

# Κεφάλαιο 14

## Βαρύτητα

### 1 Βαρυτική Έλξη

Στο αρχικό κεφάλαιο όπου διερευνήσαμε αριθμητικά τους νόμους του Κέπλερ, αλλά και αργότερα κατά τη μέλετη των κεντρικών δυναμικών, θεωρήσαμε αυθαίρετα ότι η βαρυτική δύναμη είναι μια κεντρική δύναμη, το μέτρο της οποίας είναι ανάλογο του αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης των δύο αμοιβαία ελκόμενων σημειακών μαζών. Για την ακρίβεια ο Νεύτωνας θεώρησε στο μνημειώδες έργο του *Principia*, ότι τέτοια είναι η βαρυτική δύναμη, ώστε να μπορεί να εξηγηθεί η ελλειπτική τροχιά των πλανητών του Ηλιακού μας συστήματος.

Ακόμη όμως και αν ήταν έτσι, είναι λογικό να θεωρούμε τα ουράνια σώματα που εν πολλοίς είναι τεράστιες σφαίρες με όχι ομογενή κατανομή στο εσωτερικό τους ως σημειακές μάζες; Επιπλέον οι πλανήτες, οι δορυφόροι τους, οι αστεροειδείς και ο Ήλιος είναι πολλά σώματα που αλληλεπιδρούν βαρυτικά μεταξύ τους. Θα μπορούσε κανείς να αποδώσει την ελλειπτική τροχιά των πλανητών στη βαρυτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου από όλα αυτά τα σώματα;

Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνησή μας με δεδομένο ότι η δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα  $m_2$  που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_2$  εξαιτίας μιας σημειακής μάζας  $m_1$  που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_1$  περιγράφεται από τη σχέση

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}. \quad (1)$$

Η διανυσματική αυτή σχέση δηλώνει ότι η κατεύθυνση της δύναμης είναι πάνω στον φορέα της ευθείας που διέρχεται από τις δύο σημειακές μάζες (γι' αυτό εμφανίζεται στη σχέση το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}$  που κατευθύνεται από την 1 προς την 2) και λόγω της ελκτικότητας της βαρυτικής δύναμης έχει τη διεύθυνση από τη 2 προς την 1 (γι' αυτό υπάρχει το - πρόσημο). Παράλληλα η δύναμη αυτή είναι ανάλογη με την κάθε μία μάζα χωριστά και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  μεταξύ των δύο μαζών. Η σταθερά  $G$  είναι ένας συντελεστής αναλογίας, γνωστός ως σταθερά της Παγκόσμιας έλξης, ή σταθερά του Νεύτωνα, και η τιμή της σχετίζεται με το πόσο δυνατή είναι η βαρύτητα ως θεμελιώδης δύναμη. Η τιμή αυτής είναι

$$G = 6.67408(31) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2. \quad (2)$$

Αν και είναι δύσκολο να συγκρίνει κανείς τις εντάσεις μεταξύ των διαφόρων θεμελιωδών δυνάμεων αφού περιγράφονται με διαφορετικές μονάδες, αρκεί κανείς να συγκρίνει για παράδειγμα τη βαρυτική με την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο στοιχειωδών φορτισμένων σωματιδίων (π.χ. δύο πρωτονίων) ή να σκεφθεί απλώς ότι χρειάζεται τουλάχιστον μια ολάκερη  $\Gamma$  για να αποσπάσει ένα φορτισμένο χαρτάκι που κρατάει "κολλημένο" πάνω της μια πλαστική χτένα που

έχει φορτιστεί με τριβή. Δυστυχώς δεν είναι δυνατό στο επίπεδο της μελέτης μας να εξηγήσουμε γιατί η βαρυτική δύναμη έχει αυτή τη μορφή, παρά μόνο να τη δεχθούμε ως σωστή αφού περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τις αστρονομικές παρατηρήσεις των πλανητών.

Θα θέλαμε τώρα με βάση αυτή τη δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών να βρούμε μια σχέση για τη δύναμη μεταξύ δύο πεπερασμένης διάστασης μαζών. Όπως καταλαβαίνετε το τελικό αποτέλεσμα θα περιγραφόταν από μια αρκετά πολύπλοκη από υπολογιστική άποψη διανυσματική έκφραση της μορφής

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dm_1 dm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}. \quad (3)$$

όπου οι ολοκληρώσεις θα έπρεπε να ληφθούν και στους δύο όγκους που περιέχονται τα δύο σώματα και για κάθε ζεύγος στοιχειωδών μαζών  $dm_1, dm_2$  θα είναι και διαφορετικό το διάνυσμα  $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$  που θα σχετίζεται με τη μεταξύ τους σχετική θέση.

