ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου

Φεβρουάριος 2002

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Σε ένα υποθετικό σύμπαν αντί της γνωστής βαρυτικής δύναμης ένα σώμα ασκεί σε ένα άλλο δύναμη της μορφής $\vec{F} = \lambda \vec{x} \times \vec{u}$, όπου $\vec{x}$ και $\vec{u}$ η θέση και η ταχύτητα του δεύτερου σώματος ως προς το πρώτο, και λ μια παγκόσμια σταθερά. Ας θεωρήσουμε, τώρα, το σύστημα Ήλιου - πλανήτη και λαμβάνοντας τον Ήλιο ως *σταθερό* θα μελετήσουμε την κίνηση του πλανήτη στο «βαρυτικό» πεδίο του Ήλιου.

(α) Για ποιες αρχικές συνθήκες ο πλανήτης κινείται ακτινικά ως προς τον Ήλιο; Περιγράψτε σε αυτή την περίπτωση την κίνηση του πλανήτη.

(β) Αποδείξτε ότι σε κάθε περίπτωση (για οποιαδήποτε κίνηση του πλανήτη) το μέτρο της ταχύτητας, u, και της σττροφορμής, L, του πλανήτη (ως προς τον Ήλιο) παραμένει σταθερό.

(γ) Εάν συμβολίσουμε με R την απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο, τότε το διάνυσμα θέσης του πλανήτη θα είναι $\vec{x} = R\,\hat{e}_r$, όπου $\hat{e}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την ακτινική διεύθυνση. Εκφράστε το σταθερό μέτρο της στροφορμής και της ταχύτητας συναρτήσει των $R(t)$ και $\left|\frac{d\hat{e}_r(t)}{dt}\right|$ και αντιστρέφοντας αυτές τις σχέσεις προσδιορίστε το νόμο μεταβολής της ακτίνας $R(t)$ συναρτήσει των σταθερών ποσοτήτων της κίνησης που βρήκατε παραπάνω.

(δ) Δείξτε ότι η έκφραση: $R(t)^2 = a^2\left[(t+t_0)^2 + t_1^2\right]$

ικανοποιεί την εξίσωση εξέλιξης της $R(t)$ και βρείτε το φυσικό περιεχόμενο των σταθερών a, t_0, t_1.

(ε) Περιγράφει η σχέση αυτή την ακτινική κίνηση του ερωτήματος (α); Ποια η τιμή των ανωτέρω σταθερών τότε;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

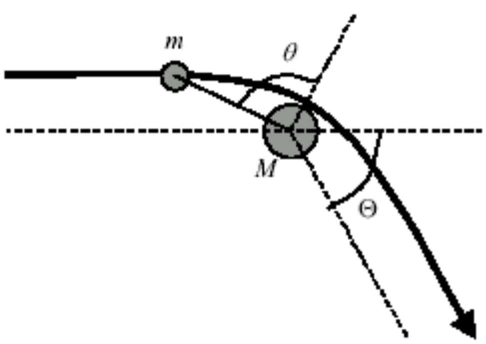
(α) Υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη (μέτρο, διεύθυνση και φορά) στο κέντρο ενός ημισφαιρικού φλοιού απειροστού πάχους και σταθερής επιφανειακής πυκνότητας μάζας ίσης με σ. Η ακτίνα του ημισφαιρικού φλοιού είναι r. (Λόγω σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος μπορείτε να ξεκινήσετε υπολογίζοντας τη βαρυτική δύναμη εξαιτίας ενός απειροστού κομματιού της επιφάνειας του φλοιού.)

(β) Ολοκληρώστε με σωστό τρόπο το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε τη βαρυτική δύναμη που ασκεί ένα ομογενές συμπαγές ημισφαίριο ακτίνας R, και πυκνότητας μάζας ϱ, στο κέντρο της βάσης του.

