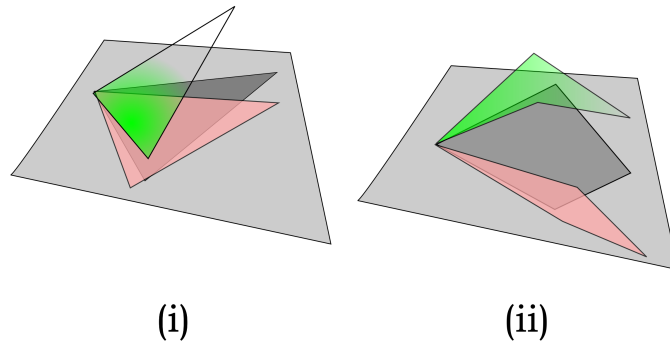


Κεφάλαιο 15

1 Η έννοια του στερεού σώματος

Ο τεχνολογικός πολιτισμός μας είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την ύπαρξη στερεών σωμάτων τα οποία έχουν συγκεκριμένες διαστάσεις και σχήμα, δηλαδή αντικείμενα των οποίων οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ καθορισμένων σημείων τους είναι σταθερές. Είναι αυτή η απαίτηση αρκετή για να καταστήσει ένα αντικείμενο στερεό; Προφανώς όχι, όπως μπορεί κανείς να φανταστεί αν κατασκευάσει ένα τετράπλευρο με σταθερές πλευρές αλλά ευλύγιστες αρθρώσεις (βλ. Σχήμα 1. Αντιθέτως ένα τρίγωνο με δεδομένες πλευρές έχει την ίδια μορφή (σχήμα) όπως και αν το μετακινήσουμε. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ένα αντικείμενο μπορεί να θεωρείται στερεό αν όλες οι αποστάσεις μεταξύ οποιονδήποτε σημείων του είναι σταθερές.



Σχήμα 1: (i) Ένα τρίγωνο όπως και αν στραφεί (ροζ και πράσινη εκδοχή του αρχικού γκρι τριγώνου) παραμένει ίδιο (ίσο) με το αρχικό. (ii) Δεν ισχύει το ίδιο για ένα τετράπλευρο (γκρι) το οποίο είτε μπορεί να γίνει πιο στενόμακρο (ροζ), είτε να χάσει ακόμη και την επιπεδότητά του (πράσινο).

Υπάρχουν τέτοια αντικείμενα στη φύση, εκτός από τον αφηρημένο πλατωνικό κόσμο της γεωμετρίας; Κατά προσέγγιση ναι (εξ' άλλου η γεωμετρία από αυτά τα αντικείμενα ξεπήδησε ως πνευματική αφαίρεση). Μια πέτρα, μια κατσαρόλα και ένα διαστημόπλοιο μπορούν κατά πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθούν στερά σώματα. Η φυσική απαίτηση για την ύπαρξή τους είναι οι μεν ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας ότι αλλάζει η θέση ενός σημείου του στερεού σε όλα τα άλλα σημεία αυτού να είναι άπειρη και αφετέρου οι διαμοριακές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των δομικών του μονάδων (των μορίων του) να είναι άπειρες ώστε να μην επιτρέπουν την παραμόρφωση του αντικειμένου. Οι δύο αυτές συνθήκες είναι στην παραπραγματικότητα αλληλένδετες αφού η διάδοση της πληροφορίας μετακίνησης των μορίων γίνεται μέσω μηχανικών-ελαστικών κυμάτων και η ταχύτητα αυτών είναι συνάρτηση του μεγέθους των διαμοριακών δυνάμεων (όπως η συχνότητα των ταλαντώσεων –το ανάλογο της ταχύτητας διάδοσης στα ελαστικά κύματα– είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας, $\sqrt{k}$, της σταθεράς του

ελατηρίου –το ανάλογο του μέτρου της ανελαστικότητας του στερεού). Ένα αντικείμενο του οποίου η κατάσταση ισορροπίας απαιτεί οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του να είναι δοσμένη και στο όριο όπου οι χαρακτηριστικοί χρόνοι αλλαγής του προσανατολισμού του στερεού είναι πολύ μεγάλοι σε σχέση με το χρόνο μετάδοσης των ελαστικών κυμάτων σε όλο το εύρος του σώματος, μπορεί να θεωρείται στερεό.

2 Κίνηση στερεού σώματος

Έστω λοιπόν ένα τέτοιο στερεό σώμα το οποίο κινείται με τυχαίο τρόπο. Από το σώμα αυτό διακρίνουμε ως ιδιαίτερο σημείο το κέντρο μάζας του (ΚΜ), αφού όπως μάθαμε η ενέργεια, η ορμή και η στροφορμή ενός συνόλου σωματιδίων μπορούν εύκολα να διαχωριστούν σε ένα κομμάτι που αφορά στην κίνηση του ΚΜ και ένα κομμάτι που αφορά στην κίνηση ως προς το ΚΜ. Έτσι η θέση του εκάστοτε σημείου A του σώματος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{r}_{KM}(t) + \Delta\mathbf{r}_A(t) \quad (1)$$

όπου $\Delta\mathbf{r}$ θα δηλώνει τη θέση κάποιου σημείου ως προς το ΚΜ. Δεδομένου ότι το αντικείμενο είναι στερεό σώμα θα πρέπει η $\Delta\mathbf{r}_A$ να έχει σταθερό μέτρο, ενώ για την $\mathbf{r}_{KM}$ δεν μπορούμε να πούμε απολύτως τίποτε αφού η κίνηση αυτού υπόκειται στο δυναμικό νόμο του Νεύτωνα σύμφωνα με τη σχέση

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{KM} = \mathbf{F}_{ολ}^{(εξωτ)}$$

όπου M η συνολική μάζα του στερεού και $\mathbf{F}_{ολ}^{(εξωτ)}$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων (αγνοώντας τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των στοιχείων του στερεού) που δρουν στο στερεό. Αν μάλιστα οι δυνάμεις αυτές είναι μηδενικές θα έχουμε να κάνουμε με ένα ελεύθερο σώμα, το ΚΜ του οποίου θα κινείται με σταθερή ταχύτητα και επομένως θα μπορούσε κανείς να “καβαλήσει” αυτό το σύστημα με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχή των αξόνων του να είναι το ΚΜ.

Αφού

$$|\Delta\mathbf{r}_A(t)| = \text{σταθ}$$

μπορούμε με ασφάλεια να γράψουμε ότι $d(\Delta\mathbf{r}_A)/dt \perp \Delta\mathbf{r}_A$, οπότε

$$\frac{d(\Delta\mathbf{r}_A)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{r}_A \quad (2)$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$ είναι κάποιο απροσδιόριστο ακόμη διάνυσμα το οποίο εξασφαλίζει την διατήρηση της απόστασης του σημείου A από το ΚΜ. Το διάνυσμα αυτό δεν είναι ούτε κατ’ ανάγκη σταθερό με το χρόνο, ούτε ανεξάρτητο ακόμη της θέσης (θα δούμε ότι τελικά είναι το ίδιο για ολόκληρο το στερεό.)

Θα δείξουμε αμέσως τώρα ότι το ω είναι κοινό για όλα τα σημεία του στερεού. Έστω ότι δεν ήταν αλλά ίσχυε

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta \mathbf{r}_A)}{dt} &= \omega_A \times \Delta \mathbf{r}_A \quad \text{και} \\ \frac{d(\Delta \mathbf{r}_B)}{dt} &= \omega_B \times \Delta \mathbf{r}_B\end{aligned}\quad (3)$$

για δύο διαφορετικά σημεία A, B , με $\omega_B \neq \omega_A$. Ας ξανακατασκευάσουμε αυτές τις δύο σχέσεις με την κλασική τεχνική που ακολουθούμε όταν θέλουμε να δείξουμε ότι δύο ποσότητες συμπίπτουν:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta \mathbf{r}_A}{dt} &= \left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \right) \times \Delta \mathbf{r}_A \quad \text{και} \\ \frac{d\Delta \mathbf{r}_B}{dt} &= \left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} - \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \right) \times \Delta \mathbf{r}_B.\end{aligned}\quad (4)$$

Αν λάβουμε τη διαφορά αυτών των δύο σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{d(\Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B)}{dt} = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} \times (\Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B) + \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \times (\Delta \mathbf{r}_A + \Delta \mathbf{r}_B). \quad (5)$$