Εμείς θα προσπαθήσουμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό αρχικά για μια σημειακή μάζα  $m_2$  και για έναν σφαιρικό φλοιό απειροστού πάχους που έχει συνολική μάζα  $m_1$  και ακτίνα  $R$ . Στην ειδική αυτή περίπτωση το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα θα μετατραπεί σε ένα απλό (αφού η μάζα  $m_2$  είναι σημειακή) το οποίο δεν θα είναι ένα χωρικό ολοκλήρωμα αλλά ένα επιφανειακό (αφού η μάζα  $m_1$  εξαπλώνεται πάνω σε μια επιφάνεια). Και πάλι όμως ο υπολογισμός –αν και εφικτός– θα παρουσιάσει δυσκολίες καθώς η ολοκλήρωση θα αφορά διανυσματικές ποσότητες και θα πρέπει να εκμεταλλευτεί κανείς καταλλήλως την αξονική συμμετρία που παρουσιάζει μια σφαίρα γύρω από την ευθεία που συνδέει τα κέντρα των δύο μαζών, προκειμένου να μετατρέψει το διανυσματικό ολοκλήρωμα σε απλό.

Εδώ θα καταφύγουμε σε κάτι πιο απλό. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του βαρυτικού δυναμικού αφού μια δύναμη σαν τη βαρυτική είναι συντηρητική και επομένως μπορεί να προκύψει από κάποιο δυναμικό. Θα ορίσουμε λοιπόν το δυναμικό στη θέση  $\mathbf{r}$  μακριά από κάποια σημειακή μάζα  $M$  ως την ποσότητα  $\Phi(\mathbf{r})$  έτσι ώστε η βαρυτική έλξη που θα προκαλέσει η  $M$  σε μια τυχαία άλλη σημειακή μάζα  $\mu$  να περιγράφεται από τη σχέση

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Αφού η σχέση δύναμης-δυναμικού είναι τέτοια το δυναμικό θα πρέπει να δίνεται (βλ. κεφάλαιο για το δυναμικό) από την έκφραση

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{F}}{\mu} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5)$$

όπου το  $\mathbf{r}_0$  είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο οποίο έχουμε προαποφασίσει να δώσουμε στο δυναμικό την τιμή 0. Στην περίπτωσή μας όπου έχουμε να κάνουμε με μια δύναμη η οποία εξασθενεί με την απόσταση δεν θα ήταν κακή ιδέα (και αυτό συνηθίζεται άλλωστε) να θέτουμε το  $\mathbf{r}_0$  ως

<sup>1</sup>Ο διψήφιος αριθμός 31 μέσα στην παρένθεση σημαίνει ότι η πειραματική αβεβαιότητα μέτρησης στα τελευταία δύο ψηφία προ της παρένθεσης, 08, είναι  $\pm 31$ .

μια θέση σε άπειρη απόσταση από τη μάζα  $M$ . Το παραπάνω ολοκλήρωμα –αν χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες και τοποθετήσουμε την  $M$  στην αρχή των αξόνων– παίρνει τη μορφή

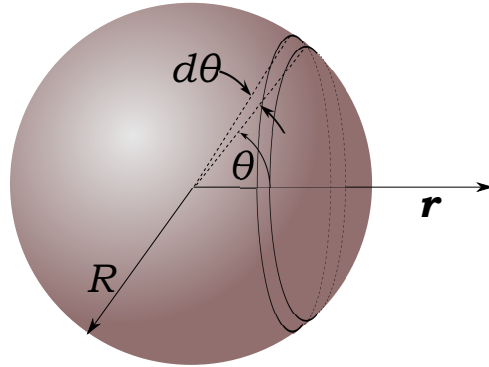
$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0 \rightarrow \infty}^{\mathbf{r}} -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = GM \int_{\infty}^{|\mathbf{r}|} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}. \quad (6)$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης του δυναμικού έναντι της δύναμης είναι ότι το δυναμικό είναι μια βαθμωτή ποσότητα και έτσι αντί να προσθέτουμε τις διανυσματικές δυνάμεις από πολλές μάζες μπορούμε να προσθέτουμε τα βαθμωτά δυναμικά από πολλές μάζες.<sup>2</sup>

