



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
Φεβρουάριος 2004

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε με σαφήνεια και συντομία. Η ορθή πλήρης απάντηση θέματος εκτιμάται περισσότερο από τη μερική απάντηση και τα σοβαρά λάθη προσμετρώνται αρνητικά στη βαθμολογία. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Δύο σωματίδια μάζας m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικό ελατήριο σταθεράς k το οποίο έχει μηδενικό φυσικό μήκος και όταν τεντωθεί ασκεί στα άκρα του δυνάμεις κατά μήκος του άξονά του. Τα δύο σωματίδια βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (-a, 0, 0)$ και έχουν ταχύτητες $\vec{u}_1 = (0, V, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 0)$, όπου $a > 0, V > 0$.

(α) Τι κίνηση θα εκτελέσει το κέντρο μάζας του συστήματος και που θα βρίσκεται αυτό μετά από χρόνο t ;

(β) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης για τη σχετική θέση των δύο σωμάτων και εξηγήστε για ποιο λόγο αυτή θα εκτυλίσσεται σε ένα σταθερό επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας. Ποιο είναι το επίπεδο αυτό; Η καθεμία από τις μάζες θα κινείται σε αυτό το επίπεδο;

(γ) Επιλέγοντας ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λύστε τις εξισώσεις κίνησης για τη σχετική θέση των δύο σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας και στη συνέχεια προσδιορίστε τις θέσεις των δύο σωμάτων στο σύστημα αυτό. Σχεδιάστε την τροχιά που εκτελεί η σχετική θέση στο σύστημα του κέντρου μάζας σημειώνοντας τη σχετική θέση επί της τροχιάς την αρχική χρονική στιγμή καθώς και τη φορά της κίνησής της. Τι είδους τροχιά είναι αυτή;

(δ) Έχουμε τη δυνατότητα με ένα μηχανισμό τηλεχειρισμού να αλλάξουμε ακαριαία τη σταθερά του ελατηρίου όσο θέλουμε χωρίς να αλλάξουμε τη θέση και τη στροφορμή του συστήματος. Πότε πρέπει να το κάνουμε αυτό ώστε στη συνέχεια τα δύο σώματα να έχουν για πάντα σταθερή απόσταση το ένα από το άλλο; Ποιες είναι οι δύο δυνατές τιμές της σταθερής αυτής απόστασης και πόσο πρέπει να μεταβληθεί το k σε κάθε περίπτωση;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Σε ένα ηλεκτρόνιο μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\dot{\vec{x}}$ στην περιοχή του Βορείου Πόλου της Γης ασκείται η ακόλουθη δύναμη από το μαγνητικό πεδίο της Γης

$$\vec{F} = -a\dot{\vec{x}} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3},$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά. Το διάνυσμα θέσης του ηλεκτρονίου $\vec{x}$ λαμβάνεται με αρχή το Βόρειο Πόλο.

(α) Αμελώντας τη δύναμη της βαρύτητας γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης του ηλεκτρονίου. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το $\dot{\vec{x}}$ δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου παραμένει σταθερό.

(β) Λαμβάνοντας το εξωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το διάνυσμα $\vec{x}$ δείξτε ότι το διάνυσμα

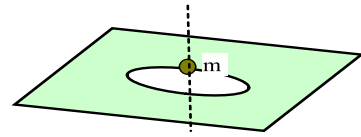
$$\vec{M} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} + a \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

παραμένει σταθερό κατά την κίνηση. Η κλασική στροφορμή του ηλεκτρονίου διατηρείται;

- (γ) Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο του σταθερού διανύσματος $\vec{M}$ με το διάνυσμα $\vec{x}$ δείξτε ότι το ηλεκτρονίο κινείται επί μίας κωνικής επιφάνειας με κορυφή το Βόρειο πόλο.
 (δ) Βρείτε κάποια αρχική συνθήκη ώστε το ηλεκτρόνιο να διαφεύγει στο άπειρο.
 [Δίδεται η διανυσματική ταυτότητα: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$]

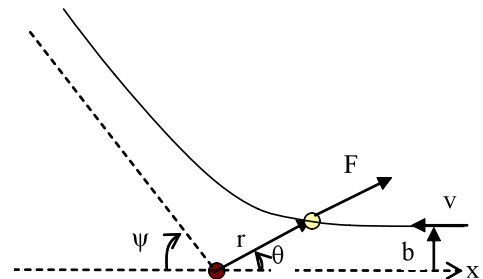
Θέμα 3 (25 μονάδες)