Το πρώτο εξωτερικό γινόμενο του δεξιού σκέλους είναι ορθογώνιο στο $\Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B$, οπότε εξασφαλίζει τη διατήρηση του $|\Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B|$, όχι όμως και ο δεύτερος όρος¹, εκτός αν ταυτοτικά (για οποιαδήποτε δύο σημεία) είναι μηδέν, δηλαδή αν

$$\omega_A = \omega_B. \quad (6)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι συγκλονιστικό. Υπάρχει σε κάθε χρονική στιγμή ένας άξονας που διέρχεται από το ΚΜ, διαπερνά το στερεό και έχει τη διεύθυνση του ω . Το στερεό περιστρέφεται στιγμιαία γύρω από αυτόν τον άξονα με την κοινή τιμή του $|\omega|$. Στο σύστημα ΚΜ (αδρανειακό εφόσον οι εξωτερικές δυνάμεις στο στερεό είναι μηδενικές, ειδικά μάλιστα μη αδρανειακό) μια ολόκληρη γραμμή σημείων μένει στιγμιαία ακίνητη και όλα τα άλλα σημεία περιστρέφονται γύρω από αυτή. Έτσι η ταχύτητα του τυχαίου σημείου A θα έχει στο σύστημα παρατήρησης τη μορφή

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_{KM} + \omega \times \Delta \mathbf{r}_A. \quad (7)$$

Μάλιστα, όχι μόνο είναι κοινό το διάνυσμα ω για ολόκληρο το στερεό, αλλά είναι ανεξάρτητο και από το σημείο παρατήρησης. Αν διαλέγαμε κάποιο άλλο σημείο O' , αντί του ΚΜ, ως αρχή μέτρησης αποστάσεων των σημείων του στερεού, θα είχαμε

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_{KM} + \omega \times (\Delta \mathbf{r}_{O'} + \Delta \mathbf{r}_{AO'}) = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \Delta \mathbf{r}_{O'A}, \quad (8)$$

¹Ο όρος αυτός θα είναι κάθετος στο $\Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B$ ακόμη και αν $\omega_A \neq \omega_B$, αν τα $\Delta \mathbf{r}_A$ και $\Delta \mathbf{r}_B$ είναι συγγραμμικά. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού αν τα σημεία, βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας που τα συνδέει με το ΚΜ, διαφορετικές περιστροφές αυτών δεν θα επιφέρουν αλλαγές στη μεταξύ τους απόσταση σε πρώτη τάξη ως προς το χρονικό διάστημα της περιστροφής. Θα υπάρξει, όμως, διαφοροποίηση σε δεύτερη τάξη. Ακόμη λοιπόν και τέτοια σημεία να είχαμε επιλέξει θα διαπιστώναμε αλλαγές αποστάσεων σε δεύτερη τάξη ως προς το χρόνο.

όπου $\Delta \mathbf{r}_{O'}$ η θέση του O' ως προς το ΚΜ και $\Delta \mathbf{r}_{AO'} = \Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_{O'}$ η θέση του σημείου A ως προς το O' . Το γεγονός αυτό σημαίνει απλά ότι σε οποιοδήποτε σημείο του στερεού και αν βρισκόμαστε το στερεό θα γυρίζει με τον ίδιο ρυθμό (ο Ήλιος γυρίζει γύρω μας με την ίδια συχνότητα, σε οποιο σημείο της Γης και αν βρισκόμαστε).

Στο εξής θα εργαστούμε στο σύστημα ΚΜ (είτε αυτό είναι αδρανειακό, είτε όχι) προκειμένου να μελετήσουμε την περιστροφή ενός σώματος. Για το λόγο αυτό θα γράφουμε πλέον $\mathbf{r}$, αντί για $\Delta \mathbf{r}$ και θα εννοούμε (εκτός αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό) τη θέση ενός σημείου του στερεού ως προς το ΚΜ αυτού.

Εύρεση του άξονα περιστροφής: Εκτελώντας μετρήσεις πάνω στο στερεό μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$; Προφανώς αρκεί να εντοπίσουμε τα σημεία του στερεού τα οποία δεν κινούνται, προκειμένου να καθορίσουμε τη διεύθυνση της $\boldsymbol{\omega}$ και στη συνέχεια να μετρήσουμε πως κινείται ένα άλλο σημείο εκτός αυτού του άξονα προκειμένου να μετρήσουμε το μέτρο της $\boldsymbol{\omega}$. Εμείς θα μετρήσουμε το διάνυσμα της $\boldsymbol{\omega}$ με τις ελάχιστες δυνατές πληροφορίες. Θα διαλέξουμε ένα σημείο $\mathbf{r}_A$ και θα μετρήσουμε την ταχύτητα $\mathbf{v}_A$ αυτού, η οποία θα είναι κάθετη στο $\mathbf{r}_A$ (λόγω της (2)). Στη συνέχεια θα κινηθούμε κάθετα στο $\mathbf{r}_A$ και $\mathbf{v}_A$ σε ένα νέο σημείο B , με $|\mathbf{r}_B| = |\mathbf{r}_A|$. Η θέση του σημείου B μπορεί να κατασκευαστεί βάσει των στοιχείων του A ως εξής:

$$\mathbf{r}_B = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|} \times \mathbf{r}_A. \quad (9)$$

Ο ορισμός αυτός του $\mathbf{r}_B$ επιτρέπει το προσδιορισμό του επιπέδου του διανύσματος $\boldsymbol{\omega}$, διότι επειδή $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A$ έχουμε από την (9)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \times \mathbf{r}_A}{|\mathbf{v}_A|} \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_A}{|\mathbf{v}_A|} \mathbf{r}_A - \frac{|\mathbf{r}_A|^2}{|\mathbf{v}_A|} \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

δηλαδή τα τρία διανύσματα $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_B$ και $\mathbf{r}_A$ είναι συνεπίπεδα και συνεπώς η ταχύτητα του σημείου B :

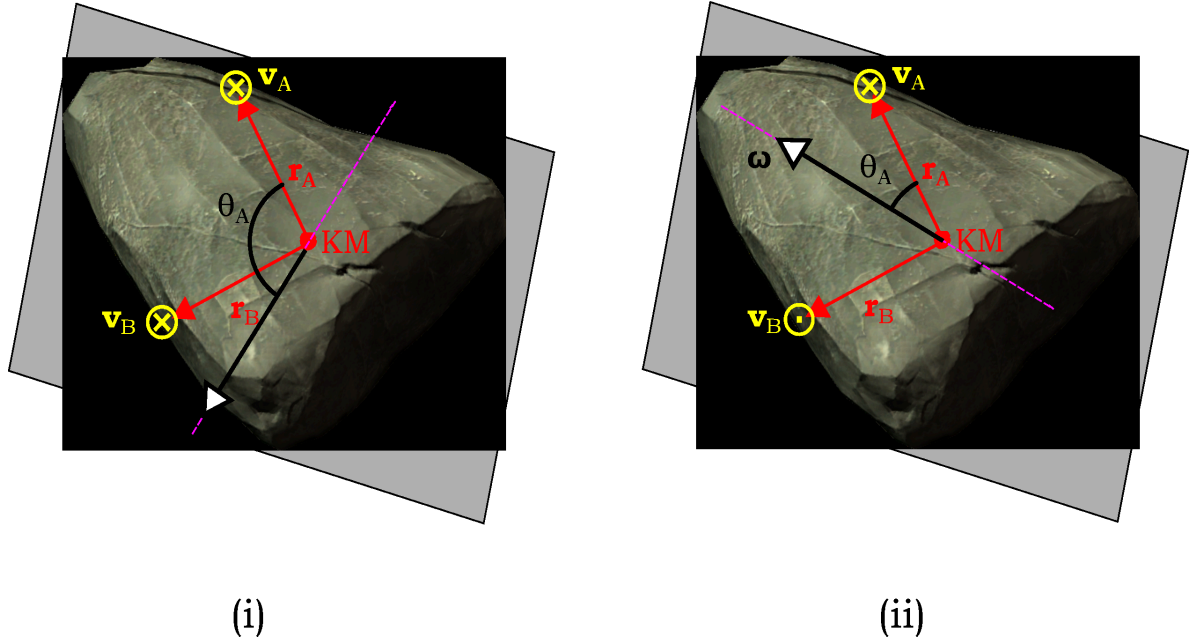
$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B,$$

που είναι κάθετη στο επίπεδο των $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_B$ είναι κάθετη και στο $\mathbf{r}_A$ και συνεπώς οι ταχύτητες $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι συγγραμμικές².

² Αυτό φαίνεται και με κατευθείαν υπολογισμό. Πράγματι, εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (8.9,8.12) για τα τριπλά γινόμενα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B) \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B(\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \cdot \boldsymbol{\omega}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Το αριστερό εσωτερικό γινόμενο είναι 0 επειδή το $\mathbf{r}_B$ κατασκευάστηκε ορθογώνιο και στο $\mathbf{r}_A$ και στο $\mathbf{v}_A$, ενώ το δεξί είναι 0 από την ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου να είναι κάθετο στα δύο διανύσματα που το συνθέτουν.



