ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

25 Σεπτεμβρίου 2017

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

ΘΕΜΑ Α Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο $x - y$ υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση (x_0, y_0) και κινείται με ταχύτητα $(0, v_0)$.

1. Αποδείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ είναι σταθερή και υπολογίστε την τιμή αυτής βάσει των αρχικών συνθηκών του προβλήματος.
2. Αφού κατασκευάσετε τις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου (στον x και στον y άξονα αντίστοιχα) δείξτε από τις εξισώσεις ότι οι ποσότητες $\mathcal{E}_x = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2$ και $\mathcal{E}_y = \dot{y}^2 + \omega^2 y^2$ είναι σταθερές της κίνησης.
3. Υπολογίστε το εύρος κίνησης του σωματιδίου στον x- και στον y-άξονα, δηλαδή καθορίστε τα σ_x, σ_y (έτσι ώστε $x(t) \in [-\sigma_x, \sigma_x]$ και $y(t) \in [-\sigma_y, \sigma_y]$), ως συναρτήσεις των $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$.
4. Βρείτε το μακρινότερο και το κοντινότερο σημείο της τροχιάς του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$. Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε τις σταθερές $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ και τη στροφορμή που βρήκατε παραπάνω.

ΘΕΜΑ Β Ένα σωματίδιο μάζας m αφήνεται ελεύθερο να πέσει από απόσταση r_0, στο βαρυτικό πεδίο ενός σφαιρικού πλανήτη με ομογενή πυκνότητα, συνολικής μάζας M και ακτίνας $R < r_0$. (Το σωματίδιο είναι αρχικά ακίνητο. Θεωρήστε ότι $M >> m$, ώστε να μπορεί κανείς να θεωρήσει τον πλανήτη πάντοτε ακίνητο.)

1. Αν η πυκνότητα του πλανήτη δεν ήταν σταθερή αλλά μεταβαλλόταν με την ακτίνα ($\rho(r)$), η πτώση του σωματιδίου μέχρι να χτυπήσει τον πλανήτη θα μπορούσε να αποκαλύψει την ιδιαιτερότητα αυτή του πλανήτη;
2. Μόλις το σωματίδιο πλησιάσει στην επιφάνεια του πλανήτη, οδηγείται μέσω ενός σωλήνα (στον οποίο κινείται χωρίς τριβές) σε εφαπτομενική στην επιφάνεια του πλανήτη κίνηση, δηλαδή η κίνηση του σωματιδίου από ακτινική μετατρέπεται σε κάθετη στην ακτίνα. Να υπολογισθεί η στροφορμή του σωματιδίου μετά την εκτροπή του.
3. Δεδομένου ότι στη συνέχεια η τροχιά του σωματιδίου είναι τέτοια ώστε το σωματίδιο να απομακρυνθεί για κάποιο διάστημα από τον πλανήτη, τι είδους τροχιά θα εκτελέσει αυτό στη συνέχεια; Θα μπορούσε το σωματίδιο να φύγει για πάντα από το βαρυτικό πεδίο του πλανήτη; Σχεδιάστε την τροχιά που προκύπτει και προσδιορίστε το μήκος του μεγάλου άξονα.
4. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα του πλανήτη (ως κλάσμα της r_0), ώστε η τροχιά να είναι αυτή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα; Τι θα συνέβαινε στο σωματίδιο αν η ακτίνα του πλανήτη ξεπερνούσε τη μέγιστη αυτή τιμή;

ΘΕΜΑ Γ Θέλουμε να εξετάσουμε το εξής παράδοξο: Στο εσωτερικό ενός σφαιρικού ομογενούς φλοιού το βαρυτικό πεδίο είναι μηδενικό, ενώ στο εξωτερικό αυτού υπάρχει βαρυτικό πεδίο που κατευθύνεται προς το εσωτερικό (ελκτικό πεδίο). Στο όριο που η ακτίνα μιας σφαίρας όμως τείνει στο άπειρο, η επιφάνεια της σφαίρας τείνει σε μια επίπεδη επιφάνεια. Το βαρυτικό όμως πεδίο μιας άπειρης επίπεδης επιφάνειας είναι το ίδιο και από τις δύο πλευρές της επιφάνειας!

1. Ποια είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου $g_{\sigma\varphi}$ ενός λεπτού σφαιρικού φλοιού ακτίνας R και επιφανειακής πυκνότητας μάζας σ σε απόσταση h πάνω από την επιφάνεια της σφαίρας.

2. Υπολογίστε τώρα την ένταση του βαρυτικού πεδίου g_{ε} μιας άπειρης λεπτής επίπεδης επιφάνειας επιφανειακής πυκνότητας μάζας σ σε απόσταση h από την επιφάνεια αυτή.