- (α) Υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα σε απόσταση z από ένα άπειρο επίπεδο σταθερής επιφανειακής πυκνότητας μάζας σ .
 (β) Αν στον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης εκτελούσατε την ολοκλήρωση όχι σε ολόκληρο το επίπεδο αλλά μέχρι μιας ακτίνας kz (όπου k κάποιος μεγάλος αριθμός) από το ίχνος της κάθετου που διέρχεται από τη θέση του σωματιδίου, θα οδηγούσασταν σε κάπως λανθασμένη τιμή της δύναμης. Δείξτε ότι το σχετικό λάθος είναι ανεξάρτητο από την απόσταση της μάζας από το επίπεδο και ίσο με $1/\sqrt{1+k^2}$.
 (γ) Υπολογίστε τώρα τη βαρυτική δύναμη από μια άπειρη τέτοια πλάκα στην οποία έχει ανοιχτεί μια κυκλική τρύπα ακτίνας R . Ο υπολογισμός να γίνει στην κάθετο που περνά από το κέντρο της τρύπας (βλ. Σχήμα).
 (δ) Δείξτε ότι μια σημειακή μάζα αν αφεθεί ακίνητη πολύ κοντά στο κέντρο της τρύπας και πάνω στην κάθετο που περνά από το κέντρο αυτής θα εκτελέσει γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις υπό την προϋπόθεση ότι η απόσταση της μάζας $|z|$, από το επίπεδο ικανοποιεί τη σχέση $|z|/R \ll 1$. Υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης και συζητήστε την ισχύ των συμπερασμάτων σας στα όρια που η ακτίνα της τρύπας τείνει στο $R \rightarrow 0$ και στο $R \rightarrow \infty$.



Θέμα 4 (25 μονάδες)

Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της κεντρικής απωστικής δύναμης A/r^2 , όπου r η απόσταση του σωματιδίου από το απωστικό κέντρο. Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το κέντρο και κινείται με ταχύτητα v με κατεύθυνση προς το κέντρο επί μιας ευθείας, η οποία περνά σε απόσταση b από το κέντρο της δύναμης.



- (α) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου θα είναι επίπεδη.
 (β) Η κίνηση στο επίπεδο της κίνησης περιγράφεται με πολικές συντεταγμένες (r, θ) , όπου αρχικά η γωνία θ του σωματιδίου είναι $\theta_0 = 0$ (το σωματίδιο βρίσκεται στο άπειρο). Δείξτε ότι κατά την κίνηση του σωματιδίου το γινόμενο $r^2 \dot{\theta}$ θα είναι σταθερό και ίσο με bv .
 (γ) Τελικά το σωματίδιο θα βρεθεί και πάλι πολύ μακριά από το κέντρο κινούμενο σε μια τροχιά που είναι σχεδόν ευθεία και σχηματίζει γωνία $\theta_{\text{τελ}} = \pi - \psi$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη γωνία ψ . Προς τούτο: Υπολογίστε τη διαφορά της τελικής και αρχικής ορμής στη διεύθυνση της αρχικής κίνησης θεωρώντας δεδομένη την τελική κίνηση σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή.
 (δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο της συνιστώσας της απωστικής δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο στη διεύθυνση x της αρχικής κίνησης, δηλαδή το

$$\int \frac{A}{r^2} \cos \theta dt.$$

(ε) Τέλος, από τα παραπάνω, αποδείξτε ότι η γωνία ψ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{A}{mv^2 b}.$$

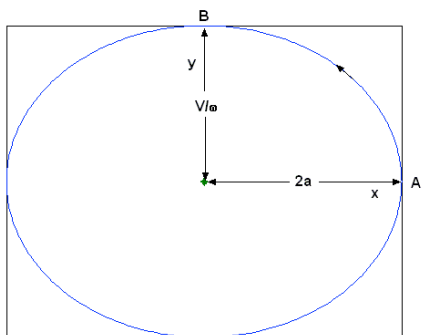
Λύσεις

Θέμα 1. α) Οι εξισώσεις κίνησης είναι $m\ddot{\vec{r}}_1 = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ και $m\ddot{\vec{r}}_2 = k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$, λόγω κοινής μάζας, οπότε αθροίζοντας τις εξισώσεις

κίνησης έχουμε: $2m\ddot{\vec{R}} = 0$. Το κέντρο μάζας λοιπόν εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, και επειδή αρχικά το κέντρο μάζας βρισκόταν στην αρχή και είχε αρχική ταχύτητα $\vec{V} = (0, V/2, 0)$ η θέση του κέντρου μάζας θα δίδεται από την $\vec{R}(t) = \frac{Vt}{2} \vec{j}$ όπου $\vec{j}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $(0, 1, 0)$.