Σχήμα 2: Μια πέτρα που κινείται στο χώρο, όπως τη βλέπουμε στο σύστημα ΚΜ. Διαλέγουμε δύο σημεία A, B στην πέτρα έτσι ώστε $|\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B|$ με $\mathbf{r}_A \perp \mathbf{r}_B$ και με το επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ (γκρι επίπεδο) κάθετο στις ταχύτητες $\mathbf{v}_A$ και $\mathbf{v}_B$. Αν οι $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι ομόρροπες το ω (που βρίσκεται στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ αφήνει τα δύο διανύσματα από την ίδια πλευρά (i). Αν είναι αντίρροπες τα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ βρίσκονται εκατέρωθεν του ω (ii). Το μέτρο του ω και η γωνία που σχηματίζει με το $\mathbf{r}_A$ δίνονται από τις σχέσεις (10, 11).

Τα τέσσερα λοιπόν διανύσματα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ έχουν την ακόλουθη χωροταξική διευσθέτηση. Τα $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι κάθετα στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ το οποίο σχηματίζουν ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Οι δε κάθετες σε αυτό ταχύτητες $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ μπορεί να είναι είτε ομόρροπες, είτε αντίρροπες, μεταξύ τους. Υπολογίζοντας τα μέτρα των δύο ταχυτήτων θα έχουμε

$$v_A = \omega r \sin \theta_A \quad \text{και} \quad v_B = \omega r \sin \theta_B ,$$

όπου $r = |\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B|$ και θ_A, θ_B οι γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ με το διάνυσμα του ω , το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$. Δεδομένης επίσης της καθετότητας των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ θα είναι $\sin \theta_B = |\cos \theta_A|$, αφού οι γωνίες μεταξύ δύο ανυσμάτων είναι και οι δύο μικρότερες του π αλλά μεταξύ τους διαφέρουν κατά $\pi/2$. Υψώνοντας στο τετράγωνο την τελευταία σχέση έχουμε

$$v_A^2 + v_B^2 = \omega^2 r^2 \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{r} . \quad (10)$$

Η δε γωνία θ_A που σχηματίζει το ω με το $\mathbf{r}_A$ (μετρώντας την ως θετική αν στραφεί κατ' αυτήν το ω προς το $\mathbf{r}_A$ κατά τη συντομότερη γωνία) θα είναι

$$\sin \theta_A = \frac{v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}} . \quad (11)$$

Προφανώς υπάρχουν δύο γωνίες θ_A που έχουν τέτοιο ημίτονο· μία οξεία και μία αμβλεία. Η ταχύτητα του B είναι αυτή που θα καθορίσει ποια από τις δύο θα επιλέξουμε. Αν το $\mathbf{r}_B$ ληφθεί στην κατεύθυνση $\mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A$ (αντιωρολογιακά από το $\mathbf{r}_A$ κοιτάζοντας στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}_A$) τότε αν η $\mathbf{v}_B$ είναι ομόρροπη με την $\mathbf{v}_A$ θα πρέπει να επιλέξουμε την αμβλεία γωνία της (11) (και το $\mathbf{r}_A$ και το $\mathbf{r}_B$ από την ίδια πλευρά του ω), αλλιώς θα επιλέξουμε την οξεία γωνία (το $\mathbf{r}_A$ και το $\mathbf{r}_B$ σε διαφορετικές του ω). Δέστε το Σχήμα 4 για να καταλάβετε καλύτερα τη διάταξη των διαφόρων διανυσμάτων.

Έχοντας καθορίσει το διάνυσμα ω , έχουμε καθορίσει τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής του σώματος και τον στιγμιαίο ρυθμό περιστροφής. Το διάνυσμα αυτό είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σώματος το οποίο είναι ψευδοδιάνυσμα, αφού το κατοπτρικά συμμετρικό σώμα περιστρέφεται και αυτό με την ίδια φορά. Ο άξονας περιστροφής (μωβ διάστικτη γραμμή στο Σχήμα 4), επί του οποίου τα σημεία του στερεού είναι ακίνητα, εν γένει κινείται στο χώρο και αλλάζει και την κατεύθυνσή του ως προς το στερεό.

3 Ροπή αδράνειας στερεού

Θα υπολογίσουμε τώρα την κινητική ενέργεια του στερεού στο σύστημα ΚΜ. Προς τούτο αρκεί να προσθέσουμε (ολοκληρώσουμε) τις κινητικές ενέργειες όλων των στοιχειωδών μαζών που απαρτίζουν το στερεό. Θα έχουμε λοιπόν

$$K = \frac{1}{2} \int_V dm (\mathbf{v})^2 = \frac{1}{2} \int_V dm(\mathbf{r}) (\omega \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2} \int_V dm(\mathbf{r}) [(\omega)^2(\mathbf{r})^2 - (\omega \cdot \mathbf{r})^2] .$$

Στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε χειρουργικά το διάνυσμα ω από το ολοκλήρωμα με τη χρήση δεικτών γράφοντας $(\omega)^2(\mathbf{r})^2 = \omega_i \omega_j \delta_{ij} r_k r_k$ και $(\omega \cdot \mathbf{r})^2 = (\omega_i r_i)(\omega_j r_j)$:

$$K = \frac{1}{2} \left(\int_V dm(\mathbf{r}) [r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j] \right) \omega_i \omega_j . \quad (12)$$

Η επιλογή δεικτών υπήρξε ιδιαίτερα προσεκτική ώστε τα δύο ω που πολλαπλασίασαν τους δύο όρους του ολοκληρώματος να εμφανίζονται με ίδιο όνομα εικονικών δεικτών. Το παραπάνω ολοκλήρωμα που αφορά στην κατανομή μάζας εντός του στερεού ονομάζεται ροπή αδράνειας αυτού και όπως βλέπουμε

$$I_{ij} = \int_V dm(\mathbf{r}) [r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j] \quad (13)$$

αποτελείται από 9 συνιστώσες. Το αντικείμενο αυτό είναι ένας τανυστής με αρκετές ομοιότητες³ με τον τανυστή τετραπολικής ροπής $\mathbb{Q}_{ij}$ που συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 14. Πρόκειται για τανυστή 2ης τάξης αφού κατασκευάζεται από άλλους τανυστές ($\delta_{ij}, r_i r_j$) και μάλιστα συμμετρικό αφού $I_{ij} = I_{ji}$. Αν γνωρίζουμε τις 9 συνιστώσες⁴ του I_{ij} , τότε η κινητική ενέργεια του στερεού γράφεται

$$K = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (14)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να γραφεί και υπό μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων ως

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

με $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ και $\mathbf{I}$ τον 3×3 πίνακα που σχηματίζουν τα 9 στοιχεία I_{ij} . Το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού, όπως εύκολα μπορείτε να δείξετε, είναι ένα νούμερο (βαθμωτό μέγεθος).

Όπως είπαμε το I_{ij} μας δίνει πληροφορία για τον τρόπο που η μάζα είναι κατανεμημένη γύρω από το ΚΜ και είναι ένας τανυστής. Εκτελώντας στροφές του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να αλλάξουμε τις συνιστώσες αυτού, χωρίς να αλλάξουμε το φυσικο-γεωμετρικό του περιεχόμενο (όπως ένα διάνυσμα παραμένει το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο στο ώρο παρόλο που σε ένα στραμένο σύστημα αναφοράς έχει διαφορετικές συνιστώσες). Έτσι όπως με μια κατάλληλη στροφή μπορούμε να κάνουμε ένα διάνυσμα να έχει όλες του τις συνιστώσες 0 εκτός από μια, έτσι μπορούμε και έναν συμμετρικό τανυστή 2ης τάξης να τον στρέψουμε έτσι ώστε να γίνει διαγώνιος⁵. Τα τρία ανεξάρτητα στοιχεία του I_{ij} , όταν πλέον γίνει διαγώνιος ονομάζονται *κύριες ροπές αδράνειας* του σώματος. $I_{xx} = I_1, I_{yy} = I_2, I_{zz} = I_3$. Οι νέοι αυτοί καρτεσιανοί άξονες (κατόπιν της κατάλληλης στροφής) στους οποίους διαγωνιοποιείται ο I_{ij} , ονομάζονται *κύριοι άξονες* του στερεού. Οι τρεις τιμές I_1, I_2, I_3 είναι το ανάλογο του μήκους ενός διανύσματος για τον τανυστή 2ης τάξης I_{ij} και αποτελούν το μη αναγώγιμο κομμάτι του τανυστή. Από αυτές προκύπτει κάθε άλλη μορφή του I_{ij} . Ο λόγος που μόνο 3 είναι οι πραγματικά ανεξάρτητες τιμές του I_{ij} , οφείλεται στο ότι οι διάφορες δυνατές στροφές καθορίζονται από τρεις παραμέτρους, οπότε οι 6 διαφορετικές τιμές του I_{ij} (λόγω συμμετρικότητας του τανυστή) ρυθμίζονται μέσω των τριών παραμέτρων. Έτσι μένουν μόνο 3 πραγματικά ανεξάρτητες

³Ο I_{ij} έχει ίδιες διαστάσεις με τον $\mathbb{Q}_{ij}$, αλλά ο $\mathbb{Q}_{ij}$ είναι άιχνος και διαφοροποιούνται και κατά έναν παράγοντα 3, ακόμη και όταν ο I_{ij} καταστεί άιχνος.

