# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής

*Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι*

*26 Ιανουαρίου 2016*

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Στις παρενθέσεις δίνονται τα μόρια του κάθε ερωτήματος.

Σε ένα σωματίδιο που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο ασκείται η δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. (Αφορά στα ερωτήματα 1-7).

1. Αποδείξτε ότι η τροχιά σωματιδίου κείται σε ένα επίπεδο. Ποιο είναι αυτό το επίπεδο αν τη χρονική στιγμή $t$ γνωρίζουμε τη θέση $\mathbf{r}(t)$ και την ταχύτητα του σωματιδίου $\mathbf{v}(t)$; **[8]**

2. Μπορεί η τροχιά του σωματιδίου να εκφυλιστεί σε μία ευθεία; Πότε; **[6]**

3. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}$ σαρώνει σε ίσους χρόνους ίσες επιφάνειες (δεύτερος νόμος του Κέπλερ). **[6]**

4. Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι μία τέτοιου τύπου δύναμη **δεν** ορίζει αναγκαστικά μία δυναμική συνάρτηση $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$. **[8]**

5. Γράψτε τη μορφή της δύναμης $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο κόσμος είναι ισότροπος και στη συνέχεια προσδιορίστε τη δυναμική ενέργεια από την οποία προέρχεται η δύναμη αυτή, δηλαδή τη συνάρτηση $V$ για την οποία είναι $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Αποδείξτε τώρα, από πρώτες αρχές (γράψτε επιγραμματικά αυτές), ότι διατηρείται η ενέργεια του σωματιδίου την οποία και να ορίσετε. Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται (ισοτροπική) κεντρική δύναμη. **[8]**

6. Εάν η $\mathbf{F}$ είναι διάνυσμα, πώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες του, εάν περιστρέψουμε το σύστημα $(x, y, z)$ κατά γωνία $\pi/2$ περί τον άξονα $z$, δηλαδή ποια θα είναι η σχέση μεταξύ των συνιστωσών $(F_x, F_y, F_z)$ και $(F_{x'}, F_{y'}, F_{z'})$; Η ποσότητα

   $$\mathbb{G} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial F_z}{\partial z} \ ,$$

   ορίζει αναγκαστικά διάνυσμα; Τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. **[8]**

7. Υπολογίστε τη $\mathbb{G}$ εάν η $\mathbf{F}$ είναι ισοτροπική κεντρική δύναμη. **[6]**

Σώμα μάζας $m$ και φορτίου $q$ κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. (Αφορά στα ερωτήματα 8-10).

8. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα θέσης, $\mathbf{r}(t)$, του σωματιδίου ικανοποιεί την σχέση

$$\dot{\mathbf{r}} - \Omega \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}$$

   όπου **c** σταθερό διάνυσμα και $\Omega$ μία σταθερά την οποία πρέπει να προσδιορίσετε. **[6]**

9. Προσδιορίστε την σταθερά **c** αν αρχικά

$$\mathbf{r}(0) = a\,\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = u\,\hat{\mathbf{y}} + w\,\hat{\mathbf{z}}\,,$$

   όπου $a$, $u$, $w$ σταθερές και $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ τα μοναδιαία διανύσματα βάσης καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. **[6]**

10. Σχεδιάστε την τροχιά αν είναι $a\,\Omega + u = 0$. **[6]**

Η θέση, $x$, ενός ταλαντωτή διέπεται από την εξίσωση:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega t)$$

όπου $\gamma$ ο συντελεστής απόσβεσης, $\omega_0$ η φυσική συχνότητα και $\cos(\omega t)$ η εξωτερική διέγερση συχνότητας $\omega$. Θεωρούμε ότι $\gamma << \omega_0$. (Αφορά στα ερωτήματα 11-13).

