ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

1 Σεπτεμβρίου 2015

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από σημειακή μάζα m στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους a. Το εκκρεμές εκτελεί επίπεδη κίνηση στο επίπεδο (x, z) στο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης $-g\hat{\mathbf{z}}$ όπου $\hat{\mathbf{z}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στη κατακόρυφη διεύθυνση z. Το διάνυσμα θέσης της μάζας είναι $\mathbf{r}(t) = a\hat{\mathbf{r}}(t)$ όπου $\hat{\mathbf{r}}(t)$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα κατά μήκος της ράβδου (το σημείο ανάρτησης της ράβδου είναι το $\mathbf{r} = (0, 0)$). Στη μάζα ασκείται δύναμη τριβής ίση με $-2km\mathbf{v}$ όπου $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}$ η ταχύτητα της μάζας.

1. Δείξτε ότι είναι πάντοτε:
$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0\ .$$

2. Εάν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την $-\hat{\mathbf{z}}$ διεύθυνση και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση αυξανομένου θ, σχεδιάστε τα διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, προσδιορίστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες αυτών των διανυσμάτων και δείξτε ότι
$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) = \dot{\theta}(t)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \quad , \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\dot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)\ ,$$
όπου $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

3. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σωματιδίου στα πλαίσια της Νευτώνειας μηχανικής περιλαμβάνοντας όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα.

4. Υπό ποιές προϋποθέσεις η κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να προσδιορισθεί; Δείξτε ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις η γωνία θ ικανοποιεί την εξίσωση:
$$\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0\ ,$$
με κατάλληλο ω.

5. Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας του εκκρεμούς και προσδιορίστε το είδος της ισορροπίας των. Αλλάζει το είδος ισορροπίας αν $k < \omega$ ή $k > \omega$;

ΘΕΜΑ Β

1. Δύο μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται αντίστοιχα στις θέσεις $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ τη χρονική στιγμή t. Εάν στην m_1 ασκείται η δύναμη $\mathbf{f}$ και στην m_2 η δύναμη $-\mathbf{f}$ δείξτε ότι το κέντρο μάζας των σωματιδίων κινείται με σταθερή ταχύτητα. Γράψτε το νόμο που διέπει την εξέλιξη του διανύσματος: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

2. (συνέχεια του προηγουμένου...) Τώρα υποθέστε ότι $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$ όπου k μία θετική σταθερά. Τα σωματίδια είναι αρχικά ακίνητα και σε απόσταση a μεταξύ τους. Σε πόσο χρόνο θα συγκρουστούν;

3. Αν ο κόσμος δεν ήταν νευτώνειος και η κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m στο οποίο ασκείται η δύναμη $\mathbf{F}$ εξελίσσονταν σύμφωνα με τον νόμο:
$$m\tau\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \mathbf{F}$$
όπου $\tau > 0$ μια σταθερά με μονάδες χρόνου, πόσες αρχικές συνθήκες απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό της κίνησης;

4. (συνέχεια του προηγουμένου...) Θέλουμε να μελετήσουμε βολές σε αυτή τη μηχανική. Σώμα μάζας m βρίσκεται αρχικά στο σημείο $(0, 0, 0)$ καρτεσιανού πλαισίου (x, y, z). Στο σωματίδιο ασκείται σταθερή δύναμη $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}}$, όπου $\hat{\mathbf{z}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση z. Η αρχική ταχύτητα της μάζας είναι $(0, 0, 0)$ και η αρχική επιτάχυνση $(v_x/\tau, 0, v_z/\tau)$ με $v_z > 0$. Προσδιορίστε την τροχιά της βολής καθώς και την τροχιά που προκύπτει για την ίδια βολή στη νευτώνεια θεώρηση αν η μάζα είχε αρχική ταχύτητα $(v_x, 0, v_z)$. Δείξτε ότι αν $4g\tau > 9v_z$ το βεληνεκές της νευτώνειας βολής υπερβαίνει το μη νευτώνειο βεληνεκές. Σχεδιάστε τις δύο τροχιές στην περίπτωση αυτή. (Βεληνεκές είναι η απόσταση του αρχικού σημείου της βολής από το άλλο σημείο της τροχιάς με συντεταγμένη $z = 0$.)