⁴Από αυτές οι 6 είναι ανεξάρτητες λόγω συμμετρικότητας. Στην πραγματικότητα μόνο 3 συνιστώσες είναι αρκετές για να καθοριστούν όλες, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

⁵Για παράδειγμα, ο τανυστής $C_{ij} = r_i r_j$, στο σύστημα συντεταγμένων εκείνο όπου το $\mathbf{r}$ παίρνει τη μορφή $(|\mathbf{r}|, 0, 0)$, λαμβάνει την ιδιαίτερα απλή μορφή

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{r}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

οντότητες. Οι τρεις κατευθύνσεις (κύριοι άξονες) και οι αντίστοιχες κύριες ροπές, μπορούν να βρεθούν από τη λύση του συστήματος διαγωνιοποίησης του $\mathbf{I}$:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_K \cos \phi_K \\ \sin \theta_K \sin \phi_K \\ \cos \theta_K \end{pmatrix} = I_K \begin{pmatrix} \sin \theta_K \cos \phi_K \\ \sin \theta_K \sin \phi_K \\ \cos \theta_K \end{pmatrix}$$

όπου το μονόστηλο διάνυσμα $(\sin \theta_K \cos \phi_K, \sin \theta_K \sin \phi_K, \cos \theta_K)^\top$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{e}}_K$ με σφαιρικές συντεταγμένες (θ_K, ϕ_K) που δείχνει τη διεύθυνση του κύριου άξονα K γύρω από τον οποίο η κύρια ροπή αδράνειας παίρνει την τιμή I_K .⁶

ΝΑ ΠΡΟΣΤΕΘΕΙ ΤΟ Steiner.

4 Κίνηση ελεύθερου στερεού

Έστω $a = I_1, b = I_2, c = I_3$ με $a \leq b \leq c$. Η κίνηση του $\mathbf{L}$ (στο σύστημα του στερεού) είναι

$$\dot{L}_1 = L_2 L_3 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \quad (15)$$

$$\dot{L}_2 = L_3 L_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \quad (16)$$

$$\dot{L}_3 = L_1 L_2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (17)$$

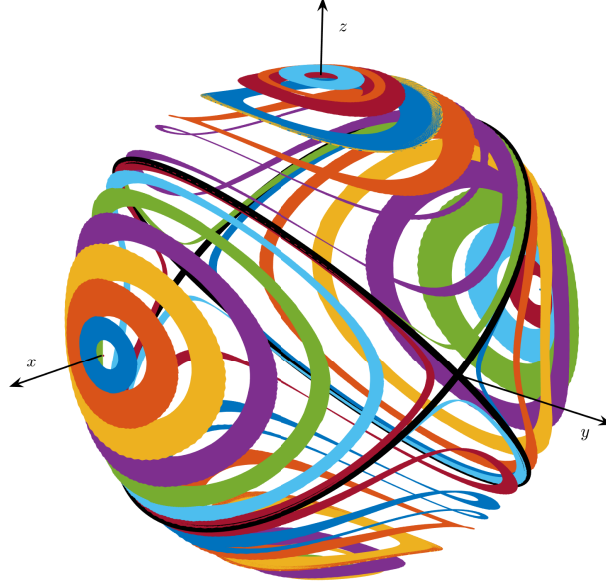
Η κίνηση αυτή ικανοποιεί τους δύο δεσμούς

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \mathbf{L}^2 = \text{σταθ} \quad (18)$$

$$\frac{L_1^2}{2a} + \frac{L_2^2}{2b} + \frac{L_3^2}{2c} = E = \text{σταθ} \quad (19)$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν να απεικονιστούν γραφικά με δύο κλειστές επιφάνειες (μία σφαίρα και ένα τριαξονικό ελλειψοειδές) οι οποίες αναγκαστικά τέμνονται (πρέπει να υπάρχει λύση για το $\mathbf{L}$). Οι καμπύλες τομής των δύο επιφανειών περιγράφουν την τροχιά του $\mathbf{L}$ στο σύστημα του στερεού. Ως τομή δύο κλειστών επιφανειών πρέπει να είναι κλειστές καμπύλες. Λόγω κατοπτρικής συμμετρίας των επιφανειών ως προς τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$ οι καμπύλες τομής θα πρέπει να έχουν και αυτές τις ίδιες συμμετρίες.

⁶Επιλέξαμε να σημειώσουμε την κατεύθυνση και τη συνιστώσα της κύριας ροπής αδράνειας με κεφαλαίο K για να μην υπάρξει σύγχυση με τους άξονες και τις συνιστώσες του I_{ij} στο αρχικό σύστημα αξόνων, στο οποίο μας δίνεται το $\mathbf{I}$.



Σχήμα 3: Τροχιές της στροφορμής ελεύθερου στερεού σώματος επί της σφαίρας της ολικής στροφορμής $|\mathbf{L}|^2$ με ροπές αδράνειας $I_1 = 1$, $I_2 = 1/2$ και $I_3 = 1/3$. Οι τροχιές αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές ενέργειας του στερεού: $E = L_1^2/I_1 + L_2^2/I_2 + L_3^2/I_3$. Η περιστροφή περί τους άξονες x και z , τους άξονες με τη μεγαλύτερη και μικρότερη ρπή αδρανείας, είναι ευσταθής, ενώ περιστροφή περί τον y , με την ενδιάμεση τιμή ρπής αδρανείας, είναι ασταθής. Η κίνηση είναι περιοδική κατά μέσο όρο περί τους άξονες x και z , εκτός από τη περίπτωση των ετεροκλινικών τροχιών που αντιστοιχούν σε κίνηση του σώματος με στροφορμή από $(0, |\mathbf{L}|, 0)$ $(0, -|\mathbf{L}|, 0)$ και αντιστροφως και ενέργεια $E = |\mathbf{L}|^2/I_2$. Οι τροχιές αυτές είναι τα 4 ημικύκλια των μεγίστων κύκλων το επίπεδο των οποίων σχηματίζει γωνίες $\cos \phi = \pm \sqrt{I_1(I_2 - I_3)/(I_2(I_1 - I_3))}$ με τον άξονα x .

Θα εξετάσουμε την περίπτωση $L \geq b$ που θα οδηγήσει σε μια κλειστή καμπύλη γύρω από τον άξονα z , οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τις κλασικές πολικές γωνίες (θ, ϕ) για να περιγράψουμε τη στιγμιαία θέση του $\mathbf{L}$.⁷ Ας δούμε σε ποια θέση θ θα βρίσκεται το $\mathbf{L}$ όταν θα έχει αξιμουθιακή γωνία ϕ . Προς τούτο θα βρούμε την τομή των δύο επιφανειών με το μεσημβρινό επίπεδο σε γωνία $\phi = \tan^{-1} y/x$. Αν θέσουμε $T = \tan \phi = y/x$ (για ευκολία θέσαμε

⁷ Αν $L \leq b$ η κίνηση του $\mathbf{L}$ θα περιγράφεται από μια κλειστή καμπύλη γύρω από τον άξονα, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε πάλι πολικές γωνίες (θ, ϕ) για να περιγράψουμε τη στιγμιαία θέση του $\mathbf{L}$ θεωρώντας τώρα ως άξονα συμμετρίας τον x αντί τον z . Στο τέλος του εδαφίου θα δώσουμε τις αντίστοιχες σχέσεις που αφορούν στην κίνηση του $\mathbf{L}$ σε αυτή την περίπτωση.



Σχήμα 4: Ο W. Pauli και ο H. Bohr το 1954 κατά τα εγκαίνια του νέου Ινστιτούτου Φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Lund στην Σουηδία παίζοντας με τη σβούρα. Από το φωτογραφικό αρχείο του E. Segre που έχει δωρηθεί στην American Physical Society.

$x = L_1, y = L_2, z = L_3$ αφού οι απεικονίσεις μας αναφέρονται στο χώρο των στροφορμών):

$$x^2 + x^2 T^2 + z^2 = L^2 \text{ και } \frac{x^2}{a} + \frac{x^2 T^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 2E$$

$$x^2 = \frac{L^2 - z^2}{1 + T^2} \text{ και } \frac{L^2 - z^2}{1 + T^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{T^2}{b} \right) + \frac{z^2}{c} = 2E \quad (20)$$

$$\frac{L^2}{1 + T^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{T^2}{b} \right) - 2E = z^2 \left[\frac{1}{1 + T^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{T^2}{b} \right) - \frac{1}{c} \right] \quad (21)$$

Επομένως ως συνάρτηση του ϕ η $z(\phi) = L_3(\phi) = L \cos(\theta(\phi))$ θα είναι

$$z = \pm L \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{\sigma}{b} \right) + \frac{T^2}{b} (1 - \sigma)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + T^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)}} \quad (22)$$

με $\sigma = (2Eb)/L^2$ ένας αριθμός μικρότερος του 1 που μετρά πόσο μικρότερο είναι το $2Eb$ (το τετράγωνο του 2ου ημιάξονα του ελλειψοειδούς από το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας L^2).

