Να απαντήσετε και στα τέσσερα θέματα

ΘΕΜΑ 1: Ένα καλό μοντέλο για να περιγράψουμε την ημιελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων είναι το ακόλουθο. Φαντασθείτε ότι κατά τη διάρκεια της κρούσης των δύο σωμάτων υπάρχει ένα ελατήριο μεταξύ τους το οποίο έχει σκληρότητα k_1 κατά τη διάρκεια της συμπίεσης και k_2 κατά τη διάρκεια της αποσυμπίεσης, με $k_1 < k_2$ ώστε το ελατήριο να έχει μετά την κρούση (όταν δηλαδή παύει πλέον να ασκεί δύναμη) ελαφρώς μικρότερο φυσικό μήκος απ' ότι αρχικά.
(α) Τα δύο σώματα που πρόκειται να συγκρουστούν μέσω αυτού του ελατηρίου έχουν ίδια μάζα και κινούνται σε μια ευθεία με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα ($u_1 > u_2$). Υπολογίστε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας (ΚΜ).
(β) Όταν το ελατήριο θα φτάσει στη μέγιστη συσπείρωση τι ταχύτητα θα έχουν τα δύο σώματα και πάλι στο σύστημα του ΚΜ; Πόση θα είναι αυτή η συσπείρωση;
(γ) Δεδομένης της αλλαγής σκληρότητας του ελατηρίου τι πσοσοστό της αρχικής ενέργειας που είναι αποταμιευμένη σε αυτό θα απελευθερωθεί κατά την αποσυμπίεσή του;
(δ) Υπολογίστε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά το πέρας της κρούσης αρχικά στο σύστημα του ΚΜ και στη συνέχεια στο σύστημα του εργαστηρίου.
(ε) Εξαρτάται το ποσοστό απώλειας ενέργειας στην ανελαστική αυτή κρούση από την ταχύτητα που κινούνταν αρχικά τα δύο σώματα;

ΘΕΜΑ 2: Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται στο επίπεδο υπό την επενέργεια μόνο δύναμης της μορφής $\vec{F} = -k\vec{x}$ (με $k > 0$).
(α) Δείξτε ότι η κίνηση είναι γενικά μια έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων. [Υπόδειξη: είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσετε καρτεσιανές συντεταγμένες για την ανάλυση.]
(β) Δείξτε ότι η περίοδος της κίνησης είναιν ανεξάρτητη από το μέγεθος και το σχήμα της τροχιάς.
(γ) Θεωρήστε ότι αρχικά η θέση του σωματιδίου είναι η (0,α) και η ταχύτητά του είναι $(v_0,0)$. Υπολογίστε τη θέση του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή. Σχεδιάστε την τροχιά που διαγράφει αυτό.
(δ) Υπολογίστε τη διατηρήσιμη στροφορμή του σωματιδίου του ερωτήματος (γ).
(ε) Γράψτε την ενέργεια συναρτήσει της απόστασης του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων $r(t)$ και της στροφορμής L (δηλαδή σε πολικές συντεταγμένες αλλά απαλείφοντας το $\dot{\theta}$ μέσω της χρήσης του L) .
(στ) Ένα από τα κλασικά εργαστηριακά πειράματα πρωτοετών σπουδαστών φυσικής είναι η μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας μέσω ενός απλού εκκρεμούς όπου κανείς εκτρέπει το εκκρεμές κατά μια μικρή γωνία από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του, το αφήνει στη συνέχεια ελεύθερο και μετρά το χρόνο μιας πλήρους αιώρησης. Υποθέτωντας ότι η γωνία αιώρησης είναι πολύ μικρή μπορείτε να θεωρήσετε ότι το βαρίδι του εκκρεμούς κινείται σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Δείξτε ότι η δύναμη στο επίπεδο αυτό έχει τη μορφή $\vec{F} = -k\vec{x}$ και υπολογίστε το αντίστοιχο k. Εξαρτάται η περίοδος που μετράτε από μια ίσως μικρή οριζόντια αρχική ώθηση μέσω του χεριού σας στο βαρίδι σε κάποια τυχαία κατεύθυνση; [Αυτό που εσείς μετράτε είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο ακραίων θέσεων του εκκρεμούς.]. Σύμφωνα με την απάντησή σας στο τελευταίο αυτό ερώτημα σχολιάστε αν το πείραμα αυτό είναι καλό για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