ΘΕΜΑ Γ

1. Να προσδιορισθεί το δυναμικό $\phi(R)$ τμήματος σφαιρικού φλοιού ακτίνας a σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο της σφαίρας. Το τμήμα του φλοιού αντιστοιχεί σε πολικές γωνίες $\theta \leq \Theta$ και το σημείο μέτρησης είναι στην πολική ευθεία $\theta = 0$. Ο φλοιός είναι ομογενής και έχει μάζα M.

2. Δείξτε ότι σε μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο της σφαίρας το δυναμικό είναι μέχρι τάξης a/R:
$$\phi(R) = -\frac{GM}{R}\left(1 + \cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{a}{R} + \cdots\right) .$$
Δίδεται ότι $\cos\Theta = 2\cos^2(\Theta/2) - 1$.

3. Υπολογίστε την ένταση του βαρυτικού πεδίου στο σημείο αυτό ($R >> a$) στην ίδια τάξη προσέγγισης και συγκρίνετέ την με την ένταση ενός ολόκληρου σφαιρικού φλοιού ίδιας μάζας.

4. Δείξτε ότι η ελκτική δύναμη ανά μονάδα μάζας που ασκείται στο κέντρο της σφαίρας ($R = 0$) από τον φλοιό είναι ακριβώς (χωρίς καμία προσέγγιση):
$$F = \frac{GM}{a^2}\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) .$$

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1-2.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= a\hat{\mathbf{r}} = a(-\cos\theta\hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\hat{\mathbf{x}}) \\
\mathbf{v} &= a\dot{\hat{\mathbf{r}}} \\
&= a\dot{\theta}(\sin\theta\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\hat{\mathbf{x}}) \\
&= a\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{d}{dt}(\sin\theta\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\hat{\mathbf{x}}) \\
&= -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= m\ddot{\mathbf{r}} \\
\mathbf{B} + \mathbf{T} + \mathbf{N} &= ma(\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}})
\end{aligned} \qquad (2)$$

4. Με την προϋπόθεση ότι η τάση της ράβδου είναι ακτινική $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{r}}$ αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση κίνησης με $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση όσον αφορά τη θ κίνηση. Αν δεν είναι ακτινική η τάση δεν μπορεί να λυθεί το πρόβλημα αφού παραμένει άγνωστη η τάση. Δεν είναι προϋπόθεση να επιλύεται η κίνηση η μικρή γωνία θ. Αν είναι μικρή επιλύεται με εύκολο τρόπο, αν όχι πάλι επιλύεται αλλά είναι πιο δύσκολη η διαφορική εξίσωση.

5. 2 είναι τα σημεία ισορροπίας όπου μηδενίζονται οι δυνάμεις όταν $\dot{\theta} = 0$ τα $\theta = 0$ και π. Το πρώτο είναι ευσταθές (αποσβυνόμενη ταλάντωση για $k < \omega$, ή εκθετική υπεραπόσβεση για $k > \omega$). Το δεύτερο είναι ασταθές (εκθετική απομάκρυνση και στις 2 πειθπτώσεις.)

ΘΕΜΑ Β

1. Γνωστό από θεωρία.

2.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/\mu \qquad (3)$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα. Επομένως $\mathbf{r} = \mathbf{C}\cos(\sqrt{k/\mu}t) + \mathbf{S}\sin(\sqrt{k/\mu}t)$. Με τα δεδομένα $\mathbf{S} = 0$, $|\mathbf{C}| = a$. Επομένως η απόσταση μηδενίζεται για $t = (\pi/2)\sqrt{\mu/k}$.