Επειδή η εφαπτομένη απειρίζεται είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε το συνημίτονο βάσει της σχέσης $T^2 + 1 = 1/\cos^2 \phi$:

$$z = \pm L \sqrt{\frac{\cos^2 \phi (b/a - 1) + (1 - \sigma)}{\cos^2 \phi (b/a - 1) + (1 - b/c)}} \quad (23)$$

Θέτοντας $z = L \cos \theta(\phi)$ παίρνουμε τη συνάρτηση $\theta(\phi)$ που περιγράφει την καμπύλη επί της σφαίρας που διαγράφει το διάνυσμα $\mathbf{L}$:

$$\cos(\theta(\phi)) = \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \phi + A}{\cos^2 \phi + B}} \quad (24)$$

με

$$A = \frac{1 - \sigma}{(b/a) - 1}, \quad B = \frac{1 - (b/c)}{(b/a) - 1}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε και τη χρονική εξέλιξη αυτού από την (58) εκτελώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{dL_3}{d\phi} \dot{\phi} &= L_{\perp} \cos \phi \times L_{\perp} \sin \phi \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \dots \Rightarrow \\ \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{(\cos^2 \phi + A)(\cos^2 \phi + B)}} &= -L \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης θα δώσει και τη χρονική εξέλιξη της τροχιάς του $\mathbf{L}$. Αν θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$J(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{(\cos^2 s + A)(\cos^2 s + B)}} \quad (26)$$

που μπορεί να γραφεί μέσω ελλειπτικών ολοκληρωμάτων τότε

$$J(\phi) = L \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) t \quad (27)$$

Η περίοδος θα είναι

$$T = \frac{ab}{b-a} \frac{J(2\pi)}{L} \quad (28)$$

Αν $a = b$ οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται (μέσω απλοποίησης των μηδενικών $b/a - 1 = 0$) στην

$$T = \frac{2\pi b}{L} \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma)(1 - (b/c))}}$$

Αυτή είναι ακριβώς η σχέση που παίρνουμε με κατευθείαν ολοκλήρωση του μιγαδικού συνδυασμού των (56,57). Στην κρίσιμη περίπτωση $\sigma = 1$, $= 0$ και το ολοκλήρωμα $J(\phi)$ μεταμορφώνεται στο

$$J(\phi) = \int_0^\phi \frac{ds}{\cos s \sqrt{\cos^2 s + B}} \quad (29)$$

το οποίο στο όριο $\phi \rightarrow \pi/2$ απειρίζεται λογαριθμικά. Με αντικατάσταση $\xi = \tan s$

$$J(\phi = \pi/2 - \epsilon) = \int_0^{\cot \epsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{B + 1 + B\xi^2}} \quad (30)$$

βρίσκουμε

$$J(\phi = \pi/2 - \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{B}} \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{B}}{\tan \epsilon \sqrt{B + 1}} \right)$$

5 Οι γωνίες του Euler

Στις 3 διαστάσεις όπου το σύνολο των δυνατών ανεξάρτητων στροφών συμπίπτει με το σύνολο των αξόνων, δίνεται η δυνατότητα να ρυθμίζει κανείς τις στροφές μέσω κάποιου άξονα. Έτσι μια οποιαδήποτε στροφή μπορεί να οριστεί μέσω καθορισμού του άξονα γύρω από τον οποίο επιτελείται μια στροφή και της γωνίας στροφής γύρω από αυτό τον άξονα. Οι τρεις αυτές γωνίες—οι δύο σφαιρικές γωνίες, θ , ϕ , καθορισμού του άξονα στροφής και η γωνίας στροφής, ψ , περί αυτό τον άξονα—είναι γνωστές ως γωνίες Euler και είναι ο φυσικότερος τρόπος περιγραφής μιας γενικής στροφής. Μέσω αυτών ο χώρος των στροφών θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με μια σφαίρα ακτίνας π . Κάθε σημείο εσωτερικό της σφαίρας με σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) αντιστοιχεί σε μια στροφή μεγέθους $\psi = r < \pi$ γύρω από τον άξονα που αντιστοιχεί στο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

με τη θετική φορά στροφής να δίνεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία ή του δεξιού χεριού. Η ακτίνα της σφαίρας εκτείνεται μέχρι το π και όχι το 2π αφού μια στροφή γύρω από τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$ κατά γωνία $\pi + \varphi$ (με $\varphi > 0$) είναι ακριβώς η ίδια με μια γωνία στροφής $\pi - \varphi$ γύρω από τον άξονα $-\hat{\mathbf{n}}$. Ακριβώς αυτή η ιδιότητα των στροφών καθιστά λίγο πιο περίπλοκη την τοπολογία των στροφών σε σχέση με αυτήν μιας απλής σφαίρας: Δυο οποιαδήποτε ημισφαίρια της επιφάνειας της σφαίρας των στροφών, ξένα μεταξύ τους, στην πραγματικότητα ταυτίζονται μεταξύ τους σημείο προς σημείο αφού

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\pi) = \mathbf{R}_{-\hat{\mathbf{n}}}(\pi) .$$

Τοπολογικά λέμε ότι η σφαίρα των στροφών έχει διπλή κάλυψη.

Ας κατασκευάσουμε τώρα τον πίνακα μια στροφής Euler που χαρακτηρίζεται από τις γωνίες θ, ϕ, ψ . Πρώτα πρέπει να σχηματίσουμε τον άξονα περιστροφής $\hat{n}$ και στη συνέχεια να εκτελέσουμε τη στροφή κατά ψ γύρω από αυτόν. Για το λόγο αυτό θα φροντίσουμε να ο άξονας z να πάρει τη θέση του $\hat{n}$ και στο τέλος θα εκτελέσουμε γωνία ψ γύρω από τον καινούργιο άξονα z . Η σειρά λοιπόν που θα ακολουθήσουμε έχει ως εξής: (α) Μια στροφή κατά γωνία ϕ γύρω από τον αρχικό άξονα z . Το νέο σύστημα $x'y'z'$ θα έχει κοινό τρίτο άξονα με το αρχικό αλλά ο άξονας x' θα έχει στραφεί στο επίπεδο xy κατά γωνία ϕ (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον x προς τον y). (β) Ακολουθεί μια στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x' έτσι ώστε ο νέος άξονας z'' να λάβει κλίση θ σε σχέση με τον παλιό άξονα z' (που σενέπιπτε με τον z). Η στροφή πραγματοποιείται στο επίπεδο $y'z'$, και ο νέος άξονας z'' είναι στραμμένος σε σχέση με τον z' κατά γωνία θ (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον z' προς τον x'). (γ) Τελειώνουμε με μια απλή στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα z'' (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον x'' προς τον y''). για ευκολία θα ονομάσουμε το τελικό σύστημα αξόνων $x''y''z''$, απλά 123.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\hat{n}(\theta, \phi)}(\psi) &= \mathbf{R}_{z''}(\psi) \mathbf{R}_{x'}(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) . \end{aligned} \quad (31)$$

Δεν θα προχωρήσουμε να γράψουμε την σύνθετη μορφή που θα λάβει ο τελικός πίνακας αν εκτελέσουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς. Τον πίνακα που προκύπτει από τη σύνθεση των τριών αυτών στροφών Euler θα τον γράφουμε πλέον ως $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ ή απλούστερα $\mathbf{R}$.

