας M και ακτίνας R. Σε τι ποσοστό πρέπει να μειωθεί η ταχύτητα του ενώ κινείται στην κυκλική τροχιά ώστε αυτό να προσκρούσει στο έδαφος; [**20**]

Πρόβλημα Γ Ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε μέσο που ασκεί αντίσταση στην κίνηση του σωματιδίου της μορφής $\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}$. Στο σώμα που αρχικά είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων ασκείται εξωτερική ταλαντωτική δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = ma_0\hat{\mathbf{z}}\sin(\omega t)$.

1. Να δειχθεί ότι η κίνηση του σωματιδίου θα διεξαχθεί στον άξονα z. [**5**]
2. Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου. [**15**]
3. Να υπολογιστεί το κέντρο της ταλάντωσης του σωματιδίου μετά από αρκετό χρόνο. [**5**]

Πρόβλημα Δ Ένα σύστημα σωματιδίων (όχι ίδιων) συνολικής μάζας M κινείται σε ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης $\mathbf{g}$. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με κάποιες δυνάμεις που υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα. Αν αρχικά τα σωματίδια βρισκόταν πάνω στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου το κέντρο του οποίου ήταν στη θέση $\mathbf{r}_0$ και κινούνταν όλα με την ίδια ταχύτητα $\mathbf{v}_0$, να βρεθεί:

1. Η τροχιά του κέντρου μάζας των σωματιδίων μετά από χρόνο t. [Από τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να υπολογιστεί το σχήμα της τροχιάς, ή η ακριβής θέση αυτής;] [**10**]
2. Να υπολογιστεί η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το σημείο που αντιστοιχεί στην αρχική θέση του κέντρου μάζας των σωματιδίων. [**10**]
3. Μπορείτε να προτείνετε κάποιες προϋποθέσεις στα δεδομένα του προβλήματος ώστε τα σωματίδια να συνεχίσουν να κινούνται σε σχηματισμό κανονικού πολυγώνου; [**10**]

Καλή επιτυχία

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. $$\mathbf{g}_A = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, & \text{για} \quad \mathrm{r} \geq \mathrm{R} \\ 0, & \text{για} \quad \mathrm{r} < \mathrm{R}. \end{cases}$$

2. Η μικρή μάζα του φλοιού που αφαιρέθηκε είναι περίπου

$$m \simeq M\frac{\pi\delta^2}{4\pi R^2} = M\left(\frac{\delta}{2R}\right)^2$$

οπότε το βαρυτικό πεδίο στο χώρο (εκτός από πολύ κοντά στην τρύπα όπου η αφαιρεμένη μάζα δεν μπορεί να εκληφθεί ως σημειακή) είναι αυτό από μια μάζα M σφαιρικά κατανεμημένη και μια περίπου σημειακή μάζα ίση με $-m$ και τοποθετημένη στη θέση της τρύπας. Έτσι το πεδίο στο κέντρο του φλοιού θα είναι

$$\mathbf{g}_K \simeq 0 - \frac{G(-m)}{R^2}(-\hat{\mathbf{r}}_T) = -\frac{Gm}{R^2}\hat{\mathbf{r}}_T = -\frac{GM}{R^2}\hat{\mathbf{r}}_T\left(\frac{\delta}{2R}\right)^2$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}_T$ η κατεύθυνση της τρύπας. Η ένταση στην επιφάνεια (μακριά από την τρύπα) θα είναι με πολύ καλή προσέγγιση αυτή που ήταν αρχικά αφού η μάζα της τρύπας είναι πολύ μικρότερη από του φλοιού.

$$\mathbf{g}_E \simeq -\frac{G}{R^2}\hat{\mathbf{r}}_E - \frac{G(-m)}{r_{mE}^2}\hat{\mathbf{r}}_{mE} \simeq -\frac{G}{R^2}\hat{\mathbf{r}}_E$$

όπου r_{mE} η απόσταση του συγκεκριμένου σημείου Ε της επιφάνειας από την τρύπα και ($\hat{\mathbf{r}}_{mE}$ η αντίστοιχη κατεύθυνση. Επομένως ο λόγος των δύο εντάσεων είναι τάξης $(\delta/(2R))^2$.

3. Η αρνητική μάζα λειτουργεί ως πηγή απωστικού πεδίου οπότε το μοναδικό υποψήφιο τέτοιο σημείο είναι ακριβώς έξω από την τρύπα σε σημείο τέτοιο που το πεδίο του φλοιού αναιρείται από αυτό της μάζας της τρύπας. Έστω η απόσταση αυτή είναι ϵ πάνω από το κέντρο της τρύπας:

$$0 = g_\Phi + g_T = -\frac{GM}{(R+\epsilon)^2} - \frac{G(-m)}{\epsilon^2} \simeq -\frac{GM}{R^2} + \frac{GM}{\epsilon^2}\left(\frac{\delta}{2R}\right)^2$$

Λύνοντας βρίσκουμε $\epsilon \simeq \delta/2$. Επομένως σε αυτή χοντρικά την απόσταση το πεδίο μηδενίζεται.

