Ισορροπώντας ένα μολύβι

Πάρτε ένα μολύβι το οποίο στέκεται κατακόρυφα πάνω στη μύτη του και έπειτα αρχίζει να πέφτει. Ας θεωρήσουμε ότι το μολύβι είναι μία μάζα m που βρίσκεται στο άκρο μίας αβαρούς ράβδου μήκους l.

1) Υποθέστε ότι το μολύβι σχηματίζει αρχικά μία μικρή γωνία θ_0 με τη κατακόρυφο και ότι η αρχική γωνιακή του ταχύτητα είναι ω_0. Η γωνία θα γίνει τελικά μεγάλη, αλλά όσο παραμένει μικρή (έτσι ώστε $\sin\theta \approx \theta$), υπολογίστε το $\theta(t)$.

2) Θα μπορούσατε να υποθέστε ότι είναι τουλάχιστον θεωρητικά δυνατό να ισορροπήσει το μολύβι παραμένοντας στη κατακόρυφη θέση γιά όσο χρόνο θέλετε επιλέγοντας αρκούντως μικρά θ_0 και ω_0. Αλλά αυτό δεν είναι ορθό. Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg (που περιορίζει το πόσο καλά μπορούμε να γνωρίζουμε τη θέση και την ορμή του μολυβιού) περιορίζει τον χρόνο που μπορεί να είναι το μολύβι κατακόρυφο διότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε συγχρόνως ότι το μολύβι είναι κατακόρυφο και ακίνητο. Σκοπός του προβλήματος είναι να υπολογίστε τον χρόνο αυτό. Το αποτέλεσμα θα σας εκπλήξει. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες ας πούμε ότι η κβαντική μηχανική μας λέει ότι $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ (όπου $\hbar = 1.06 \times 10^{-34}\, Js$). Παρότι είναι λίγο ασαφές πως μεταφράζεται αυτός ο περιορισμός στο πρόβλημά μας, εμείς υποθέτουμε ότι η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι οι αρχικές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα $(l\theta_0)(ml\omega_0) \geq \hbar$. Με αυτή τη συνθήκη προσδιορίστε το μέγιστο χρόνο που απαιτείται για να γίνει η γωνία θ πρώτης τάξης. Με άλλα λόγια υπολογίστε για πόσο χρόνο μπορεί να είναι το μολύβι σε κατακόρυφη ισορροπία. (Υποθέστε ότι $m = 0.01 kg$, $l = 0.1 m$.)