Σημειώνουμε ότι οι πίνακες στροφής που γράψαμε παραπάνω είναι πίνακες παθητικής στροφής, αφού αυτό που επιδιώκουμε είναι να περιγράψουμε ένα διάνυσμα, οι συνιστώσες του οποίου ήταν γνωστές στο σύστημα xyz , σε ένα νέο σύστημα, το 123, το οποίο είναι στραμμένο κατά τις γωνίες Euler, ϕ, θ, ψ σε σχέση με το x, y, z . Έτσι θα έχουμε τη σχέση συντεταγμένων:

$$\mathbf{r}_{(123)} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{r}_{(xyz)} . \quad (32)$$

Τώρα θα υποθέσουμε ότι το σύστημα $\hat{1}\hat{2}\hat{3}$ είναι το σύστημα του στερεού σώματος στο οποίο το διάνυσμα που θέλουμε να παρακολουθήσουμε είναι η θέση κάποιου σημείου του στερεού, είναι δηλαδή ακίνητο:

$$\dot{\mathbf{r}}_{(123)} = \mathbf{0} . \quad (33)$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση (32)

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{dt} \mathbf{r}_{(xyz)} + \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \dot{\mathbf{r}}_{(xyz)} . \quad (34)$$

Παράλληλα γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του διανύσματος θέσης του εν λόγω σημείου του στερεού στο αρχικό σύστημα είναι

$$\dot{\mathbf{r}}_{(xyz)} = \boldsymbol{\omega}_{(xyz)} \times \mathbf{r}_{(xyz)} , \quad (35)$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}_{(xyz)}$ είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σώματος –και επομένως και το συγκεκριμένου σημείου– εκφρασμένο και αυτό στο αρχικό σύστημα, γεγονός το οποίο σημειώσαμε με το δείκτη $_{(xyz)}$ για αποφυγή οποιασδήποτε παρεξήγησης. Τώρα θα δείξουμε ότι το παραπάνω εξωτερικό γινόμενο μπορεί να προκύψει μέσω της δράσης ενός αντισυμμετρικού πίνακα στο διάνυσμα $\mathbf{r}$. Ας δούμε γιατί:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \omega_j r_k \rightarrow \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i &= \epsilon_{ijk} \omega_j r_k = \Omega_{ik} r_k = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r})_i \end{aligned} \quad (36)$$

με

$$\Omega_{ik} = \epsilon_{ijk} \omega_j = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, το εξωτερικό γινόμενο, όντας εκ φύσεως αντισυμμετρική κατασκευή, θα αναπαράγεται από τη δράση ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Ο πίνακας $\boldsymbol{\Omega}$ των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}_{(xyz)}$ περιέχει προφανώς τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα xyz .

Συνδυάζοντας τώρα τις (34,35,36) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{dt} \mathbf{r}_{(xyz)} + \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \boldsymbol{\Omega}_{(xyz)} \dot{\mathbf{r}}_{(xyz)} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{dt} + \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \boldsymbol{\Omega}_{(xyz)} \right) \dot{\mathbf{r}}_{(xyz)} . \end{aligned} \quad (38)$$

Αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε σημείο του στερεού, επομένως θα πρέπει να είναι $d\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)/dt + \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \boldsymbol{\Omega}_{(xyz)} = \mathbf{0}$ και πολλαπλασιάζοντάς την από αριστερά με $\mathbf{R}^{-1}$ βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{\Omega}_{(xyz)} = -\mathbf{R}^{-1} \frac{d\mathbf{R}}{dt} . \quad (39)$$

Αν θέλουμε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα (τανυστή) $\boldsymbol{\Omega}$ στις συντεταγμένες $\hat{1}\hat{2}\hat{3}$ αρκεί να δράσουμε με έναν διπλό μετασχηματισμό $\mathbf{R}$ αφού έχουμε να κάνουμε με έναν τανυστή 2ης τάξης:

$$(\boldsymbol{\Omega}_{(123)})_{ab} = R_{ai} R_{bj} (\boldsymbol{\Omega}_{(xyz)})_{ij} = R_{ai} (\boldsymbol{\Omega}_{(xyz)})_{ij} (R^\top)_{bj} = (\mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_{(xyz)} \mathbf{R}^{-1})_{ab} . \quad (40)$$

Συνεπώς

$$\Omega_{(123)} = -\frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^{-1} . \quad (41)$$

Ο υπολογισμός του $d\mathbf{R}/dt$ μπορεί να “σπάσει” σε τρεις όρους ανάλογα με την ταχύτητα μεταβολής της κάθε γωνίας Euler:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))}{dt} &= \left[\dot{\psi} \frac{d\mathbf{R}_z(\psi)}{d\psi} \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \right. \\ &\quad + \dot{\theta} \mathbf{R}_z(\psi) \frac{d\mathbf{R}_x(\theta)}{d\theta} \mathbf{R}_z(\phi) \\ &\quad \left. + \dot{\phi} \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \frac{d\mathbf{R}_z(\phi)}{d\phi} \right] .^8 \end{aligned} \quad (42)$$

Ο καθένας από αυτούς τους όρους θα πολλαπλασιαστεί με τον $\mathbf{R}^{-1}$ ο οποίος κατασκευάζεται με τους πίνακες $\mathbf{R}_z(\psi), \mathbf{R}_x(\theta), \mathbf{R}_z(\phi)$ πολλαπλασιασμένους όμως με αντίστροφη σειρά και με αντίθετα ορίσματα ο καθένας:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}_z(-\phi), \mathbf{R}_x(-\theta), \mathbf{R}_z(-\psi) .$$

Θα έχουμε λοιπόν:

(α) Ο πρώτος όρος:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{R}_z(\psi)}{d\psi} \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{R}_z(-\phi) \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) = \frac{d\mathbf{R}_z(\psi)}{d\psi} \mathbf{R}_z(-\psi) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (43)$$

⁸Στην παραπάνω έκφραση – και σε αυτές που θα ακολουθήσουν – κρατήσαμε μόνο την ονομασία του δείκτη, y, z , που δείχνει γύρω από ποιον άξονα επιτελείται η στροφή, χωρίς να βάζουμε τόνους, αφού δεν μας ενδιαφέρει η κατασκευή νέων αξόνων, αλλά μόνο η αναλυτική πλευρά της συνολικής κατασκευής.

(β) Ο δεύτερος όρος:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z(\psi) \frac{d\mathbf{R}_x(\theta)}{d\theta} \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{R}_z(-\phi) \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) &= \mathbf{R}_z(\psi) \frac{d\mathbf{R}_x(\theta)}{d\theta} \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) \\ &= \mathbf{R}_z(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{R}_z(\psi) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}_z(-\psi) = \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & \cos \psi \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

(γ) Ο τρίτος όρος:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \frac{d\mathbf{R}_z(\phi)}{d\phi} \mathbf{R}_z(-\phi) \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) \\ &= \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) \\ &= \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}_x(-\theta) \mathbf{R}_z(-\psi) = \dots \\ &= \mathbf{R}_z(\psi) \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}_z(-\psi) = \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Τώρα πλέον είμαστε έτοιμοι να ανασυνθέσουμε τη γωνιακή ταχύτητα αντιπαραβάλλοντας

τα αποτελέσματα των (43,45,46) με τον πίνακα $\Omega_{(123)}$:

$$\begin{aligned}\Omega_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} &= -\dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad -\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & \cos \psi \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad -\dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (47)\end{aligned}$$

Το δεξιό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι φυσικά αντισυμμετρικό, όπως και το αριστερό. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (\cos \psi) \dot{\theta} + (\sin \psi) \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_2 &= (-\sin \psi) \dot{\theta} + (\cos \psi) \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi}\end{aligned} \quad (48)$$

Αυτή είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού αναλυμένη σε ταχύτητες των γωνιών Euler, στη βάση που συμπεριστρέφεται μαζί με το στερεό σώμα.

2η κατασκευή: Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να ξανακάνουμε αυτή την κατασκευή με καθαρά γεωμετρικό τρόπο, χωρίς της μεσολάβηση των πινάκων στροφής. Ο δεύτερος αυτός τρόπος είναι άμεσος και λιγότερο επίπονος.

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας μπορεί να αναλυθεί σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς θελήσουμε. Έτσι

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{x}} + \omega_y \hat{\mathbf{y}} + \omega_z \hat{\mathbf{z}} \quad (49)$$

$$= \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \quad (50)$$

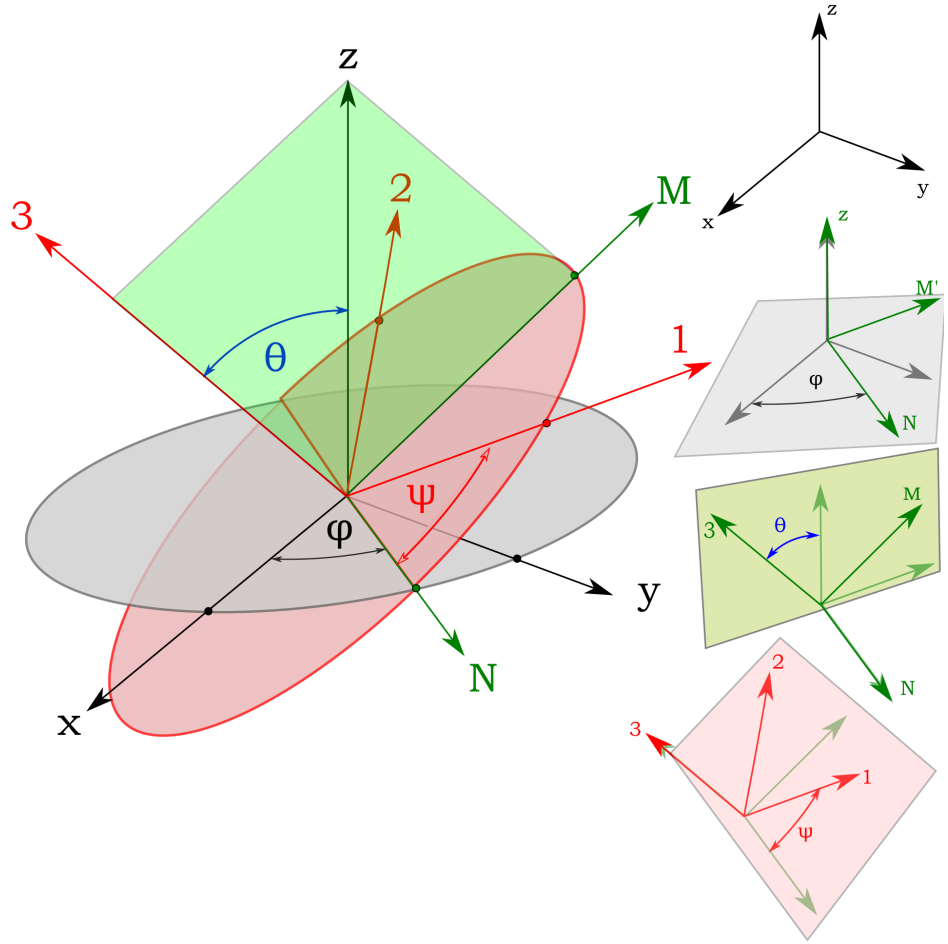
$$= \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{N}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}}. \quad (51)$$