3-4. Χρειάζονται 3 αρχικές συνθήκες: θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση. Η τροχιά είναι:

$$x(t) = \frac{v_x}{\tau}\frac{t^2}{2} \;\; , z(t) = \frac{v_z}{\tau}\frac{t^2}{2} - \frac{g}{6\tau}t^3$$

ή

$$z(x) = \frac{v_z}{v_x}x - \frac{g\sqrt{2\tau}}{3v_x^{3/2}}x^{3/2}$$

ενώ η Νευτώνεια

$$z_n(x) = \frac{v_z}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2$$

Το νευτώνειο βεληνεκές είναι:

$$X_n = \frac{2v_z v_x}{g}$$

ενώ το μη νευτώνειο

$$X = \frac{9v_z^2 v_x}{g^2 2\tau} = \frac{9v_z}{4g\tau}X_n$$

Συνεπώς αν $g\tau > 9v_z/4$ το νευτώνειο βεληνεκές είναι μεγαλύτερο.

ΘΕΜΑ Γ

Το δυναμικό είναι

$$\begin{aligned}
\phi &= -G\rho 2\pi a^2 \int_{\cos\Theta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{a^2+R^2-2ax}} \\
&= -G\rho 2\pi \frac{a}{R}\left(\sqrt{a^2+R^2-2a\cos\Theta} - |a-R|\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(\sqrt{a^2+R^2-2a\cos\Theta} - |a-R|\right)
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι η συνολική μάζα είναι $M = 2\pi\rho a^2(1-\cos\Theta)$. Συνεπώς το δυναμικό για σημεία με $R >> a$

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(\sqrt{a^2+R^2-2a\cos\Theta} - R + a\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(R\sqrt{1+a^2/R^2-2a\cos\Theta/R} - R + a\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(R\left(1-\frac{a}{R}\cos\Theta+\frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}-\frac{1}{8}\frac{4a^2\cos^2\Theta}{R^2}+\ldots\right) - R + a\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(a - a\cos\Theta + \frac{1}{2}\frac{a^2}{R} - \frac{1}{8}\frac{4a^2\cos^2\Theta}{R} + \cdots\right) \\
&= -\frac{GM}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1-\cos^2\Theta}{1-\cos\Theta}\frac{a}{R}+\ldots\right) \\
&= -\frac{GM}{R}\left(1+\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{a}{R}+\ldots\right)
\end{aligned}$$

η ελκτική δύναμη είναι μεγαλύτερη από το πλήρη σφαιρικό φλοιό ανα μονάδα μάζας κατά

$$\frac{GM}{R^2}\frac{2a}{R}\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

Για $R << a$

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(\sqrt{a^2+R^2-2a\cos\Theta}-a+R\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(a\sqrt{1+R^2/a^2-2R\cos\Theta/a}-a+R\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(a\left(1-\frac{R}{a}\cos\Theta+\frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2}-\frac{1}{8}\frac{4R^2\cos^2\Theta}{a^2}+\cdots\right)-a+R\right) \\
&= -\frac{GM}{1-\cos\Theta}\frac{1}{aR}\left(R-R\cos\Theta+\frac{1}{2}\frac{R^2}{a}-\frac{1}{8}\frac{4R^2\cos^2\Theta}{a}+\cdots\right) \\
&= -\frac{GM}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\Theta}{1-\cos\Theta}\frac{R}{a}+\cdots\right) \\
&= -\frac{GM}{a}\left(1+\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{R}{a}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

$$F=\frac{GM}{a^2}\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

Η εύρεση του δυναμικού στο κέντρο (η οποία είναι εξαιρετικά εύκολη $\phi=-GM/a$ αφού όλη η μάζα βρίσκεται σε ίδια απόσταση από το κέντρο) δεν μπορεί να μας δώσει την ένταση αφού χρειάζεται να ξέρουμε το δυναμικό και πλησίον του κέντρου.