4. Αφού η απόσταση είναι τάξης μεγέθους όσο το μέγεθος του κυκλικού σφαιρικού δίσκου της τρύπας δεν είναι δυνατό να θεωρείται ο δίσκος σημειακός.

5. Τώρα θα κάνουμε την προσέγγιση ακόμη πιο ακριβή. Αφού ξέρουμε ότι μοναδικό υποψήφιο σημείο είναι αυτό κοντά στην τρύπα θα θεωρήσουμε την τρύπα ως κυκλικό δίσκο και το απωθητικό πεδίο της τρύπας θα θεωρήσουμε ότι είναι αυτό ενός δίσκου. Είναι εύκολο χωρίζοντας το δίσκο σε κυκλικούς δακτυλίους ακτίνας r' να βρούμε το πεδίο αυτό

$$g(\epsilon) = -\int_0^\delta G\frac{(-\sigma)2\pi r'\,dr'}{(r'^2+\epsilon^2)}\frac{\epsilon}{\sqrt{r'^2+\epsilon^2}}.$$

Το $-\sigma$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα της αρνητικής μάζας του δίσκου, ενώ το τελευταίο κλάσμα είναι το συνημίτονο της γωνίας κατά το οποίο συνεισφέρουν τα διανύσματα της έντασης από κάθε σημειακή μάζα του δακτυλίου στην ένταση πάνω στον άξονα του δίσκου. Το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int du/u^{3/2}$ και δίνει

$$g(\epsilon) = 2G\sigma\pi \left(1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{\delta^2 + \epsilon^2}}\right).$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν ένα τέτοιο απωστικό πεδίο μπορεί να εκμηδενίσει το πεδίο του φλοιού:

$$-\frac{GM}{R^2} = -4G\sigma\pi.$$

Αρκεί λοιπόν να ζητήσουμε μηδενισμό της έκφρασης

$$1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{\delta^2 + \epsilon^2}} - 2$$

έχοντας διαγράψει και από τα 2 πεδία την κοινή ποσότητα $2G\sigma\pi$. Είναι προφανές ότι η ποσότητα αυτή είναι παντα αρνητική επομένως δεν υπάρχει σημείο μηδενισμού του πεδίου.

6. Τώρα θα εκτελέσουμε έναν ακριβή υπολογισμό για να δείξουμε ότι πράγματι το πεδίο δεν μηδενίζεται πουθενά. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το ακριβές βαρυτικό δυναμικό από έναν τρύπιο φλοιό. Η ένταση του πεδίου θα υπολογιστεί από την παραγώγιση του δυναμικού

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{d\Phi}{dx} = 2G\sigma\pi R \left\{\frac{R}{x} + 1 - \sqrt{1 - \frac{2R\cos\theta_0}{x} + \frac{R^2}{x^2}}\right\}' \\ &= G\sigma\pi \left\{-\frac{R^2}{x^2} - \frac{\frac{R^2}{x^2}\cos\theta_0 - \frac{R^3}{x^3}}{\sqrt{1 - \frac{2R\cos\theta_0}{x} + \frac{R^2}{x^2}}}\right\} \\ &= -G\sigma\pi\frac{R^2}{x^2}\left\{1 + \frac{\cos\theta_0 - \frac{R}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2R\cos\theta_0}{x} + \frac{R^2}{x^2}}}\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Για να επιτευχθεί ο μηδενισμός της παραπάνω ποσότητας θα πρέπει

$$\sqrt{1 - \frac{2R\cos\theta_0}{x} + \frac{R^2}{x^2}} = \cos\theta_0 - \frac{R}{x}$$

το οποίο με τετραγωνισμό φαίνεται ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί. Μάλιστα η ποσότητα εντός της αγκύλης είναι πάντα θετική και το πεδίο είναι σε κάθε σημείο ελκτικό (προς το κέντρο του φλοιού).

Πρόβλημα Β Για να προσκρούσει στην επιφάνεια του πλανήτη θα πρέπει το περιήλιο να γίνει όσο η ακτίνα του πλανήτη. Από διατήρηση ενέργειας

$$E/m = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R+H} = \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{GM}{R}$$

και από διατήρηση στροφορμής

$$L/m = v_0(R+H) = v_P R.$$

Συνδυάζοντάς τες θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2\left(1-\left(\frac{R+H}{R}\right)^2\right) &= \frac{GM}{R}\left(-1+\left(\frac{R}{R+H}\right)\right) \\ \Rightarrow\quad v_0^2 = \frac{GM}{R+H}\frac{2R}{(2R+H)} & \end{aligned} \tag{3}$$

Δεδομένου ότι η αρχική ταχύτητα ήταν πριν τη μείωση η κατάλληλη για να εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $R+H$:

$$v_{00}^2 = \frac{GM}{R+H}$$

η μείωση της ταχύτητας θα πρέπει να είναι σε ποσοστό

$$1-\sqrt{\frac{2R}{2R+H}}$$

το οποίο για μικρά ύψη είναι περίπου $H/(4R)$.