(γ) Μεταφέρουμε ένα ρολόι εκκρεμές από την επιφάνεια της Γης, όπου ήταν ρυθμισμένο να δουλεύει σωστά, στο κέντρο ενός βουνού στη βάση αυτού (π.χ. ανοίγοντας μια σήραγγα). Θεωρώντας το βουνό κατά μεγάλη προσέγγιση ημισφαιρικό και ομογενές με πυκνότητα όση η μέση πυκνότητα της Γης, υπολογίστε το ύψος του, σε σχέση με την ακτίνα της Γης, αν παρατηρείτε ότι το εκκρεμές «χάνει» 10 δευτερόλεπτα την ημέρα.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Ένα βαγονέτο μάζας M το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα επί οριζοντίων σιδηροτροχιών, είναι δεμένο σε ακλόνητο τοίχο μέσω ενός ελατηρίου σκληρότητας k.
(α) Ποια η συχνότητα οριζοντίων ταλαντώσεων του βαγονέτου;
(β) Αρχίζει να βρέχει με σταθερό ρυθμό, οπότε νερό που πέφτει κατακόρυφα εισχωρεί στο εσωτερικό του βαγονέτου, αλλά, λόγω οπών στον πάτο αυτού, όλο το νερό που πέφτει στο βαγονέτο, «τρέχει» στο έδαφος εγκαταλείποντας το βαγονέτο με την στιγμιαία οριζόντια ταχύτητα που έχει αυτό (αφού το λιγοστό νερό στο εσωτερικό του βαγονέτου κινείται μαζί με το βαγονέτο). Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του βαγονέτου τώρα;
(γ) Εξηγήστε γιατί η μορφή της εξίσωσης κίνησης είναι ίδια με αυτή αρμονικού ταλαντωτή σε μέσο με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας.
(δ) Με τι ρυθμό πρέπει να πέφτει η βροχή στο βαγονέτο ώστε αν το βαγονέτο ξεκινήσει ακίνητο από κάποιο σημείο με τεντωμένο το ελατήριο να μην περάσει ποτέ από το σημείο ισορροπίας;

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Ένα διαστημόπλοιο εκτελεί ελιγμό *βαρυτικής εκσφενδόνισης,* δηλαδή κινείται προς ένα πλανήτη έτσι ώστε χρησιμοποιώντας τη βαρυτική έλξη του πλανήτη να αλλάξει την πορεία του και την ταχύτητά του. Η μάζα του διαστημοπλοίου είναι m και η μάζα του πλανήτη $M >> m$. Υποθέστε ότι ο πλανήτης είναι σφαιρικός και κινείται με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή αγνοήστε το γεγονός ότι ο πλανήτης περιστρέφεται περί τον ήλιο). Η τροχιά του διαστημοπλοίου ως προς τον πλανήτη είναι η κωνική τομή:



$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos\theta\right),$$

όπου r η απόσταση μεταξύ του κέντρου του πλανήτη και του διαστημοπλοίου, $k = GmM$, l το μέτρο της στροφορμής του διαστημοπλοίου ως προς το κέντρο του πλανήτη, E η ολική ενέργεια του διαστημοπλοίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος, δηλαδή στο σύστημα του πλανήτη, και θ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα της σχετικής απόστασης πλανήτη-διαστημοπλοίου ως προς τη θέση ελάχιστης απόστασης του διαστημοπλοίου από τον πλανήτη (βλ. σχήμα).
(α) Μετά τον ελιγμό και αφού απομακρυνθεί πολύ από τον πλανήτη, το διαστημόπλοιο φεύγει από το ηλιακό σύστημα. Τι σχήμα θα έχει τότε η τροχιά στο σύστημα ΚΜ του ηλιακού συστήματος; Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται γαι να επιτευχθεί αυτό; (αγνοήστε τα άλλα βαρυτικά σώματα εκτός του Ήλιου).
(β) Ο παραπάνω ελιγμός μπορεί να θεωρηθεί ως σκέδαση. Αποδείξτε ότι η γωνία σκέδασης Θ συνδέεται με την εκκεντρότητας της τροχιάς μέσω της σχέσης:

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{e},$$

όπου e, η εκκεντρότητα της τροχιάς η οποία παριστάνεται από την τετραγωνική ρίζα που εμφανίζεται στην προηγούμενη έκφραση.

(γ) Υποθέστε ότι σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ο πλανήτης κινείται με ταχύτητα V προς το διαστημόπλοιο και το διαστημόπλοιο με ταχύτητα u προς τον πλανήτη (και οι δύο κινήσεις παράλληλα η μια στην άλλη). Αποδείξτε ότι η κινητική ενέργεια του διαστημοπλοίου, στο ίδιο αυτό σύστημα, αυξάνεται μετά τον ελιγμό κατά

$$\Delta E = m(u+V)V\left(1-\cos\Theta\right),$$

Από που προέρχεται αυτή η ενέργεια;

(δ) Για να κερδίσετε πολύ ενέργεια θα φροντίζατε να στείλετε το διαστημόπλοιο να περάσει κοντά ή μακριά από τον πλανήτη;

Καλή σας επιτυχία