ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής
Εξέταση στη Μηχανική Ι, 25 Σεπτεμβρίου 2006
Διδάσκοντες: Κ. Τσίγκανος - Π. Ιωάννου - Α. Πινότσης - Θ. Αποστολάτος
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες - Καλή επιτυχία

<u>Θέμα 1ο</u>: Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά η διανυσματική εξίσωση της οποίας είναι

$$\vec{r} = 3\sin 2t \;\; \hat{i} + 4\cos 2t \;\; \hat{j}.$$

(α) Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\hat{T}$, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

(β) Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα της πρώτης καθέτου της καμπύλης. Αποδείξτε γενικά (χωρίς αριθμητικές πράξεις) ότι το μοναδιαίο διάνυσμα της πρώτης καθέτου μιας καμπύλης είναι κάθετο στο $\hat{T}$. Ποια είναι η φυσική σημασία της πρώτης καθέτου;

(γ) Βρείτε τη στροφορμή του σωματιδίου και δείξτε αν διατηρείται.

<u>Θέμα 2ο</u>: Όταν ένα διαστημόπλοιο (Δ) βρίσκεται σε απόσταση 1 Αστρονομικής Μονάδος από τον Ήλιο, δηλ., όσο η απόσταση της Γης από τον Ήλιο αλλά αρκετά μακριά από τη Γη έτσι ώστε το βαρυτικό πεδίο της Γης να μπορεί να αγνοηθεί κατά την διάρκεια της αρχικής εκτόξευσης σε σχέση με το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, εκτοξεύεται σε ακτινική τροχιά αντίθετα προς τη διεύθυνση του Ήλιου για να συναντήσει τον πλανήτη Κρόνο. Η εκτόξευση γίνεται με την ελάχιστη απαιτούμενη ταχύτητα που θα επιτρέψει στο Δ να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου.

(α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα v_K με την οποία κινείται ο Κρόνος περί τον Ήλιο, καθώς και η ταχύτητα $v_{\text{αρχ}}$ με την οποία <u>φθάνει</u> το Δ στην απόσταση του Κρόνου, υποθέτοντας ότι ο Κρόνος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας 10 αστρονομικών μονάδων περί τον Ήλιο.

(β) Θεωρήστε ότι η αρχική εκτόξευση γίνεται την κατάλληλη στιγμή, έτσι ώστε η ευθύγραμμη τροχιά του διαστημοπλοίου να τμήσει την κυκλική τροχιά του Κρόνου περί τον Ήλιο σε μια απόσταση b <u>πίσω</u> από αυτόν, ενώ μετά την αλληλεπίδραση του Δ με το πεδίο βαρύτητος του Κρόνου, το Δ κινείται σε γωνία 90^{o} σε σχέση με την αρχική του ακτινική διεύθυνση ως προς τον Ήλιο, δηλ., κινείται εφαπτομενικά στην κυκλική τροχιά του Κρόνου περί τον Ήλιο. Να υπολογισθεί η σχετική ταχύτητα $u_{\text{αρχ}}$ του Δ ως προς τον Κρόνο, <u>πριν</u> την αλληλεπίδρασή του με το πεδίο βαρύτητας του Κρόνου, όταν φθάνει σε αυτόν.

(γ) Να υπολογισθεί η νέα ταχύτητα του Δ <u>μετά</u> την αλληλεπίδρασή του με το πεδίο του Κρόνου.

(δ) Να υπολογισθεί ο λόγος $\Delta T/T_{\text{αρχ}}$ της αύξησης ΔΤ που υπέστη η αρχική κινητική ενέργεια $T_{\text{αρχ}}$ του Δ από την αλληλεπίδραση αυτή.

(ε) Θα διαφύγει το Δ από το ηλιακό σύστημα μετά τη σκέδασή του από τον Κρόνο ή όχι;

<u>Υποδείξεις/Δεδομένα :</u> Το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης του Δ με τον Κρόνο μπορεί να αγνοηθεί, ενώ η διάρκεια της αλληλεπίδρασης είναι αμελητέα σε σχέση με την περίοδο του Κρόνου. Η ταχύτητα περιστροφής της Γης περί τον Ήλιο είναι $v_{\oplus} = 30$ km/sec.

<u>Θέμα 3ο</u>: Βλήμα μάζας m βάλλεται μέσα στο σταθερό πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$ με ταχύτητα $\vec{v}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα $\vec{v}_0$ είναι μικρή οπότε μπορεί να θεωρηθεί για το πρόβλημα η Γη επίπεδη και η επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή. Δυστυχώς όμως για τον/την πυροβολητή/τρια το βλήμα είναι συνδεδεμένο με το πυροβόλο μέσω ενός γραμμικού ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σταθεράς k.