Θα υπολογίσουμε τώρα το δυναμικό σε απόσταση  $r$  από το κέντρο ενός σφαιρικού κελύφους μάζας  $M$  ομογενώς κατανεμημένου επί μιας σφαιρικής επιφάνειας  $S$  ακτίνας  $R$ . Αυτό θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_{S(R)} \frac{dM'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (7)$$

Ούτε αυτό το ολοκλήρωμα μοιάζει να υπολογίζεται πολύ εύκολα, διότι μολονότι βαθμωτό, εμπεριέχει διανύσματα τα οποία αλλάζουν διεύθυνση από τη μία στοιχειώδη μάζα στην επόμενη. Ένα τρικ για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα αυτό εύκολα και γρήγορα είναι να διαμερίσουμε το σφαιρικό φλοιό σε στοιχειώδη τμήματα τέτοια ώστε ολόκληρη η μάζα του εκάστοτε τμήματος να βρίσκεται σε συγκεκριμένη απόσταση από το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό. Για έναν σφαιρικό φλοιό τέτοια κατάλληλα τμήματα είναι δακτύλιοι ομοαξονικοί με την ευθεία που συνδέει το κέντρο του σφαιρικού φλοιού με το σημείο υπολογισμού του δυναμικού. Το μόνο τώρα που χρειάζεται είναι ο υπολογισμός της μάζας του κάθε τέτοιου δακτυλίου. Αν επιλέξουμε ως μεταβλητή που καθορίζει τη θέση του κάθε τέτοιου δακτυλίου τη γωνία  $\theta$  που φαίνεται στο σχήμα θα είναι



**Σχήμα 1:** Ο σφαιρικός φλοιός και ένας από τους δακτύλιους σε συγκεκριμένη απόσταση από το σημείο υπολογισμού του  $\Phi$ . Η διεύθυνση του διανύσματος  $\mathbf{r}$  ορίζει τον άξονα όλων αυτών των δακτυλίων.

$$dM' = \frac{M}{4\pi R^2} (2\pi R \sin \theta) (R d\theta), \quad (8)$$

<sup>2</sup>Η σχέση μεταξύ δύναμης και δυναμικού είναι γραμμική, οπότε η επαλληλία πολλών διανυσμάτων δυνάμεων είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση των αντίστοιχων δυναμικών.

ενώ η απόσταση του δακτυλίου αυτού από το σημείο  $\mathbf{r}$  είναι

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^{1/2}. \quad (9)$$

Ο υπολογισμός τώρα του δυναμικού είναι άμεσος:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= -G \int_0^\pi \frac{M}{4\pi R^2} \frac{2\pi R^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} d\theta \\ &= -GM \frac{1}{4Rr} \int_0^\pi \frac{d(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \\ &= -G \frac{M}{4Rr} \int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \frac{du}{u^{1/2}} \\ &= -G \frac{M}{4Rr} 2 [u^{1/2}]_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \\ &= -G \frac{M}{2Rr} [|R+r| - |R-r|]. \end{aligned} \quad (10)$$

Προσέξτε ότι κατά τον αποτετραγωνισμό του  $u$  πρέπει να γράψουμε τις απόλυτες τιμές και αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το δυναμικό και έξω από τον φλοιό ( $r > R$ ) αλλά και μέσα σε αυτόν ( $r < R$ ). Το δυναμικό λοιπόν σε οποιοδήποτε σημείο (μέσα ή έξω) από έναν σφαιρικό φλοιό είναι

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -GM/R, & \text{για } |\mathbf{r}| < R \\ -GM/r, & \text{για } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον και άκρως εντυπωσιακό. Αφενός το δυναμικό είναι σταθερό παντού εντός του σφαιρικού φλοιού και αφετέρου στο εξωτερικό το δυναμικό είναι αυτό ακριβώς που θα είχαμε αν όλη η μάζα του σφαιρικού φλοιού ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της σφαίρας! Με άλλα λόγια αν το μόνο που διαθέταμε ήταν ένα “δυναμικό-μετρο” δεν θα μπορούσαμε να καταλάβουμε ότι το βαρυτικό πεδίο το δημιουργεί μια ολόκληρη σφαίρα ή μια σημειακή μάζα παρά μόνο αν ταξιδεύοντας περνούσαμε κάποιο σημείο (διασχίζοντας δηλαδή τη σφαίρα) και διαπιστώναμε ότι το δυναμικό σταθεροποιείται σε μια ολόκληρη περιοχή. Το εντυπωσιακό αυτό αποτέλεσμα οφείλεται αποκλειστικά στη συμμετρία του σφαιρικού σχήματος. Οποιοδήποτε άλλου σχήματος κέλυφος δεν θα οδηγούσε στο αποτέλεσμα αυτό.