β) Ορίζουμε τη σχετική θέση $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Αφαιρώντας τις εξισώσεις κίνησης έχουμε $\mu\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$ όπου $\mu = m/2$ η ανηγμένη μάζα. Το διάνυσμα της σχετικής θέσης $\vec{r}$ θα εκτελεί επίπεδη κίνηση, διότι η σχετική στροφορμή $\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ είναι σταθερά της κίνησης και συνεπώς το διάνυσμα θα κείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα $\vec{L}$ το οποίο επειδή η αρχική σχετική θέση είναι $\vec{r}(0) = 2a\vec{i}$, όπου το $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $(1, 0, 0)$ και η αρχική σχετική ταχύτητα $\dot{\vec{r}}(0) = V\vec{j}$ η σχετική στροφορμή θα είναι $\vec{L} = 2aV\vec{k}$ όπου $\vec{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $(0, 0, 1)$. Συνεπώς η σχετική κίνηση θα εξελίσσεται στο επίπεδο (x, y) . Επειδή $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}$ και $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}$ και το κέντρο μάζας κινείται επί του άξονα $\vec{j}$ το επίπεδο της κίνησης κάθε μάζας θα είναι πάντοτε το αρχικό επίπεδο $(x, y, 0)$.

γ) Οι συνισταμένες της εξίσωσης της σχετικής κίνησης είναι $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$



όπου $\omega^2 = k/\mu = 2k/m$ με αρχικές τιμές $x(0) = 2a$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = V$. Συνεπώς η σχετική θέση θα είναι αργότερα η $x(t) = 2a \cos \omega t$, $y(t) = \frac{V}{\omega} \sin \omega t$ ή διανυσματικά

$\vec{r}(t) = 2a \cos \omega t \vec{i} + \frac{V}{\omega} \sin \omega t \vec{j}$. Η τροχιά της σχετικής ακτίνας είναι μία έλλειψη με κύριους άξονες $2a$ και V/ω . Η αρχική θέση της σχετικής ακτίνας είναι στο σημείο A του σχήματος και η φορά εφόσον

$a > 0, V > 0$ είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

δ) Η κίνηση στο σύστημα κέντρου μάζας είναι πάντα μία έλλειψη με κέντρο την αρχή. Εφόσον μετά την αλλαγή του k η νέα τροχιά θα έχει την ίδια ακτίνα, η καινούργια τροχιά

μπορεί να είναι κυκλική μόνον όταν η σχετική ταχύτητα είναι κάθετη στη ακτίνα σχετικής θέσης, και συνεπώς η αλλαγή πρέπει να επιχειρηθεί όταν το σωματίδιο βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της έλλειψης, δηλαδή στα σημεία Α ή Β ή στα αντιδιαμετρικά τους. Έτσι η σταθερή απόσταση μεταξύ των μαζών θα είναι ή $r_c = 2a$ ή $r_c = V/\omega$. Επειδή στη κυκλική κίνηση πρέπει η κεντρομόλος δύναμη να είναι ίση με την ελαστική δύναμη θα έχουμε $\mu v^2 / r_c = k' r_c$ ή $k' = \mu v^2 / r_c^2$. Αν ο τηλεχειρισμός επιχειρηθεί στο σημείο Α (ή στο αντιδιαμετρικό του) η ταχύτητα είναι V και η κυκλική ακτίνα θα είναι η $r_c = 2a$. Η καινούρια σταθερά του ελατηρίου θα πρέπει να γίνει τότε $k' = mV^2 / (8a^2)$. Αν ο τηλεχειρισμός επιχειρηθεί στο σημείο Β (ή στο αντιδιαμετρικό του) η ταχύτητα είναι $2a\omega$ και η κυκλική ακτίνα θα είναι η $r_c = V/\omega$. Η καινούρια λοιπόν σταθερά του ελατηρίου θα πρέπει να γίνει τότε $k' = 2ma^2\omega^4 / V^2 = 8a^2k^2 / mV^2$.

Θέμα 2. α) Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης αυτής με το $\dot{\vec{x}}$ έχουμε $m\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} \cdot \left(-a\dot{\vec{x}} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = 0$ και συνεπώς $\frac{m}{2} \frac{d(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}})}{dt} = m\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} = 0$ και συνεπώς το μέτρο της

ταχύτητας είναι σταθερό διότι $|\dot{\vec{x}}| = \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}$.

