ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

26 Σεπτεμβρίου 2016

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα με συντομία.
Στις παρενθέσεις δίνονται τα μόρια του κάθε ερωτήματος.
Καλή σας επιτυχία.

1. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται με ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας R με ταχύτητα $|\mathbf{v}|$. Να υπολογιστεί η στροφορμή του, ως συνάρτηση του χρόνου, ως προς κάποιο σημείο Α που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r_0}$ σε σχέση με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. **[8]**

2. Ένα σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|)\hat{\mathbf{r}} - k\mathbf{v}$, όπου $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η στροφορμή του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου. **[6]**

3. Η θέση ενός σωματιδίου κινούμενου στο επίπεδο x, y, ως προς κάποιο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς K είναι $(1, 1)$, ενώ κάποιο άλλο μετρούμενο μέγεθος του σωματιδίου δίδεται από τη δυάδα $(0, 1)$. Σε ένα άλλο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς K΄, το οποίο είναι ακίνητο ως προς το πρώτο και έχει την ίδια αρχή με το πρώτο, η θέση του σωματιδίου είναι $(\sqrt{2}, 0)$ και η αντίστοιχη δυάδα είναι $(1, 0)$. Εξηγήστε γιατί το μετρούμενο αυτό μέγεθος **δεν** είναι διάνυσμα. **[6]**

4. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, αν το K΄ δεν ήταν ακίνητο, αλλά είχε την ίδια αρχή αξόνων με το K, μπορείτε να σκεφθείτε κάποιο διανυσματικό μέγεθος που αν μετρούνταν στο K να μετασχηματίζεται όπως η δυάδα στο προηγούμενο ερώτημα; Ποια θα ήταν τότε η ταχύτητα του K΄ ως προς το K; **[8]**

5. Σωματίδιο μάζας m κινείται στον 3-διάστατο χώρο υπό την επιρροή δύναμης $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Δείξτε ότι η κίνησή του είναι πάντοτε φραγμένη και προσδιορίστε συναρτήσει της αρχικής ενέργειας την ακτίνα της σφαίρας εντός της οποίας βρίσκεται συνεχώς το σωματίδιο. **[8]**

6. Δείξτε ότι η κίνηση του πρηγουμένου ερωτήματος είναι πάντοτε επίπεδη και ότι το σωματίδιο μπορεί να εκτελεί κυκλική κίνηση. Βρείτε κατάλληλες αρχικές συνθήκες για να συμβαίνει αυτό (η κυκλική κίνηση). **[6]**

7. Μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής, ενώ ταλαντώνεται, αισθάνεται ξαφνικά σταθερή εξωτερική δύναμη F_0. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κλάσμα του πλάτους της ταλάντωσης μετά την εφαρμογή του πεδίου σε σχέση με πριν. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του κλάσματαος; Δίδεται η εξωτερική σταθερή δύναμη F_0, το πλάτος x_0 της ταλάντωσης αρχικά και η συχνότητα του ταλαντωτή ω. Μπορεί ο ταλαντωτής να μείνει ακίνητος μετά την εφαρμογή της δύναμης; **[8]**

8. Μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής μάζας m με παράγοντα απόσβεσης $\gamma = \omega$ (αναλωτική δύναμη $-2m\gamma v$) δέχεται εξωτερική διέγερση $F = F_0 \sin(\omega t)$, όπου ω η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, απουσία απόσβεσης. Να υπολογιστεί η θέση του ταλαντωτή τη στιγμή $t_1 = 200\pi/\omega$, αν αρχικά ($t = 0$) η θέση ήταν τάξης $F_0/(m\omega^2)$ και η ταχύτητα τάξης $F_0/(m\omega)$. Θα μπορούσατε να υπολογίσετε τη θέση του, τη στιγμή $t_2 = \pi/\omega$; **[8]**

