ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Ι

17 Φεβρουαρίου 2015

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Απαντήστε και στα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Όλα τα ερωτήματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας, ενώ τα ερωτήματα με $*$ μοριοδοτούνται με έξτρα πόντους. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Θεωρήστε ένα λεπτό δαχτυλίδι μάζας M και ακτίνας R. Το δαχτυλίδι έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα και βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ με κέντρο την αρχή $(0, 0, 0)$.

1. Προσδιορίστε την ένταση του πεδίου, $\mathbf{g}(z)$, στα σημεία $(0, 0, z)$. Υπολογίστε την ένταση για $|z/R| >> 1$ και για $z = 0$. Είναι αναμενόμενες οι εκφράσεις/τιμές που υπολογίσατε;
2. Προσδιορίστε τώρα, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του προηγουμένου ερωτήματος, το βαρυτικό δυναμικό, $\phi(z)$, στο σημείο $(0, 0, z)$ και υπολογίστε το για $|z/R| >> 1$ και $z = 0$, εξηγώντας πάλι αν αναμένατε αυτά τα αποτελέσματα.
3. Επιβεβαιώστε ότι το δυναμικό είναι συμβατό με την ένταση που υπολογίσατε.
4. Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα επί του άξονα $(0, 0, z)$. Ποια η ταχύτητα του σωματιδίου όταν αυτό φτάσει στο κέντρο του δακτυλιδιού; Συζητήστε τις τιμές της ταχύτητας του σωματιδίου όταν $R \to 0$ και όταν $R \to \infty$. (Θεωρήστε το δαχτυλίδι ακλόνητο).
5. Πόσος χρόνος απαιτείται για φτάσει το σωματίδιο στο κέντρο του δαχτυλιδιού; (Εκτιμήστε τη συμπεριφορά του αντίστοιχου ολοκληρώματος όταν $|z/R| \to \infty$.)

*6. Θεωρήστε τώρα σωματίδιο μάζας m ακίνητο στο σημείο $(0, 0, a)$, με $0 < a/R << 1$. Προσδιορίστε πλήρως την περαιτέρω κίνηση του σωματιδίου αγνοώντας όρους στη δύναμη τάξης $\mathcal{O}(z^2/R^2)$.

*7. Ποια η συναρτησιακή μορφή της πυκνότητας (μάζα ανά όγκο), $\rho(r, \phi, z)$, του δαχτυλιδιού;

ΘΕΜΑ Β Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο υπό την επίδραση του δυναμικού $V(r) = E_0\Theta(r - 1)$ (r η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων και E_0 μια σταθερά με διαστάσεις τετραγώνου ταχύτητας). Το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στο εσωτερικό της σφαίρας $r = 1$ και κινείται με ταχύτητα μέτρου v. [**Δεν** υπάρχει βαρυτικό πεδίο.]

1. Δείξτε ότι η κίνηση της μάζας διεξάγεται σε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.
2. Δείξτε ότι αν η αρχική ενέργεια (ανά μονάδα μάζας) του σωματιδίου είναι $E < E_0$, τότε το σωματίδιο κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας μέσα σε κυκλικό χωρίο $r \leq 1$, κατά μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής αποτελούμενης από χορδές μεγίστου κύκλου.
3. Εκφράστε τη στροφορμή του σωματιδίου συναρτήσει της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία της κίνησης με την κάθετη στον κύκλο στο σημείο τομής της τροχιάς με τον κύκλο. Εξ' αυτού συνάγετε ότι η μάζα ανακλάται στα τοιχώματα του χωρίου με γωνία πρόσπτωσης ίση με τη γωνία ανάκλασης.
4. Προσδιορίστε κατάλληλες συνθήκες έτσι ώστε το σωματίδιο να εκτελέσει περιοδική κίνηση (να επανέρχεται η τροχιά κάποτε στο σημείο εκκίνησης.)

*5. Μπορείτε να περιγράψετε την τροχιά του σωματιδίου όταν $E > E_0$;

ΘΕΜΑ Γ Μια χάντρα μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε μια ράβδο η οποία περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο με κυκλική συχνότητα ω. Η χάντρα συνδέεται με το σημείο περιστροφής της ράβδου με ελατήριο φυσικού μήκους l_0 και σταθεράς $k = m\omega_0^2$. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια, η μάζα ακίνητη επί της ράβδου και το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, ενώ όλο το σύστημα βρίσκεται εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου έντασης g.