3. Δείξτε ότι στο όριο που $R >> h$ είναι $g_{\sigma\varphi} = 2g_{\varepsilon}$ και αφού στο εσωτερικό της σφαίρας το πεδίο είναι μηδενικό, το άθροισμα των εντάσεων στις δύο πλευρές της επιφάνειας (και της σφαιρικής και της επίπεδης) είναι ίδιο. Προσπαθήστε να επιχειρηματολογήσετε γιατί αν και το άθροισμα των εντάσεων είναι το ίδιο στις δύο περιπτώσεις, η περίπτωση της επίπεδης πλάκας είναι συμμετρική, αλλά όχι η σχεδόν επίπεδη σφαιρική επιφάνεια.

4. Υπολογίστε την αρνητική σημειακή μάζα που θα πρέπει κανείς να τοποθετήσει στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού (ως συνάρτηση των σ και R), έτσι ώστε η περιοχή ($h << R$) γύρω από κάποιο σημείο του σφαιρικού φλοιού (εκατέρωθεν του φλοιού) να παρουσιάζει το ίδιο βαρυτικό πεδίο με αυτό της επίπεδης επιφάνειας με επιφανειακή πυκνότητα σ.

ΘΕΜΑ Δ Ένα σώμα, μάζας m, κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}).$$

με $\omega =$ σταθ και $\hat{\mathbf{n}}$ κάποιο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα.

1. Κάποιος ισχυρίζεται ότι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το $\hat{\mathbf{n}}$ θα μπορούσε να ληφθεί ίσο με το $\hat{\mathbf{z}}$ ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Εξηγήστε με απλά λόγια πως μια τέτοια θεώρηση πράγματι δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα γενικότητας.

2. Αναλύστε την εξίσωση κίνηση σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ο άξονας z του οποίου είναι κατά μήκος του $\hat{\mathbf{n}}$) και βρείτε την κίνηση του σωματιδίου δεδομένων κάποιων τυχαίων αρχικών συνθηκών $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$.

3. Ξαναγράψτε τη θέση του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου σε διανυσματική μορφή $\mathbf{r}(t)$ με παραμέτρους τα $\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0), \hat{\mathbf{n}}$.

4. Τώρα υποθέστε ότι το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της παραπάνω δύναμης σε ένα μέσο το οποίο ασκεί αντίσταση της μορφής $\mathbf{F}_{\alpha\nu\tau} = -2\gamma m\mathbf{v}$. Βρείτε την τελική θέση του σωματιδίου (μετά από άπειρο χρόνο).

ΘΕΜΑ Α

1. Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι ακτινική :

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -m\omega^2(x,y) = -m\omega^2\mathbf{r}.$$

και συνεπώς η ροπή ως προς την αρχή των αξόνων μηδενική:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}\times\mathbf{r} = 0\ .$$

Συνεπώς η στροφορμή του σωματιδίου $\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ είναι και αυτή σταθερή

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = -m^2\omega^2\mathbf{r}\times\mathbf{r} = 0\ .$$

και λαμβάνει την τιμή $L = mx_0v_0$.

2. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\ \ ,\ \ \ddot{y} = -\omega^2 y\ \ .$$

Τώρα

$$\frac{d\mathcal{E}_x}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x}+\omega^2 x) = 0\ ,$$
$$\frac{d\mathcal{E}_y}{dt} = 2\dot{y}\ddot{y} + 2\omega^2 y\dot{y} = 2\dot{y}(\ddot{y}+\omega^2 y) = 0\ .$$

Συνεπώς διατηρούνται και κάθε χρονική στιγμή έχουν τις τιμές:

$$\mathcal{E}_x = \omega^2 x_0^2\ \ ,\ \ \mathcal{E}_y = v_0^2 + \omega^2 y_0^2\ .$$

3. Αφού όταν το σωματίδιο φτάνει στις ακραίες θέσεις η ταχύτητα μηδενίζεται, είναι

$$\sigma_x = |x_0|\ \ ,\ \ \sigma_y = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + y_0^2}\ .$$

4. Στα σημεία που η απόσταση είναι μέγιστη ή ελάχιστη η ταχύτητα είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης και συνεπώς αν αυτή η απόσταση είναι r και το μετρο της ταχύτητας v απο τη διατήρηση στροφορμής

$$v = \frac{x_0 v_0}{r}\quad ,$$

Αν $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ τότε η διατήρηση ενέργειας απαιτεί:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y &= v_0^2 + \omega^2 r_0^2 = \mathcal{E}_0\\ &= v^2 + \omega^2 r^2\\ &= \frac{x_0^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

και οι στάσιμες αποστάσεις είναι λύσεις της:

$$r^4 - \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} r^2 + \frac{x_0^2 v_0^2}{\omega^2} = 0$$

που έχει ρίζες:

$$r^2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2\omega^2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{4\omega^4} - \frac{x_0^2 v_0^2}{\omega^2}}$$

Αυτό δίνει πάντα δύο πραγματικές ρίζες, διότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^2 - 4\omega^2 x_0^2 v_0^2 &\geq (v_0^2 + \omega^2 x_0^2)^2 - 4\omega^2 x_0^2 v_0^2 \\
&= (v_0^2 - \omega^2 x_0^2) \geq 0 \ .
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Β

1. Η σφαιρική κατανομή μάζας ανεξάρτητα αν είναι ομογενής ή αλλάζει με την απόσταση οδηγεί σε ίδιο βαρυτικό πεδίο στο εξωτερικό του πλανήτη (δεδομένου ότι η συνολική μάζα αυτού είναι πάντα ίδια). Επομένως η κίνηση του σωματιδίου εκτός του πλανήτη δεν διαφοροποιείται στις δύο περιπτώσεις.

