ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

2 Σεπτεμβρίου 2010

Απαντήστε και στα 10 ερωτήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

1. Ένας αρμονικός ταλαντωτής μάζας m, συχνότητας ω_0 και συντελεστή απόσβεσης $\gamma = \delta\ \omega_0$ (το γ είναι ο όρος που μπαίνει πολλαπλασιασμένος με τον παράγοντα 2 στην εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή) όταν υπόκειται σε σταθερή δύναμη F_0 φθάνει σε κάποια τελική απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας. Πόση είναι αυτή; Διεγείρουμε τώρα τον ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη $F_0 \cos(\omega_0 t)$. Αν η μέγιστη απομάκρυνση στην οποία φτάνει καθώς ταλαντώνεται ύστερα από αρκετά μεγάλο χρόνο είναι ίση με αυτή που υπολογίσατε προηγουμένως ποια είναι η τιμή του αριθμητικού συντελεστή δ;

2. Το δυναμικό μέσα στο οποίο κινείται ένα σωματίδιο μάζας m είναι $V(\vec{r}) = \vec{F}_0 \cdot \vec{r}/m$. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, τον στροβιλισμό αυτής και το έργο αυτής κατά μήκος της διαδρομής $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1) \to (0,0,0)$.

3. Σε ένα σωματίδιο ασκείται δύναμη της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{k} \times \hat{r}/r$ όπου $r = |\vec{r}|$, $\hat{r}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα και $\hat{k}$ ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα. Ελέγξτε αν διατηρείται η στροφορμή του σωματιδίου και πώς κινείται το σωματίδιο, αν αρχικά αυτό βρίσκεται επί του άξονα που ορίζεται από το διάνυσμα $\hat{k}$ και κινείται κατά μήκος του ίδιου άξονα.

4. Δύο πλανήτες αποτελούμενοι και οι δύο από το ίδιο υλικό πυκνότητας ρ έχουν το σχήμα τέλειου κύβου μόνο που ο ένας έχει διπλάσια ακμή από τον άλλο. Ποια η σχέση των εντάσεων των βαρυτικών επιταχύνσεων g_1/g_2 πάνω σε μια από τις κορυφές των κύβων. Δικαιολογήστε προσεκτικά το αποτέλεσμά σας.

5. Ένα βαγόνι μάζας M και μήκους L έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και όλη η μάζα του βρίσκεται ομογενώς κατανεμημένη στα τοιχώματά του. Το βαγόνι μπορεί να κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές επάνω σε οριζόντιες ράγες. Το βαγόνι περιέχει στην άνω αριστερή γωνία του μια ποσότητα υλικού μάζας M πολύ μικρών διαστάσεων. Η ποσότητα αυτή διοχετεύεται μέσω σωλήνα στην κάτω δεξιά γωνία του βαγονιού πάλι σε χώρο μικρών διαστάσεων. Να βρεθεί η τελική μετατόπιση του βαγονιού. [Υπόδειξη: Διερευνήστε την κίνηση του κέντρου μάζας.]

6. Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ω_0 (δίχως τριβές) και μάζας m υπόκειται σε εξωτερική διέγερση η οποία είναι μια σειρά από δέλτα συναρτήσεις της μορφής

$$F(t) = mV \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta(t - 2\pi n/\omega_0),$$

όπου V κάποια σταθερά. Να υπολογίσετε τη μέγιστη απομάκρυνση του ταλαντωτή από το σημείο ισορροπίας κατά το χρονικό διάστημα $2\pi N/\omega_0 < t < 2\pi(N+1)/\omega_0$, αν αρχικά ($t = 0$) ο ταλαντωτής βρισκόταν ακίνητος στη θέση ισορροπίας του.

7. Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης οριζόντια με κατάλληλη ταχύτητα ώστε να εκτελέσει μια ελλειπτική τροχιά με περίγειο την επιφάνεια της Γης και απόγειο σε απόσταση NR από το κέντρο της Γης (R είναι η ακτίνα της Γης). Αφού βρείτε την ταχύτητα εκτόξευσης υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο περίγειο και στο απόγειο. Σχολιάστε τη σχέση των δύο ακτίνων καμπυλότητας.

8. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στο εσωτερικό ενός νέφους αερίων το οποίο παρουσιάζει σφαιρικά ομογενή κατανομή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της απόστασης από το κέντρο του νέφους. Βρείτε πως μεταβάλλεται η πυκνότητα του νέφους ρ ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του.

9. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση του ελκτικού πεδίου $\vec{F} = -f_0\hat{r}$ όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Υπολογίστε και σχεδιάστε τη μορφή του ενεργού δυναμικού. Βρείτε επίσης την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σωματίδιο αν δίδεται η στροφορμή L του σωματιδίου.

10. (Επί του ίδιου προβλήματος με το ερώτημα (9)). Αν η στροφορμή του σωματιδίου είναι L και η ενέργεια ελαφρώς μεγαλύτερη από αυτήν που απαιτείται για να εκτελεί αυτό κυκλική κίνηση, βρείτε τη συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από την ακτίνα της κυκλικής κίνησης. Συγκρίνετέ την με τη συχνότητα περιστροφής του σωματιδίου γύρω από το κέντρο του πεδίου και με βάσει το αποτέλεσμα σχεδιάστε ποιοτικά τη μορφή της τροχιάς (μια περιστροφή αυτού). Είναι αυτή κλειστή;

ΛΥΣΕΙΣ

1. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Επομένως για να είναι ίδιο το πλάτος για $\omega = 0$ (δεν πρόκειται για πλάτος ταλάντωσης σε αυτή την περίπτωση αλλά για τελική θέση του ταλαντωστή) και για $\omega = \omega_0$ θα πρέπει

$$(\omega_0^2 - 0^2)^2 + (2\gamma 0)^2 = (\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2$$

δηλαδή

$$\omega_0^2 = 4\gamma^2 = 4\delta^2\omega_0^2.$$

Επομένως $\delta = 1/2$.

2.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mV) = -\vec{F}_0$$

(V δυναμικό, Vm δυναμική ενέργεια). Όντας σταθερή η δύναμη ο στροβιλισμός της είναι 0 και επομένως το έργο σε κλειστή διαδρομή είναι 0.

3.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\hat{k} \times \hat{r}}{r} \neq 0.$$

Το συμπέρασμα αυτό συνάγεται από το ότι το $\hat{k} \times \hat{r}$ είναι εν γένει κάθετο στο $\vec{r}$ και επομένως σχηματίζει μη μηδενικό εξωτερικό γινόμενο με το $\vec{r}$. Αν αρχικά $\vec{r} \parallel \hat{k}$ τότε $\vec{F} = 0$, επομένως θα συνεχίσει με την ταχύτητα που έχει κατά μήκος του $\hat{k}$ και θα κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα). Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή είναι 0 και διατηρείται.

4. Εάν θεωρήσουμε έναν στοιχειώδη όγκο στη θέση (x_1, y_1, z_1) και με διαστάσεις (dx, dy, dz) στον πρώτο κύβο και έναν στοιχειώδη όγκο στη θέση $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ και με διαστάσεις $(2dx, 2dy, 2dz)$ στον δεύτερο κύβο, η μάζα του δεύτερου είναι 8πλάσια του πρώτου και βρίσκεται σε 2πλάσια απόσταση από την κορυφή. Επομένως η συμβολή στην επιτάχυνση της βαρύτητας είναι 2πλάσια στο διπλάσιο κύβο $(8/2^2)$ απ' ότι στον μικρό ενώ έχει την ίδια κατεύθυνση και στους δύο κύβους. Αυτό συμβαίνει για κάθε αντίστοιχο στοιχειώδη όγκο. Συνεπώς $g_1/g_2 = 1/2$.

5. Λόγω απουσίας εξωτερικών δυνάμεων το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο. Σε σχέση με το αριστερό άκρο του βαγονιού το κέντρο μάζας βρίσκεται αρχικά στη θέση $(M0 + ML/2)/(2M) = L/4$ και τελικά στην $(ML + ML/2)/(2M) = 3L/4$. Επομένως το βαγόνι υποχωρεί (αντίθετα με την κίνηση του υλικού) κατά $L/2$.

6. Μετά την επίδραση κάθε παλμού δύναμης η ταχύτητα του ταλαντωτή αυξάνεται κατά V. Έτσι μετά τον πρώτο παλμό $(n = 0)$ ο ταλαντωτής εκτελεί την κίνηση $x(t) = (V/\omega_0)\sin\omega_0 t$. Μετά τον δεύτερο παλμό $(n = 1)$ ο ταλαντωτής εκτελεί την κίνηση $x(t) = (2V/\omega_0)\sin(\omega_0(t - 2\pi/\omega_0))$ κοκ. Η απάντηση λοιπόν είναι $(N + 1)V/\omega_0$.