9. Ένας πύραυλος στο διάστημα (ελεύθερος από εξωτερικά πεδία) έχει ταχύτητα $v(t)$ και μάζα $m(t)$, συναρτήσει του χρόνου t. Δείξτε ότι η ποσότητα

$$P = m(t)v(t) - \int_0^t (v(\tau) - U_0)\dot{m}(\tau)d\tau$$

διατηρείται. U_0 είναι η σταθερή ταχύτητα εκτόξευσης (προς τα πίσω) των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο και $\dot{m} < 0$ ο ρυθμός μεταβολής της μάζας των καυσίμων εντός του πυραύλου. Δείξτε ότι αρχικά η κινητική ενέργεια του πυραύλου μεγαλώνει, αλλά όταν ο πύραυλος αποκτήσει ταχύτητα $2U_0$, η κινητική του ενέργεια αρχίζει να μειώνεται. **[8]**

10. Ένα σωματίδιο μπορεί να κινείται μέσα στην ύλη χωρίς καμία τριβή. Αν αφεθεί ελεύθερο στην επιφάνεια της Γης, σε πόσο χρονικό διάστημα θα φτάσει στον αντίποδα του αρχικού σημείου; Το σωματίδιο αισθάνεται μόνο τη βαρυτική έλξη της Γης. [Θεωρήστε τη Γη ως τέλεια σφαίρα ακτίνας R, με μάζα M ομογενώς κατανεμημένη σε ολόκληρο τον όγκο αυτής.] **[8]**

11. Απαντήστε στο προηγούμενο ερώτημα, αν όλη η μάζα της Γης βρίσκεται στην επιφάνεια αυτής και το εσωτερικό της είναι κούφιο. **[6]**

12. Δώστε μια πιο ακριβή απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρώντας το ακόλουθο πιο φυσικό πρόβλημα: Η μάζα της Γης είναι πράγματι κατανεμημένη σε ένα λεπτό φλοιό στην επιφάνειά της, ο οποίος έχει πολύ μικρό ($H << R$) πάχος H, αλλά όχι μηδενικό. Το εσωτερικό του φλοιού αυτού παραμένει κενό. **[10]**

13. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση δύναμης της μορφής

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

όπου $\boldsymbol{\omega}$ κάποιο σταθερό διάνυσμα (μπορείτε να φανταστείτε ένα μαγνητικό πεδίο **B** επί κάποιο μοναδιαίο φορτίο στη θέση του $\boldsymbol{\omega}$). (α) Γνωρίζουμε ότι η κίνηση υπό την επίδραση μιας τέτοιας δύναμης είναι μια κυλινδρική έλικα η οποία έχει ως άξονα τον φορέα του $\boldsymbol{\omega}$. Ποιο είναι το βήμα της έλικας, δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο σημείων της έλικας που διαφέρουν κατά γωνία $\phi = 2\pi$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τον άξονα z κατά μήκος του $\boldsymbol{\omega}$; (β) Δείξτε ότι αν η $\mathbf{r}(t)$ ικανοποιεί την ίδια μορφή εξίσωσης με την εξίσωση κίνησης για τη $\mathbf{v}(t)$, τότε η τροχιά είναι κυκλική και η τροχιά αυτή ικανοποιεί και την εξίσωση της $\mathbf{v}$. (γ) Γιατί προκύπτει στη μία περίπτωση κύκλος και στην άλλη έλικα; [Υπ: Σκεφθείτε τι απαιτείται για να ικανοποιεί η $\mathbf{r}$ την ίδια εξίσωση με αυτήν που ικανοποιεί η $\mathbf{v}$.] **[10]**

Απαντήσεις

1. Η θέση του σωματιδίου ως προς το Α είναι $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r_0}$, όπου το $\mathbf{r}(t)$ διαγράφει ομαλή κυκλική κίνηση δηλαδή είναι $\hat{\mathbf{r}}(t)R$ και η ταχύτητα είναι $v\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Έτσι η στροφορμή είναι

$$\mathbf{L} = m(R\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r_0}) \times v\hat{\boldsymbol{\theta}} = mRv\hat{\mathbf{z}} + mv\mathbf{r_0} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ο τελευταίος όρος ισούται με $mv|\mathbf{r_0}|\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$ αν αρχικά τα διανύσματα $\mathbf{r_0}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ήταν κάθετα. Έτσι θα είναι

$$\mathbf{L}(t) = \hat{\mathbf{z}}(mvR + mv|\mathbf{r_0}|\sin(\omega t))$$

2. Ο πρώτος όρος της δύναμης αφορά σε κεντρικό δυναμικό καιεπομένως διατηρεί τη στροφορμή. Όχι όμως και ο δεύτερος.