(α) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η $\vec{v}_0$ ώστε πράγματι να μπορούμε να θεωρήσουμε τη Γη επίπεδη και την επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή;

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες του βλήματος $x(t)$, $y(t)$ επί του κατακορύφου επιπέδου, αν αρχικά αυτό βρισκόταν στην αρχή των αξόνων.

(γ) Δείξτε ότι για "μικρές" τιμές του $\omega = \sqrt{k/m}$ η κίνηση του βλήματος γίνεται η γνωστή κίνηση ενός βλήματος στο πεδίο βαρύτητας, ενώ για "μεγάλες" τιμές του ω έχουμε ταλάντωση επί μίας ευθείας (τουλάχιστον μέχρι να προσγειωθεί το βλήμα στη επιφάνεια). Τι εννούμε με τους όρους μικρές και μεγάλες τιμές του ω; Σε σχέση με τι; (Δίδεται ότι $\sin a \to a$, $\cos a \to 1 - a^2/2$ για πολύ μικρές τιμές του a.)

(δ) Ποια τιμή του ω πρέπει να επιλέξουμε έτσι ώστε το βλήμα όταν χτυπήσει στην επιφάνεια της Γης να κινείται κατακόρυφα;

<u>Θέμα 4ο</u>: Το Τμήμα Φυσικής αποφάσισε να τοποθετήσει ένα δορυφόρο γύρω από τον σφαιρικό και ομογενή πλανήτη Zog μάζας M με την ίδια περίοδο περιστροφής, T, που έχει και ο πλανήτης περί τον άξονά του (έτσι ο δορυφόρος θα βρίσκεται πάντοτε πάνω από το ίδιο σημείο του πλανήτη).

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του δορυφόρου σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες, εξηγώντας με συντομία γιατί μπορείτε να επιλέξετε αυτό το σύστημα συντεταγμένων. Από τις εξισώσεις αυτές προσδιορίστε σε ποια ακτίνα R_0 πρέπει να τοποθετηθεί ο δορυφόρος και με τι γωνιακή ταχύτητα ω_0;

(β) Ο δορυφόρος τοποθετείται στο σωστό μεν σημείο και του δίδεται ταχύτητα στη σωστή κατεύθυνση, αλλά από λάθος, του δίδεται γωνιακή ταχύτητα κατά $\epsilon\omega_0$ μεγαλύτερη από την ω_0 που αντιστοιχεί στη γεωστάσιμη τροχιά. Θεωρούμε ότι $\epsilon << 1$. Γράψτε την απόσταση του δορυφόρου ως $r = R_0 + r'$. Επειδή το ϵ είναι μικρό αναμένεται η απόκλιση από την ζητούμενη τροχιά να είναι και αυτή μικρή, $r' << R_0$. Δείξτε τότε ότι σε πρώτη τάξη ως προς ϵ, και ως προς $r\,'$, η γραμμική εξίσωση που διέπει την απόκλιση r' είναι η

$$\ddot{r}\,' + \omega_0^2 r\,' = 2\epsilon\, \omega_0^2 R_0 \ .$$

Προσδιορίστε την απόκλιση $r\,'(t)$ αν αρχικά $r\,'(0) = 0$.

(γ) Ζωγραφίστε την τροχιά που θα ακολουθήσει συγκρίνοντας την με την επιθυμητή. Στο διάγραμμα αυτό σχεδιάστε στην ίδια (τυχαία) χρονική στιγμή τη θέση του δορυφόρου καθώς και τη θέση του νοητού δορυφόρου που θα εκτελούσε την επιθυμητή κυκλική τροχιά.

Λύσεις: **<u>Θέμα 1ο</u>**: Βλ. σελ 47 του βιβλίου του κ. Πινότση για την αντίστοιχη θεωρία. **(α)**

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{6\cos 2t\,\hat{i} - 8\sin 2t\,\hat{j}}{\sqrt{36 + 28\sin^2(2t)}} = \frac{6}{\sqrt{50 - 14\sin(4t)}}\cos 2t\,\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{50 - 14\sin(4t)}}\sin 2t\,\hat{j}$$

Ο παρονομαστης είναι το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή $\sqrt{50 - 14\sin(2t)}$.

(β)

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|} = \ldots$$

Πράγματι $\hat{T} \cdot \hat{N} = 0$ αφού

$$0 = \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}(\hat{T} \cdot \hat{T}) = 2\hat{N} \cdot \hat{T}.$$

Η πρώτη κάθετος έχει την κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης και "κοιτάζει" προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς.

