ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου

Σεπτέμβριος 2001

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)
Ελατήριο μηδενικού φυσικού μήκους και σκληρότητας k κρέμεται από την οροφή κτιρίου, ενώ στο άλλο άκρο του ελατηρίου αναρτάται μάζα m. Θεωρήστε ότι το ελατήριο δεν έχει τη δυνατότητα να καμφθεί αλλά παραμένει πάντα ευθύγραμμο.
(α) Υπολογίστε τη θέση ισορροπίας του συστήματος ελάτηριο μάζα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης.
(β) Θεωρήστε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων x-y (ο x-άξονας οριζόντιος και ο y-άξονας κατακόρυφος με τη θετική του φορά προς τα επάνω), τοποθετημένο έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας της μάζας. Μελετήστε την τροχιά της μάζας πλησίον του σημείου ισορροπίας.
(γ) Η τροχιά αυτή που βρήκατε είναι σωστή μόνο κοντά στο σημείο ισορροπίας; Η τροχιά μπορεί να εκτείνεται και πάνω από το σημείο ανάρτησης (στην περίπτωση αυτή αγνοήστε την ύπαρξη της οροφής);
(δ) Σχεδιάστε την τροχιά (σημειώνοντας όλα τα χαρακτηριστικά σημεία αυτής) αν αρχικά η μάζα βρίσκεται στη θέση $(0,-a)$, και έχει ταχύτητα $(u_0,0)$, όπου a, u_0 θετικές σταθερές.

Θέμα 2 (25 μονάδες)
Η βελόνα ενός αμπερομέτρου στρέφεται γύρω από άξονα και προκειμένου να δείχνει μηδέν όταν δεν περνά ρεύμα από το όργανο είναι στερεωμένη σε στροφικό ελατήριο. Η κίνηση της βελόνας υπακούει τη νευτώνεια εξίσωση κίνησης

$$M\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = ai,$$

όπου M, η ροπή αδράνειας της βελόνας (ακόμη και αν δεν γνωρίζεται τι σημαίνει αυτός ο όρος δεν έχει σημασία), b, ένας συντελεστής που εξαρτάται από την κατασκευή του οργάνου και μετρά την αντίσταση στην κίνηση της βελόνας, k, η σκληρότητα του στροφικού ελατηρίου, a, η κλίμακα του οργάνου και i, το ρεύμα που διαρρέει το όργανο, ενώ ϕ είναι η γωνία στροφής της βελόνας.
(α) Βρείτε τη θέση ισορροπίας της βελόνας όταν το αμπερόμετρο διαρρέεται από ρεύμα i_0.
(β) Υποθέστε ότι η βελόνα βρίσκεται αρχικά στη θέση $\phi = 0$, ακίνητη και δεν περνά ρεύμα από το όργανο. Ξαφνικά, τη στιγμή $t = 0$, διοχετεύουμε ρεύμα i_0 στο όργανο. Περιγράψτε την περαιτέρω κίνηση της βελόνας, υποθέτωντας ότι $b = 0$. Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη γωνία της βελόνας; Θα επιλέγατε να κατασκευάσετε ένα τέτοιο όργανο με $b = 0$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
(γ) Ποια τιμή θα επιλέγατε για τη σταθερά b, σα συνάρτηση των υπολοίπων σταθερών, ώστε η βελόνα να σταματήσει το γρηγορότερο δυνατό στη θέση ισορροπίας που υπολογίσατε στο ερώτημα (α) ώστε να μπορεί ο ερευνητής να διαβάσει γρηγορότερα την ένδειξη του οργάνου;

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Ένα πολυβόλο σωματιδίων (νετρίνων), τα οποία μπορούν να κινούνται διαμέσου της ύλης χωρίς καμμία αντίσταση, βάλλει πλήθος τέτοιων σωματιδίων με οριζόντια κατεύθυνση από την επιφάνεια της Γης. Οι αρχικές ταχύτητες εκτόξευσης των σωματιδίων είναι τυχαίες και κυμαίνονται από 0 (μηδέν) έως $\sqrt{2GM/R}$ (την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης), όπου G,M,R η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, η μάζα και η ακτίνα της Γης, αντίστοιχα. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν με την ύλη της Γης ***μόνο*** βαρυτικά.