7. Από διατήρηση στροφορμής

$$V_1 R = V_2 N R$$

από διατήρηση ενέργειας

$$V_1^2/2 - GM/R = V_2^2 - GM/(NR).$$

Συνδυάζοντας

$$V_1^2/2(1 - 1/N^2) = (GM/R)(1 - 1/N)$$

δηλαδή

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GMN}{R(N+1)}}.$$

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι στο περίγειο $\mathcal{R}$ που δίδεται από

$$\frac{V_1^2}{\mathcal{R}} = \frac{GM}{R^2}$$

δηλαδή

$$\mathcal{R} = R\frac{2N}{N+1}.$$

Για $N = 1$, δηλαδή κυκλική κίνηση, $\mathcal{R} = R$ όπως είναι φυσικό. Η ίδια ακτίνα καμπυλότητας βγαίνει και στο απόγειο, το οποίο είναι φυσικό αφού η έλλειψη είναι συμμετρικό ως προς τον μικρό άξονα σχήμα.

8. Θα πρέπει

$$\frac{M(R)}{R^2} = \text{σταθ}.$$

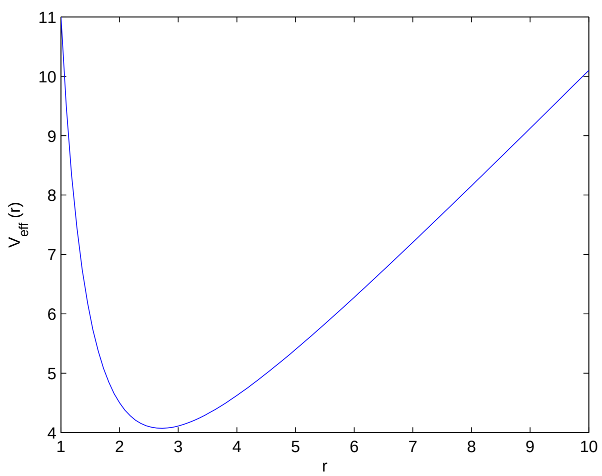
Όμως $M(R) = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$. Συνεπώς θα πρέπει η $\rho(r)$ να είναι ανάλογη με $1/r$.

9.

$$V(r) = -\int \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}' = f_0 r.$$

Το ενεργό δυναμικό λοιπόν είναι

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$



Η κυκλική τροχιά αντιστοιχεί στο ελάχιστο του ενεργού δυναμικού.

$$V'_{eff}(r_0) = 0 \Rightarrow r_0^3 = L^2/(f_0 m).$$

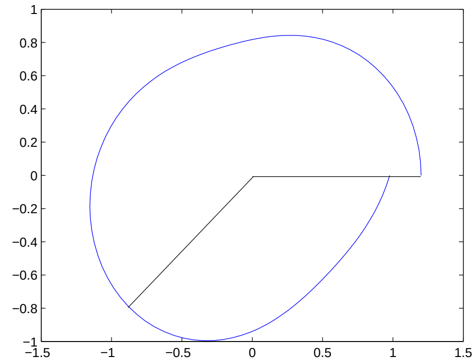
10. Οι ακτινικές ταλαντώσεις για ενέργεια μόλις μεγαλύτερη της ελάχιστης δίνονται από

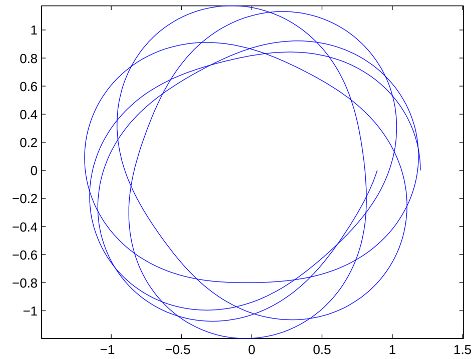
$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{eff}(r_0)}{m}} = \sqrt{3}\frac{L}{mr_0^2}$$

Η δε συχνότητα περιστροφής είναι

$$\omega_\phi = \frac{L}{mr_0}$$

θέωρώντας ότι η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική με ακτίνα r_0. Αυτό σημαίνει ότι οι ακτινικές ταλαντώσεις γίνονται με $\sqrt{3}$ φορές μεγαλύτερη συχνότητα από τη συχνότητα περιστροφής, δηλαδή μέχρι να ολοκληρωθεί μια περιστροφή έχουν γίνει $\sqrt{3} = 1.7$ ακτινικές ταλαντώσεις.





Στα σχήματα φαίνονται 1 και 5 περιστροφές. Στο πρώτο σημειώνεται η γωνία $2\pi/\sqrt{3}$ μεταξύ 2 διαδοχικών απόγειων.