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

οπότε

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (-k\mathbf{v}) = -(k/m)\mathbf{L}$$

Επομένως $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 e^{-kt/m}$.

3. Προφανώς το νέο σύστημα είναι στραμένο κατά γωνία $\pi/4$ σε σχέση με το Κ, οπότε ο πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Πράγματι ο πίνακας αυτός μετατρέπει το $(1,1)^\top$ σε $(\sqrt{2},0)^\top$, αλλά μετατρέπει τη δυάδα (αν είναι διάνυσμα), σε $(1/\sqrt{2})(1,1)^\top$. Επομένως δεν είναι διάνυσμα η δυάδα. Εξάλλου δεν έχει το ίδιο μέτρο στα δύο συστήματα.

4. Αν το ένα σύστημα κινείται σε σχέση με το άλλο, θα μπορούσε να είναι η δυάδα ένα διάνυσμα που αλλάζει σε κινούμενο σύστημα αναφοράς, για παράδειγμα η ίδια η ταχύτητα ενός κινητού.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_{\text{Κ'Κ}}$$

Θα μπορούσε λοιπόν η δυάδα να είναι το διάνυσμα της ταχύτητας ενός κινητού αν

$$(1,0)^\top = (1/\sqrt{2})(1,1)^\top - \mathbf{V}_{\text{Κ'Κ}}$$

οπότε

$$\mathbf{V}_{\text{Κ'Κ}} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$$

Αν το δεύτερο σύστημα δεν ήταν αδρανειακό θα μπορούσε η εν λόγω δυάδα να είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης (διαφορετικό στα δύο συστήματα).

5. $$E = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}k|\mathbf{r}|^2,$$

   επομένως $|\mathbf{r}|^2 < 2E/k$, δηλαδή περιορίζεται εντός της αντίστοιχης σφαίρας.

6. Λόγω κεντρικού πεδίου είναι επίπεδη η κίνηση. Για να είναι κυκλική θα πρέπει

   $$mv^2/R = kR$$

   δηλαδή κατάλληλες αρχικές συνθήκες είναι $\mathbf{r}(0) = R\hat{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{v} = \pm\sqrt{k/m}R\hat{\mathbf{y}}$.

7. Η κίνησή του μετά την εφαρμογής της δύναμης είναι

   $$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F_0}{m\omega^2}[1 - \cos(\omega t)]$$

   όπου x_0, v_0 η θέση και η ταχύτητα του ταλαντωτή όταν δρά η δύναμη. Το πλάτος της ταλάντωσης πριν ήταν

   $$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

   και μετά

   $$A' = \sqrt{(x_0 - \frac{F_0}{m\omega^2})^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

   Για να είναι το A'/A μέγιστο θα πρέπει το x_0 να είναι αρνητικό και το v_0 να είναι 0, οπότε

   $$\left.\frac{A'}{A}\right|_{\max} = \frac{|x_0| + F_0/m\omega^2}{|x_0|}$$

   Ελάχιστη γίνεται όταν $x_0 + F_0/m\omega^2 = 0$ και $v_0 = 0$. Τότε μηδενίζεται το πλάτος της ταλάντωσης μετά.

8. $$\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

   με λύση

   $$x(t) = e^{-\omega t}(A + Bt) - \frac{F_0}{2m\omega^2}\cos(\omega t)$$

   Το πρώτο μέρος είναι η ομογενής λύση και η δεύτερη η ειδική όπως εύκολα βρίσκει κανείς αν θέσει δοκιμαστική ειδική λύση $C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t)$. Με το πέρασμα του χρόνου η ομογενής λύση σβήνει οπότε

   $$x(t_1) \simeq -\frac{F_0}{2m\omega^2}$$

   Για $t = t_2$ δεν έχει προλάβει να σβήσει η ομογενής οπότε δεν μπορούμε να ξέρουμε τη θέση αν δεν ξέρουμε ακριβώς τις αρχικές συνθήκες.