(α) Εξηγήστε τι είδους τροχιά θα εκτελέσουν τα σωματίδια αν κινηθούν στο εσωτερικό της Γης (στην περίπτωση αυτή υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται στα σωματίδια και χρησιμοποιήστε ανάλυση σε καρτεσιανές συντεταγμένες για να συναγάγετε το είδος της κίνησης) ή αν κινηθούν στο εξωτερικό αυτής.

(β) Να υπολογισθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των σωματιδίων από το κέντρο της Γης, ως συνάρτηση της ταχύτητας εκτόξευσής τους (θεωρήστε ότι η πυκνότητα της Γης είναι σταθερή στο εσωτερικό αυτής). Να σχεδιασθούν ποιοτικά οι δύο αυτές συναρτήσεις.

(γ) Αν όλα τα σωματίδια εκτοξεύτηκαν **μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή** αλλά με διαφορετική ταχύτητα το καθένα, θα φθάσουν όλα πάλι στο σημείο εκτόξευσης με κάποια χρονική απόσταση μεταξύ τους, ή υπάρχει περίπτωση μέρος αυτών να φθάσουν ταυτόχρονα;

Θέμα 4 (25 μονάδες)

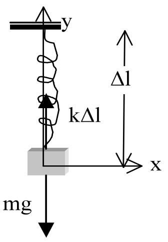
Ν άστρα σχηματίζουν ένα αστρικό νέφος καθώς έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις παγκόσμιας έλξης. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κάθε i-στό άστρο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_{0i}$ και έχει ταχύτητα $\vec{u}_{0i}$.

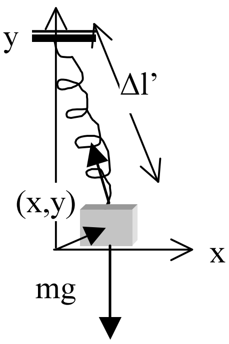
(α) Να υπολογισθεί η θέση και η ορμή του κέντρου μάζας του νέφους, καθώς και η στροφορμή αυτού; Ποιές απ' όλες αυτές τις ποσότητες διατηρούνται;

(β) Υπολογίστε τη στροφορμή του νέφους ως προς το κέντρο μάζας αυτού και ελέγξτε αν αυτή διατηρείται.

(γ) Είναι δυνατό ένα νέφος με ΜΗ μηδενική, αρχικά, στροφορμή, να καταρρεύσει (πέφτοντας σταδιακά το ένα άστρο πάνω στο άλλο) δημιουργώντας ένα τεράστιο άστρο το οποίο δεν θα περιστρέφεται καθόλου;

Λύσεις





Θέμα 1: (α) Το σώμα ισορροπεί αρχικά στην κατακόρυφη θέση όπου έχει επιμηκυνθεί το ελατήριο κατά Δl. Έτσι αρχικά $mg = k\Delta l$.

(β) Αν από αυτή τη θέση ισορροπίας εκτρέψουμε το σώμα και το τοποθετήσουμε στη θέση (x,y), όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε στο σώμα ασκείται η δύναμη:

$$\vec{F} = -\left(k\Delta l'\right)\frac{x}{\Delta l'}\hat{x} + \left[\left(k\Delta l'\right)\frac{\Delta l - y}{\Delta l'} - mg\right]\hat{y},$$

όπου οι ποσότητες μέσα στην παρένθεση είναι η δύναμη του ελατηρίου, ενώ τα κλάσματα είναι το συνημίτονο και το ημίτονο αντίστοιχα της γωνίας εκτροπής του ελατηρίου προκειμένου να υπολογιστούν οι συνιστώσες της δύναμης του ελατηρίου. Από τη γνώση της θέσης ισορροπίας του ελατηρίου εύκολα απλοποιούμε τη μορφή της δύναμης σε

$$\vec{F} = -kx\hat{x} - ky\hat{y} = -k\vec{r}.$$

Το σώμα θα εκτελέσει λοιπόν την κίνηση που θα εκτελούσε αν βρισκόταν εκτός πεδίου βαρύτητας και ασκούνταν πάνω του μια δύναμη ελατηρίου, ίδιου με το πρόβλημα, το οποίο το συνδέει με την αρχική θέση ισορροπίας. Είναι εύκολο τώρα να μελετήσουμε την τροχιά

