ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Ι

23 Ιανουαρίου 2018

Καλή σας επιτυχία. Σύνολο πόντων **110**.

Πρόβλημα Α *Κατασκευάστε το νόμο του Gauss και την πεδιακή εξίσωση του βαρυτικού δυναμικού:*

1. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\mathcal{S}(R)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}$ της έντασης του βαρυτικού πεδίου $\mathbf{g}$ από μια σημειακή μάζα M, στην επιφάνεια μιας σφαίρας $\mathcal{S}$ με ακτίνα R και κέντρο την ίδια τη μάζα. [Η στοιχειώδης επιφάνεια $d\mathbf{S}$ κατευθύνεται ακτινιικά προς τα έξω και επομένως μπορεί να γραφεί ως $dS\,\hat{\mathbf{r}}$.] **[5]**

2. Τώρα αλλάξτε την επιφάνεια της σφαίρας με μια άλλη κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει τη σημειακή μάζα και δείξτε ότι το αποτέλεσμα του προηγούμενου επιφανειακού ολοκληρώματος δεν αλλάζει. [Η εκάστοτε στοιχειώδης επιφάνεια επί της κλειστής αυτής επιφάνειας μπορεί να γραφεί ως $dS\,\hat{\mathbf{n}}$, όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια που κατευθύνεται προς τα έξω. Προσέξτε ότι το διάνυσμα αυτό δεν είναι τώρα παράλληλο με το $\hat{\mathbf{r}}$.] **[10]**

3. Σκεφθείτε τι συμβαίνει με το αποτέλεσμα του επιφανειακού ολοκληρώματος αν στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας τοποθετήσει κανείς πολλές σημειακές μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_N$, ή μια συνεχή κατανομή μάζας $\rho(\mathbf{r})$. **[5]**

4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του υπολογισμού του ερωτήματος (2) δείξτε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε μια κλειστή επιφάνεια μηδενίζεται αν η μάζα βρίσκεται στο εξωτερικό και όχι στο εσωτερικό αυτής. **[5]**

5. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\nabla \cdot \mathbf{g}$ ως κάποιο κατάλληλο όριο που σχετίζεται με το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα, καθώς και τη σχέση μεταξύ $\mathbf{g}$ και βαρυτικού δυναμικού Φ, δείξτε ότι ισχύει η σχέση
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$
σε κάθε σημείο του χώρου με χωρική πυκνότητα ύλης ρ. **[5]**

6. Εξηγήστε –χωρίς να κάνετε υπολογισμό– γιατί το δυναμικό που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση είναι:
$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}')$$
όπου $dV(\mathbf{r}')$ είναι το στοιχείο του όγκου στο σημείο $\mathbf{r}'$ και V είναι ο χώρος που υπάρχει ύλη, δηλαδή όπου $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$. **[5]**

Πρόβλημα Β Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο πεδίο δύναμης $\mathbf{F} = -k(\mathbf{r})\ \mathbf{r}$ με συντελεστή k που εξαρτάται από τη θέση του σωματιδίου ως ακολούθως:

$$k(\mathbf{r}) = k(x, y, z) = \begin{cases} K, & \text{για } x \geq 0, \\ 4K, & \text{για } x < 0. \end{cases}$$

1. Ελέγξτε αν η κίνηση του σωματιδίου θα εξελίσσεται σε ένα επίπεδο ή όχι. **[5]**
2. Υπολογίστε τη στροφορμή του σωματιδίου αν η αρχική του θέση είναι $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$ και η αρχική του ταχύτητα $\mathbf{v}_0 = (0, v_0, 0)$. **[5]**
3. Βρείτε τη θέση του σωματιδίου $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ανά πάσα χρονική στιγμή. Δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι κλειστή και υπολογίστε την περίοδο αυτής. **[5]**
4. Υπολογίστε το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου μέχρι αυτό να επανέλθει στο σημείο εκκίνησης. **[5]**
5. Δείξτε ότι το έργο **δεν** είναι μηδέν σε κάθε κλειστή διαδρομή. Βρείτε μια τέτοια διαδρομή με μη μηδενικό έργο. Είναι το πεδίο συντηρητικό; **[5]**

Πρόβλημα Γ Σώμα μάζας m κρέμεται από την οροφή μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k εντός του πεδίου βαρύτητας g και ισορροπεί. Τη στιγμή $t = 0$ προστίθεται κάποιο επιπλέον βάρος Mg στο σώμα (χωρίς ταχύτητα) και μένει σε αυτό προσκολημένο για χρόνο T (μετά αποκολλάται).

1. Γράψτε την κίνηση της μάζας m για χρόνους $t > T$. **[5]**
2. Βρείτε τη συνθήκη, ώστε η μάζα m μετά την αποκόλληση της M να μείνει ακίνητη; **[5]**
3. Για ποια τιμή του T, το πλάτος της ταλάντωσης μετά την αποκόλληση γίνεται μέγιστο; **[10]**

Πρόβλημα Δ Μια χάντρα μάζας m ολισθαίνει στο ομογενές βαρυτικό πεδίο δίχως τριβές πάνω σε μια κωνική έλικα (έλικα που εξελίσσεται επί μιας κωνικής επιφάνειας) με μεταβλητό βήμα. Η εξίσωση της έλικας είναι

$$z = -\beta e^{\phi} \quad , \quad \rho = e^{\phi}$$

όπου ρ, ϕ, z οι κυλινδρικές συντεταγμένες της έλικας.

1. Η χάντρα ξεκινά από την κορυφή του κώνου με συντεταγμένες $\rho = 0, \phi = -\infty, z = 0$ ακίνητο. Να υπολογίσετε το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{t}$ της έλικας κατά την κίνηση της χάντρας. **[10]**
2. Να γράψετε την διανυσματική έκφραση της επιτάχυνσης της χάντρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες και να τη μετατρέψετε σε συναρτήσεις των $d\phi/dt, d^2\phi/dt^2$. **[5]**
3. Γράψτε τώρα σε διανυσματική μορφή την εξίσωση κίνησης της χάντρας. Λάβετε ένα κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης με κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα ώστε να απαλλαγείτε από την άγνωστη δύναμη αντίδρασης της έλικας στη χάντρα. Αφού γράψετε το εσωτερικό γινόμενο, λύστε την προκύπτουσα διαφορική εξίσωση. [Υπόδ: Γράψτε τη διαφορική εξίσωση ως προς την καινούργια μεταβλητή $y = e^{\phi}$.] **[10]**
4. Δείξτε ότι η ενέργεια της χάντρας διατηρείται κατά την κίνηση. **[5]**