11. Μετά από ποια τάξη χρόνου θα έχουν αποσβεσθεί οι αρχικές συνθήκες; **[4]**

12. Υπολογίστε το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης μετά την πάροδο ικανού χρόνου ώστε να έχουν αποσβεσθεί οι αρχικές συνθήκες. **[6]**

13. Εκφράστε το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης (μετά τη μεταβατική περίοδο) στην Λορεντζιανή προσέγγιση (κοντά στη συχνότητα συντονισμού), εξηγώντας με προσοχή τις προσεγγίσεις που κάνατε. **[6]**

Βαρυτική ύλη είναι ομογενώς κατανεμημένη σε μια απειροστή πλάκα σχήματος ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου. Η υποτείνουσα του τριγώνου έχει μήκος $a$ και η επιφανειακή πυκνότητά του είναι $\sigma$.

14. Υπολογίστε το βαρυτικό δυναμικό στην κορυφή Α του τριγώνου (που βρίσκεται απέναντι στην υποτείνουσα). [Υποδ.: ο υπολογισμός καθίσταται απλός αν προσδιορίσετε τη συνεισφορά στο δυναμικό από μία διαφορικού πλάτους λωρίδα βαρυτικής μάζας που είναι κάθετη στο ύψος που αντιστοιχεί στη κορυφή Α του τριγώνου. Δίδεται ότι: $\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \log[(1/\cos\theta) + \tan\theta]$ ]. **[10]**

15. Πώς θα διαμορφωνόταν ο 3ος νόμος του Kepler για τους πλανήτες αν η βαρυτική ελκτική δύναμη μεταξύ δύο μαζών ήταν της μορφής $\mathbf{F} = -k m_1 m_2 \mathbf{r}$; **[6]**

# Λύσεις

1.
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}/m$$
οπότε
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}/m = \mathbf{0}$$
δηλαδή το επίπεδο $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ στο οποίο εξελίσσεται η τροχιά παραμένει σταθερό. Το επίπεδο είναι αυτό που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$.

2. Ναι αν η στροφορμή είναι $\mathbf{0}$, δηλαδή αν $\mathbf{r}(0) \parallel \mathbf{v}(0)$.

3. Αφού
$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{2m} = \text{σταθ.}$$

4. Αν $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{x}})$ δεν μπορεί να προέρχεται από δυναμική ενέργεια αφού το έργο $W_{12} = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ με αρχικό και τελικό σημείο $\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}}$, είναι διαφορετικό αν η διαδρομή $\gamma$ είναι η ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία ($W_{12} = 3/2$) και αν η διαδρομή κινείται πάνω στη σφαίρα $r_1 = 1$ μέχρι το σημείο $\hat{\mathbf{y}}$, στη συνέχεια φτάνει ακτινικά στο $2\hat{\mathbf{y}}$ και τέλος κινούμενη πάνω στη σφαίρα $r_2 = 2$ καταλήγει στο τελικό σημείο $\mathbf{r}_2$ ($W_{12} = 0$).

5. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}f(|\mathbf{r}|)$. $V = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr'$.
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(r)\right)\\ &= m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} - \dot{r}f(r)\\ &= m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} - (\dot{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}})f(r)\ (\text{αφού } \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}r\dot{\theta})\\ &= \mathbf{v}\cdot(m\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F}) = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

6.
$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x\cos(\pi/2) + F_y\sin(\pi/2) = F_y\\ F_{y'} &= -F_x\sin(\pi/2) + F_y\cos(\pi/2) = -F_x\\ F_{z'} &= F_z \end{aligned} \tag{2}$$
Όχι η $\mathbb{G}$ δεν ορίζει κατ' ανάγκη διάνυσμα, αφού σε μια στροφή σαν την παραπάνω
$$\begin{aligned}\mathbb{G} &= \hat{\mathbf{x}}'\frac{\partial F_{x'}}{\partial x'} + \hat{\mathbf{y}}'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} + \hat{\mathbf{z}}'\frac{\partial F_{z'}}{\partial z'}\\ &= \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial F_y}{\partial y} + (-\hat{\mathbf{x}})\frac{\partial(-F_x)}{\partial(-x)} + \hat{\mathbf{z}}'\frac{\partial F_z}{\partial z}\\ &= \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial F_y}{\partial y} - \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

αφού $x' = y, y' = -x$. Αυτό όμως δεν συμπίπτει με το αρχικό $\mathbb{G}$.