2. Η ταχύτητα που έχει αποκτήσει το σωματίδιο κατά την είσοδο του στο σωλήνα είναι (από διατήρηση ενέργειας)

$$-\frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{R}$$

δηλαδή

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{r_0}}.$$

Επομένως η στροφορμή του μετά την εκτροπή είναι $L = mvR$.

3. Το σωματίδιο έχει αρνητική ενέργεια επομένως είναι δέσμιο του βαρυτικού πεδίου. Συνεπώς η τροχιά του θα είναι ελλειπτική με περιήλιο το σημείο εκτροπής σε ακτίνα R. Ο μεγάλος άξονας συμπίπτει θα σχετίζεται με την ενέργεια

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{GMm}{r_0}$$

δηλαδή ο μεγάλος άξονας θα συμπίπτει με r_0.

4. Αφού $R = r_{\pi\epsilon\rho} < r_{\alpha\varphi}$ και $r_{\pi\epsilon\rho} + r_{\alpha\varphi} = 2a = r_0$ θα πρέπει $R < r_0/2$. Αν δεν ισχύει η παραπάνω σχέση το αρχικό σημείο καθίσταται αφήλιο, οπότε η τάση θα είναι να κινηθεί το σωματίδιο σε μικρότερες ακτίνες, δηλαδή προς το εσωτερικό του πλανήτη. Αν αυτός είναι σκληρός το σωματίδιο θα ολισθήσει στην επιφάνειά του.

ΘΕΜΑ Γ

1.

$$g_{\sigma\varphi} = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{G 4\pi R^2 \sigma}{(R+h)^2}$$

2. Από Gauss

$$2\mathbf{g}_{\epsilon\pi} \cdot \mathbf{S} = -4\pi G \sigma S \Rightarrow |g_{\epsilon\pi}| = 2\pi G \sigma.$$

(το h δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα).

3. Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι προφανές το ζητούμενο αν $R+h \simeq R$. Αυτό λοιπόν που είναι κοινό στις 2 περιπτώσεις είναι το άθροισμα των εκατέρωθεν εντάσεων. Στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας για λόγους συμμετρίας η ένταση θα πρέπει να είναι ίδια στις 2 πλευρές. Στο σφαιρικό φλοιό η συμμετρία αυτή διαταράσσεται αφού ο φλοιός είναι κυρτός προς τη μια πλευρά.

4. Αν θέλουμε να κάνουμε το σφαιρικό φλοιό να μοιάζει περισσότερο με την επίπεδη πλάκα θα πρέπει να προσθέσουμε μια ένταση ίση με το μισό της εξωτερικής πλευράς με φορά αντίθετη αυτής. Αυτό θα μπορούσε να προέλθει από μια αρνητική μάζα ίση με το μισό ολόκληρου του σφαιρικού φλοιού, δηλαδή

$$m' = -\frac{1}{2}\sigma 4\pi R^2.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Ναι μπορούμε αφού έχουμε δικαίωμα να στήσουμε το σύστημα συντεταγμένων όπως επιθυμούμε. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε τον z-άξονα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$.

2.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{x} &= -m\omega^2 z \end{aligned} \tag{1}$$

επομένως

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t \\ y &= y_0 + v_{y0}t \\ z &= z_0 \cos\omega t + \frac{v_{z0}}{\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{2}$$

3. Από τις προηγούμενες εκφράσεις μπορούμε να ανασυνθέσουμε το διάνυσμα ως ακολούθως. Οι μεν x-, y-συνιστώσες είναι αυτές που είναι κάθετες στο $\hat{\mathbf{z}}$ οπότε

$$\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}_0) + [\mathbf{v}_0 - \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{v}_0)]t$$

οι δε παράλληλη στο $\hat{\mathbf{z}}$ είναι

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r} = (\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}_0)\cos\omega t + (\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{v}_0)\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

Τώρα μπορούμε να προσθέσουμε τις δύο σχέσεις φροντίζοντας να αντικαταστήσουμε το $\hat{\mathbf{z}}$ με το $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0)(\cos\omega t - 1) + \mathbf{v}_0 t + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_0)\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - 1\right).$$

4. Στην περίπτωση αυτή η ταλάντωση θα σβήσει με την πάροδο του χρόνου και θα απομείνει μόνο η κίνηση κάθετα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ η οποία και αυτή θα σταματήσει σε κάποιο σημείο. Έτσι η τελική θέση θα είναι

$$\mathbf{r}(t\to\infty) = \mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_0) + [\mathbf{v}_0 - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_0)]/(2\gamma)$$

αφού η κίνηση κάθετα στον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$ θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_{0\perp}\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma}.$$