1. Να γραφεί η εξίσωση που διέπει τη θέση της χάντρας επί της ράβδου (δηλαδή την ακτινική θέση της χάντρας).
2. Ποια η σχέση μεταξύ των ω, ω_0 ώστε η κίνηση να είναι ταλαντωτική;
3. Αν είναι $\omega = \omega_0$ ποια θα είναι η γενική λύση;
4. Δεδομένου ότι ισχύει η σχέση του ερωτήματος (2) να γραφεί η γενική λύση για την $r(t)$ λαμβάνοντας υπόψη τις δοσμένες αρχικές συνθήκες ($r(0) = l_0, \dot{r}(0) = 0$).
5. Αν $\omega_0^2 = 2\omega^2$ η λύση εξακολουθεί να είναι ταλαντωτική; Για να το διερευνήσετε θέστε στα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος $\omega_0^2 = (2 + \epsilon)\omega^2$ θεωρώντας ότι $0 < \epsilon << 1$ και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της λύσης καθώς $\epsilon \to 0$.

*6. Σε ποιες θέσεις της ράβδου η χάντρα φτάνει σε ακραίες (μέγιστες ή ελάχιστες) αποστάσεις από το σημείο περιστροφής; Ποιες είναι οι ακραίες αυτές θέσεις;

ΘΕΜΑ Δ

1. Να υπολογίσετε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r} = (x, y, z)$ εξαιτίας μιας σημειακής μάζας M που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ με δεδομένο ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών είναι
$$V = -\frac{GmM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$
Αφού εκτελέσετε τις πράξεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες να εκφράσετε τη δύναμη ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0$.

2. Αποδείξτε ότι η στροφορμή του συστήματος δύο μαζών m_1, m_2: $\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2$, που κινούνται αποκλειστικά εξαιτίας της βαρυτικής τους έλξης, είναι σταθερή.
3. Τα δύο σωματίδια του προηγούμενου ερωτήματος έχουν ίδια μάζα m και βρίσκονται αρχικά σε τεράστια απόσταση κινούμενα παράλληλα στον άξονα x (το ένα προς τη θετική κατεύθυνση κατά μήκος της ευθείας $y = a$ με ταχύτητα v και το άλλο προς την αρνητική κατεύθυνση κατά μήκος της ευθείας $y = -a$ με ταχύτητα πάλι v) έτσι ώστε να πλησιάζουν το ένα το άλλο. Ποια είναι η κοντινότερη απόσταση που θα βρεθούν τα δύο σώματα;
4. Έστω 3 σωματίδια με μάζες m_1, m_2, m_3 τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Να γραφεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών σωματιδίων $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$.
5. Να αποδείξετε ότι η ποσότητα
$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{\mathbf{r}}_3^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$$
είναι σταθερά της κίνησης, δηλαδή ότι $dE/dt = 0$. [Δίνεται ότι $df(\mathbf{r}(t))/dt = \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(t))$.]

*6. Διατηρείται η συνολική στροφορμή των 3 αυτών σωματιδίων;

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1. Τα αντιδιαμετρικά σημεία του δαχτυλίου συνεισφέρουν το ίδιο στην κατεύθυνση του άξονα ενώ οι συνιστώσες τους αναιρούνται στην κατεύθυνση κάθετα στον άξονα. Έτσι

$$\mathbf{g}(z) = -\frac{GM}{z^2+R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{GMz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Για $|z/R| >> 1$, $\mathbf{g} = -(GM/z^2)\hat{\boldsymbol{z}}$ (από μακρυά το δαχτυλίδι μοιάζει με σημειακή μάζα). Για $z = 0$, $\mathbf{g} = 0$ (λόγω συμμετρίας προς όλες τις κατευθύνσεις η ένταση δεν θα μπορούσε παρά να είναι μηδενική). Για μικρά z

$$\mathbf{g}(z) = -\frac{GMz}{R^3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

2. Αφού κάθε στοιχειώδης μάζα του δαχτυλίου συνεισφέρει στο δυναμικό κατά $-G\ dm/\sqrt{z^2+R^2}$,

$$\phi(z) = -\frac{GM}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Για $|z/R| >> 1$, $\phi = -(GM/z)$ (από μακρυά το δαχτυλίδι μοιάζει με σημειακή μάζα). Για $z = 0$, $\phi = -GM/R$ (ολόκληρη η μάζα απέχει την ίδια απόσταση). Για μικρά z

$$\phi(z) = -\frac{GM}{R\sqrt{1+z^2/R^2}} \simeq -\frac{GM}{R}(1-\frac{z^2}{2R^2})$$

3. Παραγωγίζοντας το δυναμικό ως προς z πρέπει να πάρουμε το $-\mathbf{g}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}$. Πράγματι

$$-\frac{d\phi}{dz} = -\frac{d}{dz}(-\frac{GM}{z}) = -\frac{GM}{z^2}$$

για $|z/R| >> 1$ και

$$-\frac{d\phi}{dz} = -\frac{d}{dz} - \frac{GM}{R}(1-\frac{z^2}{2R^2}) = -\frac{GMz}{R^3}$$

για $|z/R| << 1$.