7. Αν $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r)$, $F_x = x(f(r)/r)$, οπότε $\partial F_x/\partial x = (f/r) + x(\partial r/\partial x)(f/r)' = (f/r) + r(f/r)'$. Όμοια και για τις άλλες συνιστώσες οπότε

$$\mathbb{G} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})[(f/r) + r(f/r)']$$

Πρόκειται για ένα "διάνυσμα" (αφού δεν αλλάζει σε στροφές σαν διάνυσμα) που στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων έχει σταθερή διεύθυνση και αλλάζει μέτρο ανάλογα με την ακτίνα από το κέντρο. Ο προσανατολισμός του διανύσματος εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων.

8. Αφού

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

με μια ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$m(\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(0)) = qB(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)) \times \hat{z}$$

και με μια αναδιάταξη

$$\dot{\mathbf{r}}(t) - \frac{qB}{m}\mathbf{r}(t) \times \hat{z} = \dot{\mathbf{r}}(0)) - \frac{qB}{m}\mathbf{r}(0)$$

οπότε $\Omega = \frac{qB}{m}$ και $\mathbf{c} = \dot{\mathbf{r}}(0) - \Omega\mathbf{r}(0)$.

9. $\mathbf{c} = u\hat{\mathbf{y}} + w\hat{\mathbf{z}} - \Omega a\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = (u + a\Omega)\hat{\mathbf{y}} + w\hat{\mathbf{z}}$.

10. Για $u + a\Omega = 0$ είναι $\mathbf{c} = w\hat{\mathbf{z}}$. Έτσι η διαφορική εξίσωση του (8) έχει ως λύση

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}t + a(\cos(\Omega t)\hat{x} - \sin(\Omega t)\hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{z}}wt + a(\cos(\Omega t)\hat{x} - \sin(\Omega t)\hat{\mathbf{y}})$$

11. $\tau = 1/\gamma$.

12. 
$$A^2 = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

13. 
$$A^2 \simeq \frac{(F_0/(2m\omega_0))^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

όπου θέσαμε $(\omega_0^2 - \omega^2) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ στον πρώτο όρο και $\omega \simeq \omega_0$ στο δεύτερο όρο.

14. Μια στενή λωρίδα απόστασης $x$ από το A και εύρους $dx$ έχει μάζα $dM(x) = \sigma(2x)dx$ αφού η λωρίδα αυτή έχει μήκος $x$. Επομένως

$$\begin{aligned} dV(x) &= -G\frac{dM(x)}{2x}\int_{-x}^{+x}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= -G\sigma dx\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\frac{x d\tan\theta}{x\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\ &= -G\sigma dx\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Με μια δεύτερη ολοκλήρωση όλων των λωρίδων βρίσκουμε $V = -G\sigma(a/2)\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ αφού τα υπόλοιπα είναι σταθερά. (**Σημείωση:** Ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό στην κορυφή οποιουδήποτε τρίγωνου. Απλώς θα αλλάζουν οι γωνίες και αντίστοιχα το όρισμα του λογαρίθμου.)

15. Η κίνηση σε δυναμικό ισότροπου ταλαντωτή είναι και πάλι έλλειψη (ίδιος 1ος νόμος αλλά με κέντρο της έλλειψης το ελκτικό κέντρο), με σταθερό ρυθμό σάρωσης εμβαδών (ίδιος 2ος νόμος) και με περίοδο ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών που σχετίζονται με τις διαστάσεις της έλλειψης, οπότε $T_1/T_2$ =σταθερό ή $T = 2\pi\sqrt{1/kM}$ όπου η μάζα του ελκτικού κέντρου ( Ήλιου).