(γ)

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(3\sin 2t\,\hat{i} + 4\cos 2t\,\hat{j}) \times (6\cos 2t\,\hat{i} - 8\sin 2t\,\hat{j}) = -24m\hat{k}$$

Αφού δεν εξαρτάται από το χρόνο διατηρείται.

<u>Θέμα 2ο</u>: Έστω m και $M_\odot$ οι μάζες του διαστημοπλοίου και του Ήλιου, α_K η ακτίνα της περίπου κυκλικής τροχιάς του Κρόνου περί τον Ήλιο, και $v_{\text{αρχ}}$ η ταχύτητα του Δ ως προς τον Ήλιο όταν αυτό τέμνει την τροχιά του Κρόνου σε μιά απόσταση b πίσω του και πριν να αρχίσει να αλληλεπιδρά με αυτόν. Θεωρούμε ότι από τη στιγμή της εκτόξευσης από τη Γη μέχρι τη στιγμή που το Δ τέμνει την τροχιά του Κρόνου σε απόσταση b πίσω του, πάνω στο Δ ασκείται μόνο το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου. Επειδή το Δ εκτοξεύεται με την <u>ελάχιστη</u> απαιτούμενη ταχύτητα που θα του επιτρέψει να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου, έχουμε ότι η ολική του ενέργεια είναι μηδέν,

(α) Η ταχύτητα του Κρόνου περί τον Ήλιο ικανοποιεί τη σχέση,

$$\frac{v_\text{K}^2}{\alpha_\text{K}} = \frac{GM_\odot}{\alpha_\text{K}^2}\,,$$

και επομένως,

$$v_\text{K} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{\alpha_\text{K}}} = \frac{v_{\text{αρχ}}}{\sqrt{2}} = 9.5\ \text{km/sec}\,.$$

Από τη μηδενική ολική ενέργεια του Δ μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα του Δ όταν αυτό εισέρχεται στο πεδίο βαρύτητος του Κρόνου,

$$v_{\text{αρχ}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{\alpha_\text{K}}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{\alpha_\oplus}}\sqrt{\frac{2\alpha_\oplus}{\alpha_\text{K}}} = 30\sqrt{\frac{2}{10}}\ \text{km/sec} = 13.4\ \text{km/sec}\,.$$

(β) Όταν το Δ εισέρχεται στο βαρυτικό πεδίο του Κρόνου, η ταχύτητά του $\vec{u}_{\text{αρχ}}$ στο σύστημα του Κρόνου είναι,

$$\vec{u}_{\text{αρχ}} = \vec{v}_{\text{αρχ}} - \vec{v}_\text{K}\,.$$

Επομένως, το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του Δ στο σύστημα του Κρόνου είναι,

$$u_{\text{αρχ}} = \sqrt{v_{\text{αρχ}}^2 + v_\text{K}^2} = \sqrt{(13.4)^2 + (9.5)^2} = 16.4\ \text{km/sec}\,.$$

(γ) Εφόσον έχουμε ελαστική σκέδαση του Δ στο βαρυτικό πεδίο του Κρόνου, διατήρηση της ενέργειας του διαστημοπλοίου στο σύστημα του Κρόνου δίδει ότι η τελική ταχύτητα του Δ όταν αυτό εξέρχεται από την περιοχή της σκέδασης λόγω του βαρυτικού πεδίου του Κρόνου παραμένει κατά μέτρο η ίδια. Η τελική ταχύτητα του Δ, $\vec{v}_{\text{τελ}}$, σχετίζεται με την τελική ταχύτητά του στο σύστημα του Κρόνου, $\vec{u}_{\text{τελ}}$, ως εξής,

$$\vec{v}_{\text{τελ}} = \vec{u}_{\text{τελ}} + \vec{v}_\text{K}\,.$$

Εφόσον δίδεται ότι η τελική ταχύτητα του Δ, $\vec{v}_{\text{τελ}}$, είναι παράλληλη με την $\vec{v}_{\text{Κ}}$, θα έχουμε,

$$v_{\text{τελ}} = u_{\text{τελ}} + v_{\text{Κ}} = 9.5 + 16.4 = 25.9 \text{ km/sec}\,.$$

(δ) Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του Δ είναι τότε,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{(25.9)^2 - (13.4)^2}{(13.4)^2} = 2.7\,.$$

Η ταχύτητα διαφυγής από το πλανητικό σύστημα στην απόσταση του Κρόνου είναι,

$$v_{\text{Κ}}^{\text{διαφ}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{\alpha_{\text{Κ}}}} = \sqrt{2}v_{\text{Κ}} = 13.4 \text{ km/sec}\,.$$

(ε) Επειδή η τελική ταχύτητα του διαστημοπλοίου, μετά τη σκέδασή του από τον Κρόνο, είναι $v_{\text{τελ}} = 25.9 \text{ km/sec} > 13.4 \text{ km/sec}$, το διαστημόπλοιο θα διαφύγει από το πλανητικό σύστημα διαγράφοντας υπερβολική τροχιά εν σχέσει με τον ΄Ηλιο.