Με βάση το δυναμικό μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα  $\mu$  από το σφαιρικό κέλυφος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4) βρίσκουμε

$$\mathbf{F} = \begin{cases} 0, & \text{για } |\mathbf{r}| < R \\ -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & \text{για } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases}$$

Όπως είναι φυσικό, αν το δυναμικό του σφαιρικού φλοιού είναι ίδιο με αυτό μιας σημειακής μάζας (στο εξωτερικό του φλοιού), το ίδιο ισχύει και για την ίδια τη δύναμη. Στο εσωτερικό

όμως η δύναμη είναι 0! Πως είναι δυνατό κάτι τέτοιο; Αν βρισκόμαστε κοντά στο φλοιό από την εσωτερική πλευρά δεν θα έπρεπε η δύναμη από τα κοντινά τμήματα του φλοιού να υπερισχύει αυτής από τα πιο απομακρυσμένα και έτσι να υπάρχει μια μη μηδενική δύναμη στην  $\mu$ ; Ας εξετάσουμε γιατί εμφανίζεται αυτό το απρόσμενο α:

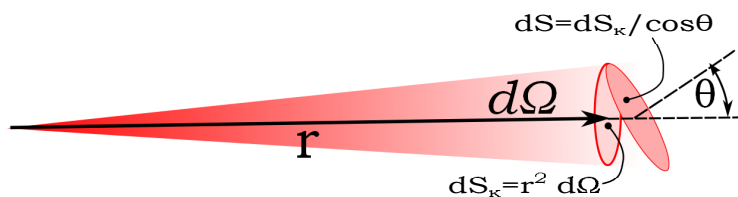
Θα διαμερίσουμε τη σφαιρική επιφάνεια του κελύφους σε μικρές μάζες, εκατέρωθεν της σημειακής μάζας  $\mu$  (κόκκινο σημείο) στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική βαρυτική δύναμη του κελύφους. Οι δύο αυτές “αντιδιαμετρικές” μάζες προκειμένου να μπορούν να καλύψουν ολόκληρο το σφαιρικό κέλυφος επιλέγονται ως εξής. Κατασκευάζουμε δύο κατακορυφήν κώνους απειροστού ανοίγματος που αντιστοιχούν σε σφαιρικές γωνίες  $d\Omega_1 = d\Omega_2$  με κέντρο την  $\mu$  και άξονα οποιαδήποτε τυχαία κατεύθυνση. Τα δύο ανοίγματα του κώνου αποκόπτουν από το σφαιρικό κέλυφος δύο μάζες  $dm_1, dm_2$  (προφανώς άνισες αν η μια βρίσκεται κοντύτερα στην  $\mu$  από την άλλη). Ο λόγος αυτών των μαζών είναι ανάλογος με το λόγο των αντίστοιχων αποκοπτόμενων επιφανειών (αφού η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή):

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{dS_1}{dS_2} \quad (11)$$

Οι επιφάνειες αυτές όμως είναι μεν αυτές που αποκόπτει η κοινή στερεά γωνία από μια σφαιρική επιφάνεια αλλά εν γένει όχι κάθετα στον άξονα των κατακορυφήν κώνων. Επομένως

$$dS_i = r_i^2 d\Omega_i / \cos \theta_i, \quad (12)$$

(βλ. σχήμα 3) όπου  $r_i$  η απόσταση της  $\mu$  από την  $i$ -οστή επιφάνεια, ενώ τα συνημίτονα εμφανί-



Σχήμα 3: Διαγραμματική επεξήγηση της σχέσης (12).

ζονται για να διορθώσουν τα προβολικά φαινόμενα ( $r_i^2 d\Omega_i$  είναι η επιφάνεια που θα απέκοπτε

η στοιχειώδης γωνία  $d\Omega_i$  από μια σφαιρική επιφάνεια αν ο άξονας της στερεάς γωνίας ήταν κάθετος στην επιφάνεια αυτή). Επειδή όμως οι στερεές γωνίες λήφθηκαν εκ προοιμίου ίσες και το γεγονός ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν οι στοιχειώδεις μάζες (λαμβάνόμενες ως σημεία) και το κέντρο της σφαίρας  $K$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\theta_1 = \theta_2$ , θα είναι

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (13)$$

Με άλλα λόγια οι εκατέρωθεν δυνάμεις από τις δύο στοιχειώδεις μάζες που είναι ανάλογες της ποσότητας  $dm_i/r_i^2$  θα είναι ίσες και θα αλληλοαναιρούνται. Αυτό θα ισχύει για κάθε ζεύγος τέτοιων στοιχειωδών μαζών και το συνολικό αποτέλεσμα θα είναι μηδενική δύναμη εντός του κελύφους!