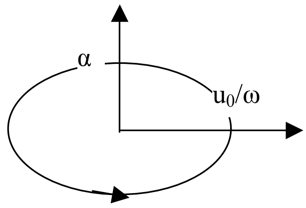
$$\begin{matrix} m\ddot{x} = -kx \Rightarrow x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right) \\ m\ddot{y} = -ky \Rightarrow y = B\cos\left(\omega t + \theta\right) \end{matrix}, \text{ με } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Αυτή είναι παραμετρική εξίσωση μιας έλλειψης. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι πρόκειται για έλλειψη αν θέσει φ=0, θ=π/2.

(γ) Στα παραπάνω δεν έγινε καμμία προσέγγιση για μικρές απομακρύνσεις, επομένως όλα όσα αναφέραμε ισχύουν για οσοδήποτε μεγάλες απομακρύνσεις (αρκεί το ελατήριο να εξακολουθεί να συμπεριφέρεται γραμμικά). Το σώμα μπορεί να βρεθεί ακόμη και πάνω από την οροφή ανάρτησης του ελατηρίου. Προκειμένου να φανεί ότι και σε αυτές τις θέσεις εξακολουθεί να ισχύει η δύναμη που υπολογίσαμε στο ερώτημα (β), ας τοποθετήσουμε το σώμα σε απόσταση α πάνω από το σημείο ανάρτησης. Τότε ασκείται προς τα κάτω μια δύναμη ίση με $\vec{F} = -\left(mg + ka\right)\hat{y} = -k(a + \Delta l)\hat{y} = -ky\hat{y}$. Δείχθηκε λοιπόν το ζητούμενο.

(δ) Θα υπολογίσουμε τις σταθερές Α,Β,φ,θ της προηγούμενης λύσης για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

$x(0)=0, y(0)=-a, \dot{x}(0)=u_0, \dot{y}(0)=0 \Rightarrow$
$A\cos\varphi=0, B\cos\theta=-a, -A\omega\sin\varphi=u_0, -B\omega\sin\theta=0 \Rightarrow$
$\varphi=3\pi/2, \theta=\pi, B=a, A=u_0/\omega \Rightarrow$
$x=\left(\frac{u_0}{\omega}\right)\sin\omega t, y=-a\cos\omega t$



Η τροχιά λοιπόν είναι η έλλειψη

$$\left(\frac{x}{u_0/\omega}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=1,$$

η οποία φαίνεται στο σχήμα και διαγράφεται αριστερόστροφα (λόγω φοράς της αρχικής ταχύτητας). Το κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο ισορροπίας.

Θέμα 2: Κατ' αρχήν στη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της βελόνας αναγνωρίζουμε την εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, όπου εδώ η απομάκρυνση μετριέται σε μονάδες γωνίας.
(α) Θέση ισορροπίας είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής $\phi=\sigma\tau\alpha\theta$. Παρατηρούμε ότι όταν *i*=0, η $\phi=0$ αποτελεί λύση της εξίσωσης αφού $\dot{\varphi}=\ddot{\varphi}=0$. Στην περίπτωση τώρα που το αμπερόμετρο διαρρέεται από ρεύμα, πάλι είναι εύκολο να βρούμε τη θέση ισορροπίας αφού οι παράγωγοι της γωνίας πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι για i_0, η θέση ισορροπίας είναι $\varphi=\frac{\alpha i_0}{k}$.
(β) Όταν *b*=0, και $i=i_0$, αναγνωρίζουμε στη διαφορική εξίσωση αυτήν ενός αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση υπό την επήρεια σταθερής δύναμης. Έτσι η εξίσωση κίνησης της βελόνας θα είναι η $\varphi(t)=\frac{\alpha i_0}{k}+A\cos(\omega t+\theta)$, με $\omega=\sqrt{k/M}$. Ο σταθερός όρος εισήχθη, αφού το κέντρο της ταλάντωσης δεν είναι το φ=0 αλλά η νέα θέση ισορροπίας της βελόνας. Από τις αρχικές όμως συνθήκες γνωρίζουμε ότι $\varphi(0)=\dot{\varphi}(0)=0$. Έτσι $\frac{\alpha i_0}{k}+A\cos\theta=0, A\omega\sin\theta=0$.
Επομένως $\theta=0, A=-\frac{\alpha i_0}{k}$.
Η βελόνα λοιπόν θα εκτελέσει την ταλάντωση $\varphi(t)=\frac{\alpha i_0}{k}\left[1-\cos(\omega t)\right]$. Για τις ακραίες τιμές του συνημιτόνου +1,-1 η γωνία παίρνει τις ακραίες τις τιμές 0, $2\frac{\alpha i_0}{k}$. Προφανώς μια τέτοια ταλάντωση δεν είναι επιθυμητή αφού το όργανο ταλαντώνεται και μάλιστα με μεγάλο εύρος γύρω από την πρέπουσα τιμή $\frac{\alpha i_0}{k}$.
(γ) Αν $b\neq 0$, τότε η βελόνα θα εκτελέσει μια φθίνουσα ταλάντωση με κέντρο και πάλι το σημείο ισορροπίας που βρήκαμε στο (α). Θεωρώντας λύσεις της μορφής $\varphi(t)=\frac{\alpha i_0}{k}+Ae^{\omega t}$ η ω της ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί από τη