β) Λαμβάνοντας το εξωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το διάνυσμα θέσης το μεν αριστερό μέρος της εξίσωσης γίνεται:

$$m\vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = m \frac{d(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})}{dt}$$

το δε δεξιό μέλος (χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα)

$$\vec{x} \times \left(-a\dot{\vec{x}} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \left(-a \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \dot{\vec{x}} - \left(-a \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|^3} \right) \vec{x} = -a \frac{\dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|} + \left(a \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|^3} \right) \vec{x} = -a \frac{d}{dt} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

επειδή

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2} \frac{d|\vec{x}|}{dt} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2} \frac{d|\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}|}{dt} = -\frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|^3}$$

Συνεπώς το διάνυσμα

$$\vec{M} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} + a \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

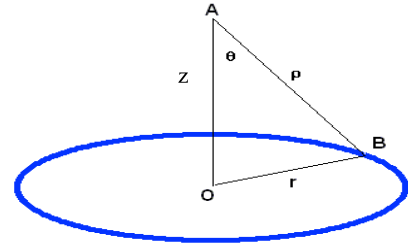
διατηρείται κατά την κίνηση.

γ) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{x} \cdot \vec{M} = a \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} = a|\vec{x}|$. Αν θ η γωνία μεταξύ του σταθερού διανύσματος και του διανύσματος θέσεως τότε από τη παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $|\vec{x}| |\vec{M}| \cos \theta = a|\vec{x}|$ οπότε η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσεως με το σταθερό διάνυσμα $\vec{M}$ είναι σταθερή και ίση με $\cos \theta = a/|\vec{M}|$. Συνεπώς η τροχιά κείται επί της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το βόρειο πόλο άξονα συμμετρίας το $\vec{M}$ και άνοιγμα $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a}{|\vec{M}|} \right)$.

δ) Πώς είναι δυνατόν το $\vec{M}$ να είναι σταθερό, ενώ το $\vec{x}$ στον όρο $\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ είναι άπειρο. Μια περίπτωση είναι όταν το $\vec{x}$ είναι εξαρχής παράλληλο με το $\dot{\vec{x}}$. Αναμφίβολα όμως αν αρχικά η ταχύτητα είναι παράλληλη στο διάνυσμα θέσης τότε δεν ασκείται δύναμη στο ηλεκτρόνιο και θα διαφύγει με σταθερή ταχύτητα προς το άπειρο. Η αλήθεια είναι ότι αν το σωματίδιο απομακρύνεται αρχικά από την κορυφή του κώνου, με την πάροδο του χρόνου η ταχύτητά του θα γίνεται όλο και πιο ακτινική έτσι ώστε η γωνία μεταξύ της σταθερής ταχύτητας και της θέσης να μικραίνει αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση από το Βόρειο πόλο έτσι ώστε το $\vec{M}$ να παραμένει σταθερό

Θέμα 3 Ένας δακτύλιος ακτινικού πλάτους dr έχει μάζα $\sigma 2\pi r dr$ και ασκεί δύναμη στη κατεύθυνση της καθέτου ΑΟ (βλ. Σχήμα) ίση με

$$dF = -Gm\sigma 2\pi r dr \frac{\cos\theta}{\rho^2} = -Gm\sigma 2\pi \frac{zrdr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{ή ζ.}$$



Ένας δακτύλιος πλάτους dr ασκεί συνεπώς δύναμη:

$$dF = 2m\pi\sigma Gz \frac{d}{dr} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

σε μια μάζα m που βρίσκεται επί της καθέτου που διέρχεται από το κέντρο του δακτυλίου και σε απόσταση z από αυτόν.

α) Η συνολική δύναμη από όλο το επίπεδο θα είναι:

$$F = 2m\pi\sigma Gz \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = 2m\pi\sigma Gz \left[\frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = -2m\pi\sigma G \frac{z}{|z|}$$

που είναι μια σταθερή ελκτική δύναμη.

β) Αν ολοκληρώναμε μέχρι κάποια ακτίνα ka τότε η δύναμη θα ήταν

$$F_{ka} / m = 2\pi\sigma Gz \int_0^{ka} dr \frac{d}{dr} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = 2\pi\sigma Gz \left[\frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^{ka} = -2\pi\sigma G \frac{z}{|z|} + 2\pi\sigma G \frac{z}{|z| \sqrt{1+k^2}}$$

και το σχετικό λάθος θα ήταν $\frac{F_{ka} - F}{F} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, ανεξάρτητο από την απόσταση του

σωματιδίου από τη πλάκα.