Το αποτέλεσμα που βγάλαμε μπορεί να οδηγήσει σε ακόμη πιο γενικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα αν μια σφαίρα είναι γεμάτη με υλικό σταθερής πυκνότητας, στο μεν εξωτερικό της το βαρυτικό πεδίο είναι αυτό μιας σημειακής μάζας συγκεντρωμένης στο κέντρο της σφαίρας, στο δε εσωτερικό της όλα τα κελύφη που βρίσκονται πιο έξω από το εν λόγω σημείο δεν ασκούν καμία βαρυτική έλξη, οπότε η βαρυτική έλξη είναι αυτή μιας σημειακής μάζας στο κέντρο της σφαίρας με συνολική μάζα όση έχουν οι ενδότεροι φλοιοί. Μάλιστα το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει όχι μόνο για μια ομογενή σφαίρα (σταθερής πυκνότητας) αλλά για οποιαδήποτε σφαίρα με σφαιρική συμμετρία στην κατανομή μάζας, δηλαδή μπορεί ακόμη και η πυκνότητα να αλλάζει αρκεί η μεταβολή να είναι μόνο ακτινική.

## 2 Νόμος του Gauss

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού του βαρυτικού πεδίου, ειδικά σε πολύ συμμετρικές κατανομές μαζών (όπως η σφαιρική που εξετάσαμε παραπάνω) είναι μέσω της χρήσης του νόμου του Gauss. Σύμφωνα με το νόμο αυτό μπορεί να υπολογίσει κανείς ένα χωρικό ολοκλήρωμα μέσω ενός επιφανειακού ολοκληρώματος επί της εξωτερικής επιφάνειας του συνόρου του προηγούμενου ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\int_V \nabla \cdot \psi(\mathbf{r}) dV = \int_{S(V)} \psi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (14)$$

όπου  $\psi(\mathbf{r})$  είναι οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο του χώρου. Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέσουμε όπου  $\psi = \mathbf{g}$  δηλαδή το πεδίο της βαρυτικής έντασης εξαιτίας κάποιας κατανομής ύλης θα έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \nabla \cdot \nabla \Phi. \quad (15)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα η Λαπλασιανή του βαρυτικού πεδίου από μια σημειακή μάζα  $m$  η οποία βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_0$ . Το δυναμικό είναι

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (16)$$

επομένως

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \Phi &= \nabla^2 \left( -G \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right) \\
&= +Gm \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\
&= Gm \left( \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - 3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \right). \tag{17}
\end{aligned}$$

Η Λαπλασιανή λοιπόν αυτή είναι ίση με 0 εκτός από το σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  για το οποίο το ίδιο το δυναμικό δεν υπολογίζεται, οπότε θα ήταμν μάλλον επικίνδυνο να λάβουμε το μηδενικό αυτό αποτέλεσμα ως προφανές. Αυτό είναι ένα σημείο που τα μαθηματικά αποτελέσματα θα πρέπει να γίνονται δεκτά με επιφύλαξη. Το γεγονός ότι το σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης του δυναμικού δεν είναι απλώς μια τεχνική λεπτομέρεια. Όπως θα δείτε μπορεί να αλλάξει τελείως τα συμπεράσματά μας. Τώρα θα υπολογίσουμε το δεξί μέλος της (14) για το εν λόγω πεδίο. Γνωρίζουμε ότι το βαρυτικό πεδίο από τη σημειακή αυτή μάζα είναι

$$\mathbf{g} = -Gm \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \tag{18}$$