Πρόβλημα Γ

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\gamma\dot{\mathbf{x}} = ma_0\hat{\mathbf{z}}\sin(\omega t)$$

και σπάζοντάς την σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \ddot{x}+\gamma\dot{x} &= 0 \\ \ddot{y}+\gamma\dot{y} &= 0 \\ \ddot{z}+\gamma\dot{z} &= a_0\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Η ομογενής λύση της 3ης είναι η γενική λύση των 1 και 2:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x + B_x e^{-\gamma t} \\ y(t) &= A_y + B_y e^{-\gamma t} \\ z(t) &= A_z + B_z e^{-\gamma t} + C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t) \end{aligned}$$

όπου τα C, S είναι σταθερές της ειδικής λύσης τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν με απευθείας αντικατάσταση στην δ.ε. 3.

$$-\omega^2(C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t)) + \gamma\omega(-C\sin(\omega t) + S\cos(\omega t)) = a_0\sin(\omega t),$$

οπότε $C = S(\gamma/\omega)$ και

$$S = -\frac{a_0}{\gamma^2+\omega^2}.$$

Θέτοντας τις αρχικές τιμές $x(0) = y(0) = z(0) = v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0$ βρίσκουμε

$$A_x = B_x = A_y = B_y = 0$$

οπότε η κίνηση διεξάγεται μόνο στον άξονα z που ασκείται η εξωτερική δύναμη. Επίσης βρίσκουμε

$$\begin{aligned} A_z + B_z - \frac{a_0(\gamma/\omega)}{\gamma^2+\omega^2} &= 0 \\ -B_z\gamma - \omega\frac{a_0}{\gamma^2+\omega^2} &= 0. \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{a_0(\omega/\gamma)}{\gamma^2+\omega^2} \\ A_z &= \frac{a_0}{\gamma\omega}. \end{aligned}$$

Η τιμή του A_z είναι το κέντρο της ταλάντωσης τελικά αφού το εκθετικό κομμάτι της λύσης θα σβήσει. Επομένως το κέντρο θα είναι $\mathbf{r_0} = \hat{\mathbf{z}}\frac{a_0}{\gamma\omega}$.

Πρόβλημα Δ

1. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι εσωτερικές δυνάμεις επομένως το ΚΜ θα κινηθεί υπό την επίδραση του εξωτερικού πεδίου, δηλαδή θα εκτελέσει παραβολή της μορφής

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{KM}(0) + \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

όπου το $\mathbf{r}_{KM}(0)$ εξαρτάται απ΄τις μάζες των σωματιδίων και δεν συμπίπτει αναγκαστικά με το $\mathbf{r_0}$. Βρίσκεται πάντως κάπου εντός του αρχικού πολυγώνου.

2.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$$

αφού το σύστημα δεν έχει εσωτερική στροφορμή (ιδιοστροφορμή) ως προς το ΚΜ του, λόγω κοινής ταχύτητας όλων των σωματιδίων:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1} Nm_i\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_0 = \left(\sum_{i=1} Nm_i\mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v}_0 = M\mathbf{R}'_{KM} \times \mathbf{v}_0 = 0$$

η δε ροπή του βάρους των σωματιδίων ως προς το ΚΜ είναι και αυτή 0 για τον ίδιο λόγο. Στην παραπάνω σχέση τονούμενες είναι οι θέσεις ως προς το ΚΜ. Δεδομένου ότι το σημείο ως προς το οποίο θα υπολογίσουμε την στροφορμή είναι η αρχική θέση του ΚΜ θα έχουμε

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = M\left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2\right) \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t) = M\mathbf{v}_0 \times \mathbf{g}\frac{t^2}{2}$$

3. Για να μην πειραχτεί το κανονικό πολύγωνο θα πρέπει οι διαστάσεις του όλες να ανοίγουν ή να κλείνουν ομοιόμορφα, οπότε ή θα πρέπει να είναι όλες οι μάζες ίδιες και όλες οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ίδιες, ή οι μάζες διαφορετικές, αλλά ίδιες στα ζευγάρια στις απέναντι κορυφές του πολυγώνου και οι αλληλεπιδράσεις να ασκούνται μόνο μεταξύ των μελών κάθε τέτοιου ζευγαριού με τρόπο κατάλληλο ώστε όλα τα ζευγάρια να κλείνουν ή να ανοίγουν ομοιόμορφα. Για παράδειγμα σε κάθε ζευγάρι m, m η δύναμη αλληλεπίδρασης να είναι $mf(r)\hat{\mathbf{r}}$ όπου $\mathbf{r}$ η απόσταση που τα χωρίζει. στην περίπτωση αυτή όλα θα απομακρύνονταν από το κέντρο του πολυγώνου ακολουθώντας την εξίσωση $\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$.