ΘΕΜΑ 3: Σε ένα διδιάστατο κόσμο η δύναμη της βαρύτητας (ας της δώσουμε το όνομα 2-βαρύτητα) θα είχε εξάρτηση από την απόσταση της μορφής $\frac{1}{r}$ (αντί της $\frac{1}{r^2}$ της βαρυτικής δύναμης που έχουμε στο τρισδιάστατο κόσμο), δηλαδή η δύναμη έλξης μεταξύ δύο σημειακών μαζών του διδιάστατου κόσμου θα ήταν:

$$\vec{F} = -G_2 m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

όπου G_2 είναι η 2-βαρυτική παγκόσμια σταθερά. Προκύπτει ότι η 2-βαρύτητα έχει παρόμοιες ιδιότητες με τη βαρύτητα του τρισδιάστατου κόσμου. Για παράδειγμα:
(Α) η 2-βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα που βρίσκεται *εκτός* μιας «σφαιρικά» συμμετρικής κατανενημένης μάζας είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται από ίση μάζα η οποία είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο της «σφαιρικής» κατανομής, [*δεν χρειάζεται να το αποδείξετε*] και
(Β) η 2-βαρυτική δύναμη που ασκείται από μια μάζα ομογενώς κατανεμημένη σε ένα κυκλικό δακτύλιο απειροστού πάχους σε μάζα που βρίσκεται στο εσωτερικό του δακτυλίου είναι μηδενική.
(α) Αποδείξτε την πρόταση (Β) χρησιμοποιώντας ανάλογο γεωμετρικό συλλογισμό με αυτόν που χρησιμοποίησαμε για να αποδείξουμε την αντίστοιχη πρόταση στις τρεις διαστάσεις.
(β) Αν τοποθετήσουμε μια μικρή σημειακή μάζα στο εσωτερικό ενός κυκλικού άστρου με σταθερή πυκνότητα μάζας, και την αφήσουμε ελεύθερη χωρίς αρχική ταχύτητα, τι κίνηση θα εκτελέσει αυτή αν δεν υφίσταται καμία αντίσταση από την ύλη του άστρου;
(γ) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό της κίνησης γύρω από ένα τέτοιο κυκλικό άστρο μάζας M, αγνοώντας τις διαστάσεις αυτού, και δείξτε ότι οι τροχιές γύρω από ένα τέτοιο άστρο είναι *πάντα* δέσμιες. Μπορούμε να έχουμε κομήτες σε ένα τέτοιο κόσμο που να εμφανίζονται μόνο μια φορά;
(δ) Υπολογίστε την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια ενός τέτοιου άστρου.
(ε) Ποια η συνθήκη για να έχουμε κυκλικές κινήσεις;

ΘΕΜΑ 4: Εκτελούμε μια πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα *πολύ μικρή* σε σχέση με την ταχύτητα διαφυγής από τη Γη.
(α) Αν κατά τη διάρκεια της βολής η Γη συρικνωθεί ακαριαία σε ένα υλικό σημείο στο κέντρο της, διατηρώντας όμως τη μάζα της, πόσο κοντά θα περάσει το σωμάτιο που εκτοξεύσαμε από το σημείο στο οποίο έχει συρρικνωθεί ολόκληρη η μάζα της Γης;
(β) Για ποια γωνία βολής η απόσταση αυτή είναι ίση με το μέγιστο ύψος που θα έφτανε το βαλλόμενο σώμα πάνω από την επιφάνεια της Γης αν η Γη δεν συρρικνωνόταν; [Μπορείτε για ευκολία να θεωρήσετε ότι η κίνηση πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι αυτή που υπολογίζει κανείς για ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο.]
(γ) Μετά από πόσο χρόνο θα επιστρέψει το σωμάτιο στο αρχικό σημείο από το οποίο βλήθηκε; [Ο χρόνος που χρειάζεται ένας δορυφόρος ο οποίος περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακριβώς πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι περίπου 83 λεπτά της ώρας.]

Καλή σας επιτυχία