αποτέλεσμα που πήραμε κατά τον υπολογισμό του  $\nabla \Phi$ . Ας φανταστούμε τώρα μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημείο  $\mathbf{r}_0$  και ακτίνας  $R$ . Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της μαθηματικής ταυτότητας του Gauss θα είναι

$$\begin{aligned}
\int_{S_R} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= -Gm \int_{S_R} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S} \\
&= -Gm \int_{S_R} \frac{R\hat{\mathbf{R}}}{R^3} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 d\Omega \\
&= -Gm \int_{S_R} d\Omega \\
&= -4\pi Gm! \tag{19}
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι μηδέν, όπως πιθανώς θα νόμιζε κανείς από το προηγούμενο αποτέλεσμα της (17), του νόμου του Gauss (14) και της σχέσης που συνδέει το δυναμικό με την ένταση της βαρύτητας (15). Μα πως είναι δυνατό να μην είναι μηδέν αφού ολοκληρώνεται σε ένα χωρίο μια συνάρτηση η οποία είναι μηδέν παντού εντός του χωρίου εκτός από ένα μόνο σημείο στο οποίο ούτε καν ορίζεται! Κάτι θυμίζει η παραπάνω περιγραφή της συνάρτησης: τη συνάρτηση δέλτα φυσικά. Πρόκειται για μια ιδιότυπη συνάρτηση (για να είμαστε πιο ακριβείς ένα συναρτησοειδές) η οποία αν και παντού μηδενική, εκτός ενός σημείου, έχει ολοκλήρωμα 1.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Στο κεφάλαιο 2 είδαμε τη συνάρτηση δέλτα στη μονοδιάστατη έκδοσή της, όπου ο χώρος ολοκλήρωσής της ήταν η ευθεία των πραγματικών. Τώρα συναντάμε την 3-D έκδοσή της δέλτα,  $\delta^{(3)}$  με χώρο ολοκλήρωσης τον  $\mathbb{R}^3$ .

Έτσι επιστρέφοντας στη μαθηματική ταυτότητα (15) που ισχύει παντού εκτός από ένα σημείο, το  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , θα γράψουμε την ακριβή σχέση που ισχύει παντού:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi G m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (20)$$

όπου  $m$  είναι η μάζα στη θέση  $\mathbf{r}_0$  και στην οποία οφείλεται το δυναμικό  $\Phi$ .<sup>4 5</sup> Αυτό είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα το οποίο όπως θα δούμε διευκολύνει εξαιρετικά τον υπολογισμό του βαρυτικού πεδίου σε ιδιαίτερα συμμετρικές κατανομές μάζας.

Στο σημείο αυτό ας επιστρέψουμε στη σχέση (19). Το αποτέλεσμα ισχύει μόνο για σφαιρική επιφάνεια; Όχι. Ακόμη και αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική, δηλαδή η ακτίνα  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης (δηλαδή των σφαιρικών γωνιών  $\theta, \phi$ ) και η εκάστοτε στοιχειώδης επιφάνεια  $d\mathbf{S}$  μπορεί να γραφεί ως  $\hat{\mathbf{s}}|d\mathbf{S}| = \hat{\mathbf{s}}R^2 d\Omega / \cos \theta_{dS}$ , όπου  $\hat{\mathbf{s}}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $d\mathbf{S}$  [βλ. σχέση (12)], το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος της (19) καταλήγει να είναι πάλι το ολοκλήρωμα της στερεάς γωνίας σε ολόκληρο το χώρο αφού  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R} = \cos \theta_{dS}$ .<sup>6</sup>

Η σχέση (20) αν εισαχθεί στο νόμο του Gauss οδηγεί στο πολύ όμορφο και απλό αποτέλεσμα

$$\int_S \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{\text{ολ.περ.}} \quad (21)$$

για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια  $S$  που περικλείει συνολική μάζα  $M_{\text{ολ.περ.}}$ . Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στο ότι το δυναμικό εξαιτίας πολλών πηγών ισούται με το άθροισμα των δυναμικών από κάθε πηγή χωριστά (γρταμμικότητα του δυναμικού).

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό θα θέλαμε να τονίσουμε την ιδιαιτερότητα του βαρυτικού πεδίου που οδήγησε στον πολύ απλό αυτό ολοκληρωτικό νόμο. Πρόκειται για το ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση περιγράφεται από μια δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου. Επιπλέον αυτή ακριβώς η ιδιαιτερότητα του βαρυτικού πεδίου μας προσφέρει τη δυνατότητα να αναπαριστούμε το πεδίο με τη βοήθεια συνεχών δυναμικών γραμμών η πυκνότητα των οποίων αναλογεί ποσοτικά στην ένταση του πεδίου.<sup>7</sup> Έτσι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της έντασης που υπεισέρχεται στο νόμο του Gauss περιγράφει τη ροή των δυναμικών γραμμών μέσα από μια επιφάνεια. Μια κλειστή επιφάνεια η οποία δεν περικλείει καμμία μάζα αν τοποθετηθεί εντός κάποιου βαρυτικού πεδίου

<sup>4</sup> Από εδώ προκύπτει και η χρήσιμη μαθηματική ταυτότητα  $\nabla^2(1/|\mathbf{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ .

<sup>5</sup> Η εξίσωση αυτή είναι η επονομαζόμενη εξίσωση Poisson για τη βαρύτητα, με τον όρο  $m\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  να αντιπροσωπεύει την πυκνότητα μιας σημειακής μάζας. Στον ηλεκτρομαγνητισμό η αντίστοιχη εξίσωση  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ , (με  $1/(4\pi\epsilon_0)$  στη θέση του  $G$ , δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό από μια κατανομή φορτίου με πυκνότητα  $\rho(\mathbf{r})$ . Προσέξτε την αλλαγή προσήμου σε αυτή την περίπτωση που σχετίζεται με το ότι η δύναμη μεταξύ δύο ομόσημων φορτίων είναι απωθητική σε σχέση με τις δύο μάζες που είναι πάντα ελκτική.

<sup>6</sup> Η περίπτωση μιας μη κυρτής επιφάνειας οδηγεί και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα αφού μια στοιχειώδης στερεά γωνία πάντα αποκόπτει περιττό πλήθος στοιχειωδών επιφανειών από μια τέτοια επιφάνεια οπότε στο ολοκλήρωμα έχουμε την ακόλουθη σειρά συμβολών  $d\Omega - d\Omega + d\Omega - d\Omega + \dots + d\Omega = d\Omega$ . Τα υπόλοιπα γεωμετρικά στοιχεία όπως είπαμε αλληλοαναιρούνται για κάθε  $\pm d\Omega$ .

<sup>7</sup> Αν το πεδίο δεν ήταν αντιστρόφου τετραγώνου, τότε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου δεν θα ήταν συνεχείς: άλλοτε θα διακόπτονταν απότομα και άλλοτε θα εμφανίζονταν από το πουθενά.



θα έχει μηδενική ολική ροή (όσες γραμμές εισέρχονται στο εσωτερικό της επιφάνειας κάποια στιγμή εξέρχονται). Σε επίπεδο υπολογισμού του αντίστοιχου ολοκληρώματος (17) το ολοκλήρωμα της στερεάς γωνίας είναι μηδέν γιατί η στερεά γωνία που αντιστοιχεί στο κομμάτι της ροής που εξέρχεται από την επιφάνεια (θετική ροή) ισούται με τη στερεά γωνία που αντιστοιχεί στο κομμάτι της ροής που εισέρχεται στην επιφάνεια (αρνητική ροή). Η συνολική αυτή –θετική ή αρνητική– στερεά γωνία είναι η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται ολόκληρο το χωρίο της κελιστής επιφάνειας από το σημείο  $\mathbf{r}_0$  (που βρίσκεται εκτός του χωρίου αφού εκεί εξ υποθέσεως υπάρχει μια κάποια μάζα).

### 3 Υπολογισμός πεδίων μέσω του νόμου του Gauss

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να υπολογίσουμε το βαρυτικό πεδίο γύρω από διάφορες κατανομές μάζας. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει στο χώρο μια ισοτροπική κατανομή μάζας με πυκνότητα η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση  $r = |\mathbf{r}|$  από κάποιο κέντρο σύμφωνα με τη σχέση  $\rho(r)$ . Ακριβώς εξαιτίας αυτής σφαιρικής συμμετρίας αναμένεται και το βαρυτικό πεδίο να παρουσιάζει αυτή τη σφαιρική συμμετρία. Συγκεκριμένα δεν θα μπορούσε παρά η ένταση του πεδίου να έχει τη μορφή

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}. \quad (22)$$

Αν δεν είχε την κατεύθυνση αυτή το πεδίο, αλλά ήταν κάπως “λοξή” σε σχέση με την ακτινική, θα έπρεπε κάποιος να εξηγήσει γιατί το πεδίο προτιμά να “λοξέψει” προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση. Αφού η μοναδική πηγή πεδίου είναι η εν λόγω σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας δεν υπάρχει κάποια άλλη προτιμητέα κατεύθυνση. Το ίδιο ισχύει και για το μέτρο της έντασης  $g(r)$ · δεν θα μπορούσε και αυτό για τον ίδιο λόγο να εξαρτάται από την κατεύθυνση, δηλαδή τις σφαιρικές γωνίες.