4.
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{\sqrt{z^2+R^2}} = 0$$

επομένως

$$v(z=0) = \sqrt{2GM/R}.$$

Για $R \to 0$ η ταχύτητα τείνει στο ∞, ενώ για $R \to \infty$ η ταχύτητα τείνει στο 0.

5. Ο χρόνος θα είναι

$$dz/dt = -\sqrt{\frac{2GM}{\sqrt{z^2+R^2}}} \to T = \int_0^T dt = \int_\infty^0 \frac{-dz}{\sqrt{2GM}}\sqrt[4]{z^2+R^2}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αποκλείνει για $z \to \infty$ ως $z^{3/2}$, οπότε ο χρόνος είναι άπειρος.

6. Το δυναμικό είναι τετραγωνικό ως προς z δηλαδή αρμονικού ταλαντωτή.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{GM}{R^3}z^2 = \text{σταθ}$$

επομένως η συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{GM/R^3}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η δύναμη είναι γραμμική.

7.

$$\rho = \delta(r-R)\delta(z)\frac{M}{2\pi R}$$

έτσι ώστε το ολοκλήρωμά της σε όλο το χώρο να δίνει M.

ΘΕΜΑ Β

1. Όντας κεντρικό το δυναμικό, διατηρείται η στροφορμή και η κίνηση είναι επίπεδη. Το επίπεδο είναι αυτό των αρχικών θέσεων $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$. Προφανώς το επίπεδο περιέχει το κέντρο της σφαίρας $r = 1$ αφού σε αυτό βρίσκεται το $\mathbf{r}(0)$. Το επίπεδο αυτό τέμνει τη σφαίρα σε ένα μέγιστο κύκλο (αφού περιέχει το κέντρο).

2. Όσο το σωματίδιο βρίσκεται εντός του μηδενικού ομογενούς πεδίου εντός της σφαίρας κινείται ελεύθερα. Το ίδιο και αν καταφέρει να βγεί έξω από τη σφαίρα (πάλι ομογενές πεδίο). Επομένως και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό θα κινείται με σταθερή (αλλά διαφορετική ταχύτητα). Αν $E < E_0$ δεν θα μπορέσει να βγει έξω και η ταχύτητα θα είναι συνεχώς σταθερού μέτρου $|\mathbf{v}| = v(0)$. Επομένως το σωματίδιο θα διαγράφει διαδοχικές χορδές του παραπάνω κύκλου

3. Αν $\hat{\boldsymbol{n}}$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στο σημείο κρούσης του σωματιδίου με τον κύκλο θα είναι $\mathbf{v}_{\text{πριν}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = v\cos\phi_{\text{πριν}}$. Η στροφορμή (ανά μονάδα μάζας) θα είναι $rv\sin\phi_{\text{πριν}}$. Λόγω διατήρησης της στροφορμής θα είναι μετά την κρούση $rv\sin\phi_{\text{πριν}} = rv\sin\phi_{\text{μετά}}$, και επομένως $\phi_{\text{πριν}} = \pi - \phi_{\text{μετά}}$ (αν ήταν ίσες το σωματίδιο θα εξέρχόταν από τη σφαίρα).

4. Για να κλείνει η τροχιά θα πρέπει τα τόξα μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων να είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π, δηλαδή $\pi - 2\phi_{\text{πριν}} = \frac{p}{q}2\pi$.

5. Αν $E > E_0$ το σωματίδιο ξεπερνά το φράγμα δυναμικού και εξέρχεται με ταχύτητα $v' = \sqrt{v^2 - 2E_0}$ ενώ από διατήρηση στροφορμής θα είναι $v\sin\phi_{\text{πριν}} = v'\sin\phi_{\text{μετά}}$ (διάθλαση). Η κίνηση θα είναι εύθυγραμμη στη συνέχεια.

ΘΕΜΑ Γ

1.

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -k(r - l_0) - mg\sin\omega t \rightarrow \ddot{r} + (\omega_0^2 - \omega^2)r = \omega_0^2 l_0 - g\sin\omega t$$

2. Πρέπει $\Omega^2 = \omega_0^2 - \omega^2 > 0$ αλλιώς θα έχουμε εκθετικές λύσεις.