χαρακτηριστική εξίσωση $M\omega^2 + b\omega + k = 0$. Έτσι $\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}$. Αν $b^2 > 4kM$, έχουμε λύσεις μη ταλαντωτικές εκθετικής πτώσης, ενώ αν $b^2 < 4kM$, έχουμε ταλαντωτικές λύσεις με φθίνον πλάτος. Προφανώς όσο μεγαλύτερο είναι το b, τόσο πιο έντονη είναι η εκθετική πτώση. Η πιο γρήγορα φθίνουσα ταλάντωση θα συμβεί όταν $b = \sqrt{4kM}$. Αν μεγαλώσει και άλλο η τιμή του b, θα περάσουμε σε μη ταλαντωτικές λύσεις, η μια εκ των οποίων (με το πλην πρόσημο) θα έχει ακόμη μεγαλύτερο αρνητικό εκθέτη (πολύ γρήγορη απόσβεση), ενώ η άλλη θα έχει πιο αργή απόσβεση από την ακραία ταλαντωτική αφού $0 > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M} > \frac{-\sqrt{4kM}}{2M} = -\sqrt{\frac{k}{M}}$. Συνεπώς η επιλογή $b = \sqrt{4kM}$, θα έχει τα καλύτερα επιθυμητά αποτελέσματα.

Θέμα 3: (α) Ας δούμε τι δύναμη ασκείται σε ένα σωμάτιο αν βρεθεί στο εξσωτερικό ή στο εξωτερικό της Γης. Στο εσωτερικό ασκείται μόνο η δύναμη της βαρύτητας που προέρχεται από το σφαιρικό μέρος της Γης που βρίσκεται βαθύτερα από το ίδιο το σωμάτιο. Ο σφαιρικός φλοιός που βρίσκεται «πάνω» από το σωμάτιο δεν ασκεί όπως γνωρίζουμε καμμία δύναμη σε αυτό. Έτσι αν το σωμάτιο βρεθεί στη θέση $\vec{r}$, με $|\vec{r}| < R$, θα ασκείται η ελκτική βαρυτική δύναμη:

$$\vec{F}_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\frac{GM(r)m}{r^2}\hat{r} = -\frac{GM\left(r/R\right)^3 m}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{R^3}\vec{r},$$