<u>Θέμα 3ο</u>: **(α)** $v_0 << \sqrt{2GM_\Gamma/R_\Gamma}$.

(β)

$$m\ddot{x} = F_x = -kx\ ,\ m\ddot{y} = F_y = -mg - ky$$

΄Ετσι

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ,\ y(t) = -mg/k + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t).$$

Αφού $x(0) = y(0) = 0$, $A = C - mg/k = 0$. Από την αρχική ταχύτητα $B = v_0\cos\theta/\omega\ ,\ D = v_0\sin\theta/\omega$.

(γ) Στο όριο που $\omega \to 0$, $x(t) = v_0\cos\theta t$ και $y(t) = v_0\sin\theta t - gt^2/2$ αφού $\lim_{\omega\to 0}\frac{\cos(\omega t)-1}{\omega^2} = -t^2/2$. Στο όριο που $\omega \to \infty$ όλοι οι όροι πηγαίνουν στο μηδέν αλλά αν κρατήσουμε τους χαμηλότερης τάξης ως προς $1/\omega$ όρους παίρνουμε $x(t) = v_0\cos\theta\sin(\omega t)/\omega$ και $y(t) = v_0\sin\theta\sin(\omega t)/\omega$. Επειδή $y(t)/x(t) = \tan\theta$ το βλήμα σε αυτή την περίπτωση θα κινείται σε ευθεία. Για να έχουμε πιο σαφή κριτήρια του τι θεωρούμε μεγάλο και τι μικρό μπορούμε να συγκρίνουμε τους δύο όρους του $y(t)$ που είναι τάξης v_0/ω και g/ω^2. Επομένως μεγάλο ή μικρό ω σε σχέση με το g/v_0.

(δ) ΄Οταν επιστρέφει στο έδαφος $y(t) = 0$, θέλουμε να κινείται κατακόρυφα, δηλαδή $\dot{x}(t) = 0$. Από τη 2η συνθήκη παίρνουμε $\cos\omega t = 0$, οπότε $\sin\omega t = 1$. Η 1η συνθήκη τότε δίδει $\frac{v_0\sin\theta}{\omega} - \frac{g}{\omega^2} = 0$, οπότε $\omega = g/(v_0\sin\theta)$.

<u>Θέμα 4ο</u>: **(α)** $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$. Λόγω του ότι πρόκειται για κεντρική δύναμη είναι βολική η χρήση επίπεδων (διατηρείται η στροφορμή) πολικών συντεταγμένων. ΄Ετσι

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -(GM)/r^2\ ,\ \frac{d}{dt}\omega r^2 = 0$$

Για να είναι κυκλική η τροχιά $r = R_0\ ,\ \omega = \omega_0$ πρέπει $\omega_0^2 = GM/R_0^3$, αλλά για να είναι γεωστάσιμος πρέπει $\omega_0 = 2\pi/T$. Συνεπώς $R_0 = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$.

(β) Από τη γωνιακή εξίσωση

$$(1+\epsilon)\omega_0 R_0^2 = \omega(R_0 + r\,')^2 \Rightarrow \omega = \omega_0(1+\epsilon)(1 - 2r\,'/R_0)$$

σε πρώτη τάξη ως προς $r\,'$. Βάζοντας την έκφραση αυτή του ω στην ακτινική σχέση παίρνουμε

$$\ddot{r}\,' - \omega_0^2 R_0(1+2\epsilon)(1 - 3r\,'/R_0) = -\omega_0^2 R_0(1 - 2r\,'/R_0)$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση αν κρατήσουμε όρους 1ης τάξης ως προς ϵ και $r\,'$. Αυτή είναι εξίσωση σαν του αρμονικού ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη επομένως $r\,' = 2\epsilon R_0(1 - \cos\omega_0 t)$ αφού θέλουμε $r\,'(0) = 0$ και $\dot{r}\,'(0) = 0$ (βάλεται εφαπτομενικά στην κυκλική τροχιά).

(γ) Πρόκειται για μια έλλειψη η οποία περιβάλει την κυκλική τροχιά και είναι αρχικά εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά. Κάθε χρονική στιγμή $r\,'(t) \geq 0$ οπότε $\omega \leq \omega_0$ από διατήρηση της στροφορμής. Επομένως ο δορυφόρος θα βρίσκεται λίγο πιο πίσω (ως προς τη γωνία) και λίγο πιο έξω (ως προς την ακτίνα) σε σχέση με το νοητό δορυφόρο.