3. Αν $\Omega = 0$ η λύση είναι

$$r(t) = A + Bt + l_0\omega_0^2 t^2/2 + (g/\omega^2)\sin\omega t$$

4.

$$r(t) = C\cos\Omega t + S\sin\Omega t + l_0\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - \frac{g}{\Omega^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

Αφού $r(0) = l_0, \dot{r}(0) = 0$, $C = l_0 - l_0\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = -l_0\frac{\omega^2}{\Omega^2}$ και $S = \frac{g\omega}{\Omega(\Omega^2-\omega^2)} = \frac{g\omega}{\Omega(\omega_0^2-2\omega^2)}$

5. Αν $\omega_0^2 = 2\omega^2$ η λύση είναι απροσδιόριστη (0/0). Επομένως θα βρούμε το όριο της παραπάνω λύσης για $\omega_0^2 = (2+\epsilon)\omega^2$ και $\Omega^2 = (1+\epsilon)\omega^2$, $\Omega = (1+\epsilon/2)\omega$. Με πράξεις

$$r(t) = \lim_{\epsilon\to 0} l_0 + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\omega(1+\epsilon/2)t - (1+\epsilon/2)\sin\omega t}{\epsilon(1+\epsilon/2)} = l_0 + \frac{g}{2\omega^2}(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

6. Η λύση αυτή έχει ταχύτητα 0 όταν $-\cos\omega t + \cos\omega t - \omega t\sin\omega t = 0$ δηλαδή για $\omega t_n = n\pi$. Τότε όμως

$$r(t_n) = l_0 + \frac{g}{\omega^2}n\pi(-1)^n$$

δηλαδή κάθε φορά που περνά από την αρχική θέση η ράβδος η χάντρα έχει μετατοπιστεί κατά ένα επιπλέον $2\pi g/\omega^2$.

ΘΕΜΑ Δ

1.
$$V(x,y,z) = -\frac{GMm}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}V &= -\frac{GMm}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}^3}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\\ &= -\frac{GMm}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\end{aligned}$$

2. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= m_1\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_1} + \mathbf{r_1}\times\mathbf{F_1} + m_2\mathbf{v_2}\times\mathbf{v_2} + \mathbf{r_2}\times\mathbf{F_2}\\ &= \mathbf{r_1}\times\boldsymbol{\nabla}_1V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) + \mathbf{r_2}\times\boldsymbol{\nabla}_2V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\\ &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r_1}\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) + \mathbf{r_2}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)) = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

3. Το ΚΜ είναι ακίνητο. Ας το τοποθετήσουμε στην αρχή των αξόνων. Η διατήρηση της στροφορμής δίνει

$$2mav = mr_{\text{min}}v_{\text{max}}$$

όπου τα r_{min}, v_{max} είναι η μικρότερη δυνατή σχετική απόσταση και η αντίστοιχη μέγιστη ταχύτητα του κάθε σωματιδίου (κάθετα στην απόσταση). Επίσης από διατήρηση ενέργειας του συστήματος

$$2\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 2\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 - \frac{Gm^2}{r_{\text{min}}}.$$

Συνδυάζοντας τις 2 διατηρήσεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$r_{\text{min}}^2 + \frac{Gm}{v^2}r_{\text{min}} - 4a^2 = 0.$$

με λύση

$$r_{\text{min}} = \frac{Gm}{2v^2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{16a^2v^4}{G^2m^2}}\right)$$

4.
$$V = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|}.$$

5.
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{F}_3 + \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1 V + \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2 V + \mathbf{v}_3 \cdot \boldsymbol{\nabla}_3 V \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\nabla}_1 V) + \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{F}_2 + \boldsymbol{\nabla}_2 V) + \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{F}_3 + \boldsymbol{\nabla}_3 V) = 0\end{aligned}$$

Αφού όλες οι παρενθέσεις είναι 0 από τον ορισμό των εκάστοτε δυνάμεων.

6. Και η συνολική στροφορμή διατηρείται αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη ίσων και αντιθέτων δυνάμεων και πάνω στον ίδιο φορέα. Επομένως οι ροπές τους (ως προς οποιοδήποτε σημείο) είναι ίσες και αντίρροπες. Η συνολική ροπή είναι 0 και άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Το αποτέλεσμα δεν σχετίζεται με το ότι οι δυνάμεις είναι βαρυτικές αλλά με το ότι υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα και ότι βρίσκονται στην ευθεία που συνδέει τα αλληλεπιδρώντα σώματα.