9. Η ποσότητα αυτή είναι η ορμή του συστήματος πύραυλος καυσαέρια η οποία και διατηρείται. Αν για t η ορμή του πυραύλου είναι $P(t) = mv$, την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή θα είναι $P(t+dt) = (m-(-dm))(v+dv) + (-dm)(v-U_0)$. Αφού είναι απομονωμένο το σύστημα $P(t) = P(t+dt)$ δηλαδή
$$dmU_0 + mdv = 0$$
Αν ολοκληρώσει κανείς αυτή τη σχέση θα έχει
$$P = \mathrm{c}onst = \int (mdv + dmU_0) = \int [d(mv) - dm(v-U_0)] = mv - \int dm(v-U_0)$$
που είναι το ζητούμενο. Επίσης
$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2 + mv\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}v[\frac{v}{2} - U_0]$$
Αφού $dm/dt < 0$ αρχικά που $v/2 < U_0$ είναι $dK/dt > 0$, αλλά όταν $v > 2U_0$, $dK/dt < 0$.

10. Η βαρύτητα οφείλεται μόνο στη σφαίρα εντός του εκάστοτε r, οπότε $\mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{r}}GmM(r^3/R^3)/r^2 = -m\omega^2\hat{\mathbf{r}}$ με $\omega^2 = GM/R^3$. Επομένως εκτελεί αρμ. ταλάντωση και θα βρεθεί στο αντιδιαμετρικό σημείο σε μισή περίοδο
$$t = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}$$

11. Μόλις μπει μέσα στη Γη εξαφανίζεται η δύναμη. Για να διασχίσει τον απειροστό φλοιό δεν περνά χρόνος όποτε μπαίνει με ταχύτητα 0, οπότε και δεν κινείται στη συνέχεια. Ο χρόνος τώρα είναι άπειρος.

12. Το βαρυτικό πεδίο είναι
$$F = \frac{GmM}{r^2}\frac{r^3 - (R-H)^3}{R^3 - (R-H)^3}$$
Για $r = R - H + x \simeq R$ με $x < H << R$.
$$F = \frac{GmM}{R^2}\frac{3x(R-H)^2}{3H(R-H)^2} = \frac{GMm}{R^3}x$$
Επομένως
$$\ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x$$
Ο χρόνος που απαιτείται για να πάει από το $x =$ sto $x = 0$ είναι ένα τέταρτο της περιόδου και άλλο τόσο για να εξέλθει από το φλοιό στο αντιδιαμετρικό σημείο, σύνολο
$$t_{in-out} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}.$$

Η ταχύτητα που αποκτά διαπερνώντας το φλοιό είναι

$$v = \omega H = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} H$$

οπότε

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}} + \frac{2(R-H)}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}} H}$$

Βλέπουμε ότι για $H \to 0$ ο χρόνος γίνεται άπειρος όπως βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

13. Η εξίσωση

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

οδηγεί σε κυκλική κίνηση για το $\mathbf{v}$ με γωνιακή ταχύτητα $|\boldsymbol{\omega}|$. Επομένως η ελικοειδής κίνηση γίνεται με αυτή τη γωνιακή ταχύτητα. Το βήμα λοιπόν είναι

$$v_{\parallel} T = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}| \frac{2\pi}{|\boldsymbol{\omega}|} = 2\pi \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2}$$

Η παραπάνω εξίσωση για το $\mathbf{v}$ είναι και εξίσωση για το $\mathbf{r}$ αν μετά την ολοκλήρωση η σταθερά είναι 0, δηλαδή

$$\int \dot{\mathbf{v}} = \int \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

δηλαδή

$$\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}(0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(0)$$

Θα πρέπει λοιπόν

$$\dot{\mathbf{r}}(0) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(0) = 0$$

Αρκεί λοιπόν η αρχική ταχύτητα να είναι κάθετη στο $\boldsymbol{\omega}$ και στο $\mathbf{r}(0)$ και με τιμή $|\mathbf{v}(0)| = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}(0)| \sin\theta$. Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση είναι κυκλική και όχι ελικοειδής.