Προσέξτε ότι δεν είναι ανάγκη οι άξονες στους οποίους θα αναλύσουμε τη γωνιακή ταχύτητα να είναι ορθογώνιοι (όπως στις δύο πρώτες αναλύσεις της παραπάνω σχέσης). Μπορεί να είναι οποιοιδήποτε τρεις μη συνεπίπεδοι άξονες (όπως στην τρίτη περίπτωση). Ο τρόπος που επιλέξαμε να αναλύσουμε στην τρίτη σχέση την $\boldsymbol{\omega}$ παρακολουθεί τις μεταβολές των τριών γωνιών του Euler, οι οποίες συμβαίνουν γύρω από τον z -άξονα η ϕ , γύρω από τον N -άξονα η θ και γύρω από τον 3 -άξονα η ψ . Με απλή γεωμετρία μπορούμε τώρα να αναλύσουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{N}}$ σε όποια άλλη γ βάση θέλουμε. Αφού

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{3}} + \sin \theta \hat{\mathbf{M}} \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \sin \psi \hat{\mathbf{1}} + \cos \psi \hat{\mathbf{2}} \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \cos \psi \hat{\mathbf{1}} - \sin \psi \hat{\mathbf{2}}, \quad (54)$$



Σχήμα 5: Οι τρεις γωνίες του Euler ϕ, θ, ψ που στρίβουν τους άξονες από το σύστημα xyz στο σύστημα του στερεού 123. Η κατεύθυνση N είναι αυτή του ανερχόμενου συνδέσμου, όπου το επίπεδο 12 αρχίζει να ανέρχεται πάνω από το επίπεδο xy καθώς στρίβουμε δεξιόστροφα από το 1 προς το 2. Η κατεύθυνση M είναι κάθετη στο επίπεδο $N3$, έτσι ώστε οι άξονες $NM3$ να σχηματίζουν ένα τρισσορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα. Στο δεξί μέρος του σχήματος φαίνονται οι διαδοχικές στροφές ϕ, θ, ψ και το επίπεδο που λαμβάνουν χώρα αυτές σε σχέση με το αποτέλεσμα της προηγούμενης στροφής (θαμποί άξονες).

θα έχουμε

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\phi} [\cos \theta \hat{\mathbf{3}} + \sin \theta (\sin \psi \hat{\mathbf{1}} + \cos \psi \hat{\mathbf{2}})] + \dot{\theta} (\cos \psi \hat{\mathbf{1}} - \sin \psi \hat{\mathbf{2}}) + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}} \\ &= \hat{\mathbf{1}} [\cos \psi \dot{\theta} + \sin \psi (\dot{\phi} \sin \theta)] + \hat{\mathbf{2}} [-\sin \psi \dot{\theta} + \cos \psi (\dot{\phi} \sin \theta)] + \hat{\mathbf{3}} [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta]. \quad (55)\end{aligned}$$

Αυτές είναι ακριβώς οι συνιστώσες του ω που βρήκαμε παραπάνω με τη βοήθεια των πινάκων στροφής.

6 Κίνηση συμμετρικού στερεού του οποίου οι δύο ροπές αδράνειας είναι ίσες

Αν το σώμα είναι ελεύθερο και η συνολική στροφορμή του σώματος $\mathbf{L}$ είναι σταθερή και η ολική κινητική του ενέργεια K :

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

Η παραπάνω σχέση με K , $\mathbf{L}$ σταθερά, προφανώς δεν συνεπάγεται ότι και η $\boldsymbol{\omega}$ είναι σταθερή. Αυτό που συνεπάγεται, είναι σταθερή προβολή της $\boldsymbol{\omega}$ στη διεύθυνση της $\mathbf{L}$.

Ας δούμε τώρα πώς εξελίσσεται το διάνυσμα της στροφορμής στο σύστημα του σώματος. Αν $(1, 2, 3)$ είναι οι κύριοι άξονες του σώματος με ροπές αδράνειας $I_1 = I_2 = I$, η κίνηση του $\mathbf{L}$ (στο σύστημα του στερεού) είναι:

$$\dot{L}_1 - L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I} \right) = 0 , \quad (56)$$

$$\dot{L}_2 - L_3 L_1 \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3} \right) = 0 , \quad (57)$$

$$\dot{L}_3 = 0 , \quad (58)$$

που σημαίνει ότι διατηρείται κατά τη κίνηση, όχι μόνο το μέτρο της στροφορμής $|\mathbf{L}|$ αλλά και η συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα συμμετρίας⁹ (άξονας 3) του σώματος, δηλαδή αν $\hat{\mathbf{3}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα συμμετρίας του στερεού θα είναι

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}} = L_3(0) , \quad (59)$$

που συνεπάγεται ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα συμμετρίας του σώματος και του διανύσματος της στροφορμής παραμένει σταθερή κατά την κίνηση.

μπλα μπλα

Ας εξετάσουμε την εξέλιξη της στροφορμής ενός μη ελεύθερου συμμετρικού σώματος.

$$\dot{L}_1 - L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I} \right) = \tau_1 , \quad (60)$$

$$\dot{L}_2 - L_3 L_1 \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3} \right) = \tau_2 , \quad (61)$$

$$\dot{L}_3 = \tau_3 , \quad (62)$$

όπου $\boldsymbol{\tau} = \tau_1 \hat{\mathbf{1}} + \tau_2 \hat{\mathbf{2}} + \tau_3 \hat{\mathbf{3}}$. Θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε (λόγω ομοιότητας) τις δύο πρώτες σχέσεις (60,61) μιγαδοποιώντας τες.

$$\frac{d}{dt}(L_1 + iL_2) - i\frac{L_3}{I_3} \left(\frac{I_3 - I}{I} \right) (L_1 + iL_2) = (\tau_1 + i\tau_2) , \quad (63)$$

⁹Η περίπτωση που εξετάζουμε με $I_1 = I_2 = I$ εκτός από τα στερεά που παρουσιάζουν αξονική συμμετρία (κύλινδρος, κώνος κλπ) περιλαμβάνει και τα στερεά με κατάλληλη διακριτή συμμετρία σε περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα, για παράδειγμα

ενώ την τρίτη σχέση (62) θα την ολοκληρώσουμε άμεσα για να λάβουμε

$$L_3(t) = L_3(0) + \int_0^t \tau_3(s) ds . \quad (64)$$

Δεδομένου ότι από το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε την $L_3(t)$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη μιγαδική σχέση ως

$$\frac{dl}{dt} + iw(t)l = \tau \quad (65)$$

με $l = L_1 + iL_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, και

$$w(t) = \frac{L_3(t)}{I_3} \left(\frac{I_3 - I}{I} \right) . \quad (66)$$

Η παραπάνω γραφή είναι πιο συνοπτική και ανάλογα με την περίπτωση δράσης των εξωτερικών δυνάμεων μπορεί να οδηγήσει ευκολότερα σε τουλάχιστον σε φορμαλιστικές απαντήσεις αναφορικά με την εξέλιξη της κίνησης του σώματος.