δηλαδή μια δύναμη τύπου αρμονικού ταλαντωτή. Αν δε το σωμάτιο βρεθεί στο εξωτερικό της Γης θα ακείται η γνωστή δύναμη Παγκόσμιας έλξης αντιστρόφου τετραγώνου:

$$\vec{F}_{\varepsilon\varsigma\xi\omega\tau} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Ας ελέγξουμε τώρα αν είναι δυνατό η τροχιά του σωματιδίου να βρίσκεται εν μέρει εντός και εν μέρει εκτός της Γης. Γνωρίζουμε, ή τέλος πάντων μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε, ότι αν η αρχική ταχύτητα είναι $u_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, τότε το σωμάτιο θα κινείται σε κυκλική τροχιά περνώντας ξυστά πάνω από την επιφάνεια της Γης. Αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρότερη από την τιμή αυτή προφανώς το σωμάτιο θα βυθιστεί κάτω από την επιφάνεια, ενώ αν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη θα εγκαταλείψει σιγά-σιγά την επιφάνεια της Γης. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε ζητώντας την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς αρχικά. Αυτή θα είναι $\rho = \frac{u_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau}{}^2}{a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}} = \frac{u_0{}^2}{F/m} = \frac{u_0{}^2}{GM/R^2}$. Αν η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από τη χαρακτηριστική τιμή τότε $\rho > R$ (σταδιακή απομάκρυνση από την επιφάνεια), ενώ αν είναι μικρότερη τότε $\rho < R$ (σταδιακή βύθιση κάτω από την επιφάνεια). Στην περίπτωση που το σωμάτιο έχει αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη από τη χαρακτηριστική και *εφόσον κινείται στο πεδίο δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου* θα ακολουθήσει ελλειπτική τροχιά, της οποίας το σημείο εκκίνησης είναι το περίγειο (το κοντινότερο σημείο), αφού η κυκλική τροχιά αποτελεί περίπτωση έλλειψης όπου οι δύο εστίες συμπίπτουν, ενώ αν μεγαλώσει η αρχική ταχύτητα η μια εστία παραμένει στη θέση της, του ελκτικού κέντρου, ενώ η άλλη απομακρύνεται. Αυτο σημαίνει ότι η υπόθεση που κάναμε ότι τα σωμάτια θα παραμείνουν στο πεδίο του $\vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$ είναι ορθή και συνεπώς στην περίπτωση αυτή η κίνηση θα είναι έλλειψη εξ' ολοκλήρου εκτός της Γης. Αν τώρα το σωμάτιο κινείται στο εσωτερικό της Γης θα ακολουθήσει την ακόλουθη τροχιά. Χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το κέντρο της Γης και με τον x-άξονα να περνά από το σημείο εκκίνησης:

$$m\ddot{x} = F^{(x)}{}_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\frac{GMm}{R^3}x \Rightarrow x = A\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t + \theta\right)$$

$$m\ddot{y} = F^{(y)}{}_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\frac{GMm}{R^3}y \Rightarrow y = B\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t + \varphi\right),$$

και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $x(0) = -R, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = u_0$, βρίσκουμε, $y = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}}\sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t\right)$. Εφόσον μάλιστα $u_0 < \sqrt{\frac{GM}{R}}$, τα πλάτη και των δύο ταλαντώσεων θα είναι μικρότερα ή το πολύ ίσα με την ακτίνα της Γης. Η τροχιά λοιπόν σε αυτήν την περίπτωση θα είναι και πάλι έλλειψη (με κέντρο τώρα το κέντρο της Γης) εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της Γης.

(β) Ύστερα από την ανάλυση αυτή είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά των τροχιών.

(i) Στην περίπτωση της ελλειπτικής τροχιάς έξω από τη Γη μπορούμε να εξισώσουμε την ενέργεια και την στροφορμή στο εγγύτερο (αρχικό) και στο απώτερο σημείο, προκειμένου να υπολογίσουμε την απόσταση του απώτερου σημείου.

$$\frac{1}{2}mu_0{}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_{\max}},$$

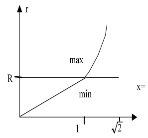
$$mu_0R = mvr_{\max}$$

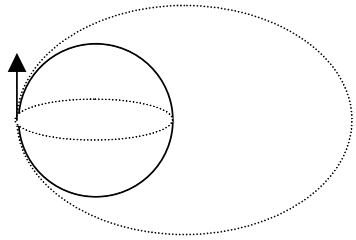
και απαλείφοντας το v,

$$\left(\frac{R}{r_{\max}}\right)^2 - 1 = \frac{2GM}{u_0{}^2R}\left[\left(\frac{R}{r_{\max}}\right) - 1\right] \Rightarrow \left(\frac{R}{r_{\max}}\right) + 1 = \frac{2GM}{u_0{}^2R} \Rightarrow r_{\max} = \frac{R}{\frac{2GM}{u_0{}^2R} - 1} = R\frac{x^2}{2 - x^2}$$

(βλ. σχήμα). Προφανώς η ελάχιστη απόσταση είναι αυτή του αρχικού σημείου, R.