γ) Στην περίπτωση της τρύπιας πλάκας η δύναμη είναι:

$$F_R / m = 2\pi\sigma Gz \int_R^\infty dr \frac{d}{dr} \frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = 2\pi\sigma Gz \left[\frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_R^\infty = -2\pi\sigma G \frac{z}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2} \quad \text{Αν } \frac{z}{R} \ll 1$$

τότε η δύναμη σε πρώτη τάξη είναι $F_R = -\frac{2\pi\sigma G}{R} z$, οπότε η κίνηση του σωματιδίου που

έχει συντεταγμένη z επί της καθέτου είναι $\ddot{z} = -\frac{2\pi\sigma G}{R} z$, οπότε έχουμε αρμονική

ταλάντωση συχνότητας $\omega^2 = \frac{2\pi\sigma G}{R}$. Η συχνότητα αυτή τείνει στο άπειρο (η περίοδος

γίνεται μηδενική) όταν $R \rightarrow 0$. Αυτό είναι αντιδιαισθητικό αλλά σημειώστε ότι έχουμε υποθέσει ότι η κίνηση πρέπει να είναι πάρα πολύ κοντά στο επίπεδο ώστε να

ικανοποιείται η $\frac{z}{R} \ll 1$. Στην περίπτωση αυτή η πλάκα είναι σχεδόν ολόκληρη οπότε η

κίνηση γίνεται για απειροστό διάστημα με σταθερή επιτάχυνση, οπότε η περίοδος πηγαίνει ανάλογα με την $\sqrt{z} \propto \sqrt{R}$, σε συμφωνία με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Όταν $R \rightarrow \infty$ η

συχνότητα τείνει στο μηδέν, και έχουμε άπειρη περίοδο. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι τότε δεν υπάρχει ύλη να έλκει το σωματίδιο και το σωματίδιο θα κινείται σχεδόν με σταθερή ταχύτητα και η δύναμη υπεισέρχεται μόνο σε πάρα πολύ μεγάλες αποστάσεις από το επίπεδο, η περίοδος μιας τέτοιας κίνησης τείνει στο άπειρο αν $R \rightarrow \infty$.

Θέμα 4 α) και β) Η δύναμη είναι κεντρική οπότε διατηρείται η στροφορμή και η κίνηση είναι επίπεδη. Η αρχική στροφορμή είναι mnb και η στροφορμή αργότερα είναι $mr^2\dot{\theta}$ οπότε και $r^2\dot{\theta} = nb$.

γ) Η αρχική ορμή στον άξονα x είναι $p(0) = -mv$ ενώ η τελική συνιστώσα της ορμής στο άξονα της αρχικής κίνησης: $p(\infty) = -mv \cos \psi$. Προσέξτε ότι η τελική ταχύτητα πρέπει να είναι ίση με την αρχική από τη διατήρηση της ενέργειας. Συνεπώς η μεταβολή της ορμής στη διεύθυνση της αρχικής κίνησης είναι:

$$\Delta p_x = p(\infty) - p(0) = -mv \cos \psi + mv = mv(1 - \cos \psi) = 2mv \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

δ) Το ολοκλήρωμα $\int \frac{A}{r^2} \cos \theta dt$ εύκολα υπολογίζεται μετατρέποντας την ολοκλήρωση από το χρόνο στις γωνίες και κάνοντας χρήση της διατήρησης της στροφορμής έχουμε $dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{r^2 d\theta}{bv}$ συνεπώς

$$\int_0^\infty F \cos \theta dt = \int_0^\infty \frac{A}{r^2} \cos \theta dt = \int_0^{\pi-\psi} \frac{A}{r^2} \cos \theta \frac{r^2 d\theta}{bv} = \frac{A}{bv} \int_0^{\pi-\psi} \cos \theta d\theta = \frac{A}{bv} \sin(\pi - \psi) = \frac{A}{bv} \sin \psi.$$

ε) Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι η αλλαγή της ορμής στον άξονα της αρχικής διεύθυνσης ισούται με το ολοκλήρωμα της δύναμης σε αυτή τη διεύθυνση ως προς το χρόνο. Συνεπώς: $\Delta p_x = \frac{A}{bv} \sin \psi$ και άρα

$$2mv \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{A}{bv} \sin \psi = \frac{2A}{bv} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Καταλήγουμε έτσι στη ζητούμενη σχέση:

$$\boxed{\tan \frac{\psi}{2} = \frac{A}{mv^2 b}}.$$