• **Περίπτωση 1η: Ελεύθερο σώμα.** Στην περίπτωση αυτή, την οποία μελετήσαμε και παραπάνω, $\tau = \mathbf{0}$, οπότε $L_3 = L_3(0)$ και

$$w(t) = \frac{L_3(0)}{I_3} \frac{I_3 - I}{I} = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 = w_0 = \text{σταθ} .$$

Η δε (66) θα έχει ως λύση την

$$\begin{aligned} L_1(t) + iL_2(t) &= l(t) = l(0)e^{-iw_0 t} \\ &= [L_1(0) \cos(w_0 t) + L_2(0) \sin(w_0 t)] + \\ &\quad i [L_2(0) \cos(w_0 t) - L_1(0) \sin(w_0 t)] . \end{aligned} \quad (67)$$

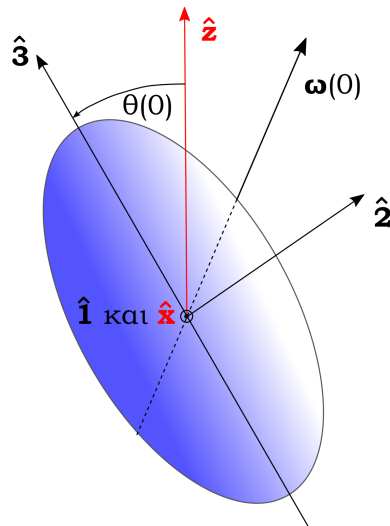
Από τις σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων βάσης στο σύστημα του στερεού και στο αδρανειακό σύστημα μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε όλα τα μεγέθη στο αδρανειακό σύστημα. Έτσι, η στροφορμή στο αδρανειακό σύστημα θα πρέπει να είναι σταθερή. Ας το ελέγξουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= L_1(t)\hat{\mathbf{1}} + L_2(t)\hat{\mathbf{2}} + L_3(t)\hat{\mathbf{3}} \\ &= \mathbf{R}^{-1}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

όπου $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ ο πίνακας στροφής¹⁰ που εμφανίζεται στη σχέση (31). Προφανώς θα πρέπει να γνωρίζουμε τη χρονική εξέλιξη των $\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ προκειμένου να εκτελέσουμε τον παραπάνω υπολογισμό.

¹⁰Στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται ο αντίστροφος πίνακας καθώς θέλουμε να περάσουμε από τις συντεταγμένες 123 στις xyz .

Για να υπολογίσουμε τη χρονική εξέλιξη των τριών αυτών γωνιών του Euler θα στήσουμε ένα καρτεσιανό τρισσορθογώνιο σύστημα $x - y - z$ και θα μετρήσουμε τη στροφή του στερεού ως προς αυτό. Από τη στιγμή που το σώμα είναι ελεύθερο δεν υπάρχει κάποια εξωτερική προτιμώμενη διεύθυνση οπότε μπορούμε να προσανατολίσουμε το αδρανειακό σύστημα όπως εμείς επιθυμούμε. Οι μοναδικές δύο διευθύνσεις που διαθέτουμε από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι ο αρχικός άξονας περιστροφής του σώματος και ο άξονας 3 (ο άξονας συμμετρίας του). Ας επιλέξουμε τον άξονα z του αδρανειακού συστήματος επί του επιπέδου των δύο παραπάνω αξόνων έτσι ώστε η διεύθυνση $\hat{\mathbf{3}}$ να σχηματίζει γωνία $\theta(0)$ με τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{z}}$, ενώ για την διεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}$ θα επιλέξουμε μια διεύθυνση κάθετη στο προαναφερθέν επίπεδο. Όντας κάθετη στην $\hat{\mathbf{x}}$, η $\hat{\mathbf{3}}$, μπορούμε να επιλέξουμε και τον άξονα $\hat{\mathbf{1}}$ του στερεού να συμπίπτει με τον $\hat{\mathbf{x}}$. Αυτοί οι άξονες που στήσαμε αφορούν στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$. Ως προς το αδρανειακό σύστημα $x - y - z$, οι άξονες 1 – 2 – 3 θα αρχίσουν, στη συνέχεια, να στρέφονται, με αρχικό άξονα περιστροφής τον άξονα του $\omega(0)$. Ας αναλύσουμε τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα



Σχήμα 6: Τοποθέτηση των αξόνων, έτσι ώστε ο άξονας συμμετρίας του σώματος και η διεύθυνση του ω τη στιγμή $t = 0$ να σχηματίζουν ένα επίπεδο από το οποίο να διέρχεται ο άξονας $\hat{\mathbf{z}}$.

του σώματος στους άξονες 1 – 2 – 3 του σώματος:

$$\omega = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \quad (69)$$

αλλά όπως είδαμε παραπάνω όταν υπολογίσαμε τη χρονική εξέλιξη των συνιστωσών της στροφορμής $\omega_3 = L_3/I_3 = \text{σταθερό}$ ενώ $\omega_1 + i\omega_2 = (L_1 + iL_2)/I = (L_1(0) + iL_2(0))e^{-i\omega_0 t}/I =$

$(\omega_1(0) + i\omega_2(0))e^{-i\omega_0 t}$. Δεδομένης της θέσης του άξονα $\hat{\mathbf{1}}$ αρχικά θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\tilde{\Omega}(t) \equiv \omega_1(t) + i\omega_2(t) = i\omega_2(0)e^{-i\omega_0 t}. \quad (70)$$

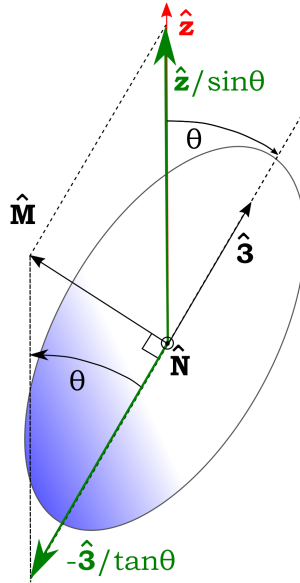
Ας αναλύσουμε τώρα το ω στους μη ορθογώνιους άξονες $3 - z - N$.¹¹ Καταρχάς θα πρέπει να στρέψουμε τα διανύσματα $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$, έτσι ώστε να λάβουμε τις συνιστώσες ω_N, ω_M . Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός συνδυασμός $\omega_1 + i\omega_2$ σε συνδυασμό με τον μιγαδικό αριθμό $e^{i\psi}$ δίνουν

$$\begin{aligned} (\omega_1 + i\omega_2)e^{i\psi} &= (\omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi) + i(\omega_2 \cos \psi + \omega_1 \sin \psi) \\ &= \omega_N + i\omega_M. \end{aligned} \quad (71)$$

Παράλληλα, η ανάλυση των $\hat{\mathbf{M}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ σε $\hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ θα δώσει

$$\omega_3 \hat{\mathbf{3}} + \omega_M \hat{\mathbf{M}} = \left(\omega_3 - \frac{\omega_M}{\tan \theta} \right) \hat{\mathbf{3}} + \frac{\omega_M}{\sin \theta} \hat{\mathbf{z}}. \quad (72)$$

Η παραπάνω ανάλυση του $\hat{\mathbf{M}}$ στο πλαγιογώνιο σύστημα $\hat{\mathbf{3}} - \hat{\mathbf{z}}$ προκύπτει άμεσα από τη γεωμετρία του σχήματος 7 που αποτελεί εξέλιξη στο χρόνο του σχήματος 6. Εξισώνοντας στη



Σχήμα 7: Ανάλυση του στιγμιαίου συστήματος $\hat{\mathbf{3}} - \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{N}}$ στο σύστημα $\hat{\mathbf{3}} - \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{N}}$.

¹¹Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι για να έχουμε άμεσες εκφράσεις των ρυθμών μεταβολής για τις τρεις γωνίες Euler σύμφωνα με την 3η σχέση της (51)

¹²Σύμφωνα με τις σχέσεις (53,54).

συνέχεια τις συνιστώσες του ω στο σύστημα $\hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{N}}$ με τον ορισμό των συνιστωσών αυτών ως ρυθμοί μεταβολής των τριών γωνιών του Euler θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \omega_3 - \frac{\omega_M}{\tan \theta} = \omega_3(0) - \frac{\Im\{\tilde{\Omega}e^{i\psi}\}}{\tan \theta} = \omega_3(0) - \frac{\Im\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-w_0t)}\}}{\tan \theta} \\
&= \omega_3(0) - \frac{\omega_2(0) \cos(\psi - w_0t)}{\tan \theta}, \\
\dot{\phi} &= \frac{\omega_M}{\sin \theta} = \frac{\Im\{\tilde{\Omega}e^{i\psi}\}}{\sin \theta} = \frac{\Im\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-w_0t)}\}}{\sin \theta} \\
&= \frac{\omega_2(0) \cos(\psi - w_0t)}{\sin \theta}, \\
\dot{\theta} &= \omega_N = \Re\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-w_0t)}\} \\
&= \omega_2(0) \sin(\psi - w_0t). \tag{73}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων καθίσταται τετριμμένη αν είναι $\psi = w_0t$! Τότε η θ θα είναι σταθερή, ενώ οι άλλες δύο γωνίες θα εξελίσσονται με σταθερό ρυθμό. Ας δούμε γιατί αυτό είναι αυτοσυνεπές. Αν θέσουμε $\psi(t) = w_0t$, τότε η πρώτη εξίσωση θα δώσει

$$w_0 = \omega_3(0) - \frac{\omega_2(0)}{\tan \theta}$$