(ii) Στην περίπτωση της ελλειπτικής τροχιάς μέσα στη Γη, όπως δείξαμε η μέγιστη απόσταση είναι το πλάτος στον x-άξονα, R, ενώ η ελάχιστη το πλάτος στον y-άξονα $r_{\min} = \frac{u_0}{\sqrt{GM/R^3}} = R\sqrt{\frac{u_0{}^2}{GM/R}} = Rx$ (βλ. σχήμα). Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις μέγιστες και ελάχιστες αποστάσεις για κάθε τιμή της αρχικής ταχύτητας καθώς και τις τροχιές που σχολιάσαμε παραπάνω





(γ) Εξαιτίας της κίνησης αρμονικού ταλαντωτή στο εσωτερικό της Γης με κοινή συχνότητα, όλα τα σωματίδια με ταχύτητα μικρότερη του $\sqrt{\frac{GM}{R}}$, που θα κινηθούν όπως είπαμε στο εσωτερικό της Γης, θα ολοκληρώσουν ταυτόχρονα την κίνησή τους και θα φθάσουν και ταυτόχρονα στο αρχικό σημείο μετά από χρόνο $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM/R^3}}$. Τα σωματίδια με ταχύτητα μεγαλύτερη από $\sqrt{\frac{GM}{R}}$, θα φθάσουν τόσο πιο αργά στο αρχικό σημείο όσο πιο μεγάλος είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης (σύμφωνα με τον 3^o νόμο του Κέπλερ), δηλαδή όσο πιο μεγάλη είναι η ταχύτητα.

Θέμα 4: (α) Η θέση του ΚΜ είναι εξ ορισμού

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Η ορμή του νέφους είναι $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i = M\dot{\vec{R}}$, όπου M η συνολική μάζα του νέφους.

Τέλος η στροφορμή του νέφους ως προς κάποιο τυχαίο σημείο είναι

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \left(m_i \dot{\vec{x}}_i\right).$$

Η ορμή του ΚΜ και η στροφορμή αυτού διατηρούνται (λόγω απομονωμένου συστήματος και δυνάμεων νευτώνειου τύπου) επομένως θα έχουν την τιμή που έχουν αρχικά για t=0.

$$\vec{P} = \vec{P}(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_{0i}$$

$$\vec{L} = \vec{L}(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{r}_{0i} \times \vec{u}_{0i}\right)$$

(β) Η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας είναι

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right) \times \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}\right) = \vec{L} - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i - M\dot{\vec{R}}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{R}} = \vec{L} - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i\right) = \vec{L} - \vec{R} \times \vec{P}$$

Στην τρίτη ισότητα οι 2 τελευταίοι όροι είναι ίσοι και αντίθετοι και αλληλοεξουδετερώνονται. Το ότι η στροφορμή $\vec{l}$ διατηρείται φαίνεται αν παραγωγίσουμε την τελευταία σχέση. Αφού

$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}\times\vec{P}\right)=\dot{\vec{R}}\times\vec{P}+\vec{R}\times\dot{\vec{P}}=M\vec{P}\times\vec{P}+\vec{R}\times\vec{0}=\vec{0}$ και η $\vec{L}$ διατηρείται.

(γ) Αν αρχικά το νέφος ξεκινήσει με ΜΗ μηδενική στροφορμή $\vec{l}\neq 0$, δεν είναι δυνατό να καταλήξει σε ένα άστρο με μηδενική στροφορμή αφού αυτή διατηρείται. Άστρο μη περιστρεφόμενο θα έχει μηδενική στροφορμή αφού όλα τα σωματίδιά του έχουν μηδενική ταχύτητα ως προς το κέντρο του που είναι αποτελεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Τέτοιο λοιπόν άστρο δεν μπορεί να δημιουργηθεί. Μόνο περιστρεφόμενο άστρο μπορεί να είναι η κατάληξη ενός τέτοιου νέφους.