Η συμμετρική αυτή μορφή πεδίου μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε άμεσα τη ροή του πεδίου σε μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της κατανομής της μάζας και ακτίνα  $R$ :

$$\int_{S_R} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_R} g(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}R^2 d\Omega = g(R)R^2 \int_{S_R} d\Omega = 4\pi R^2 g(R), \quad (23)$$

και με δεδομένο το νόμο του Gauss (21) καταλήγουμε στο εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M_{\text{ολ.περ.}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (24)$$

Στην περίπτωση αυτή  $M_{\text{ολ.περ.}}$  είναι η μάζα που περιέχεται στη σφαίρα ακτίνας  $r$  η οποία ισούται με

$$M_{\text{ολ.περ.}} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'. \quad (25)$$

Ας εξετάσουμε μια χαρακτηριστική περίπτωση κατανομής μάζας. Η πυκνότητα θα υποθέσουμε ότι είναι σταθερή και ίση με  $\rho_0$  στο διάστημα  $R_1 < r < R_2$ . Πρόκειται δηλαδή για μια κούφια ομογενή σφαίρα με εσωτερική ακτίνα  $R_1$  και εξωτερική  $R_2$ . σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G\hat{\mathbf{r}} \begin{cases} 0, & \text{αν } r < R_1 \\ \frac{M}{r^2} \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}, & \text{αν } R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{M}{r^2}, & \text{αν } R_2 \leq r. \end{cases}$$

Το κλάσμα  $(r^3 - R_1^3)/(R_2^3 - R_1^3)$  είναι ο λόγος των όγκων –και άρα των μαζών– του σφαιρικού φλοιού εσωτερικά του  $r$  σε σχέση με τον όγκο ολόκληρου του σφαιρικού φλοιού. Στην ειδική περίπτωση που δεν υπάρχει εσωτερική κοιλότητα ( $R_1 = 0$ ), η μορφή του πεδίου στο εσωτερικό είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα: το πεδίο είναι γραμμικό με την απόσταση από το κέντρο  $|\mathbf{g}| = (GM/R_2^3)r$ . Έτσι ένα σωματίδιο κινούμενο μόνο εξαιτίας της βαρύτητάς του στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας θα συμπεριφέρεται ως ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής. Επομένως θα διαγράφει ελλειπτικές τροχιές με κέντρο το κέντρο της σφαίρας.

Τώρα θα υποθέσουμε ότι  $R_2 \simeq R_1$ , δηλαδή θα έχουμε έναν πολύ λεπτό σφαιρικό φλοιό. Το εσωτερικό του φλοιού θα έχει μηδενικό πεδίο, ενώ το εξωτερικό θα είναι αυτό μιας σημειακής μάζας  $M$  στο κέντρο. Τα αποτελέσματα αυτά τα είδαμε να προκύπτουν στην ανάλυσή μας σε προηγούμενο εδάφιο, αλλά λόγω της τότε θεωρήσης όπου η κατανομής μάζας ήταν επιφανειακή δεν μπορούσαμε να δώσουμε παραπάνω λεπτομέρειες για το τι συμβαίνει στην ασυνέχεια του βαρυτικού πεδίου καθώς διασχίζουμε τον απειροστού πάχους φλοιό. Τώρα όμως που η μάζα δεν κατανέμεται σε μια επιφάνεια (κάτι τέτοιο έχει μόνο μαθηματικό ενδιαφέρον αλλά δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμο) αλλά στο χώρο μας δίνεται η δυνατότητα να γεφυρώσουμε ομαλά το άλμα του πεδίου από την εσωτερική στην εξωτερική περιοχή καθώς διασχίζουμε τον λεπτό φλοιό. Έστω  $R_2 = R_1 + \epsilon$  ( $\epsilon \ll R_1$ ) και  $r = R_1 + x$  με το  $x$  να “κινείται” στο διάστημα  $x \in [0, \epsilon]$ . Εντός του φλοιού η ένταση του πεδίου θα είναι

$$\begin{aligned} g &= -GM \frac{[R_1 + x]^3 - R_1^3}{[R_1 + x]^2 [(R_1 + \epsilon)^3 - R_1^3]} \\ &= -GM \frac{R_1^3 + 3R_1^2x + \dots - R_1^3}{[R_1^2 + \dots][R_1^3 + 3R_1^2\epsilon + \dots - R_1^3]} \end{aligned} \quad (26)$$

όπου τα αποσιωπητικά ... αναπαριστούν όλους τους άλλους όρους ανώτερης τάξης ως προς  $x$  ή  $\epsilon$  στα αναπτύγματα. Αν αγνοήσουμε αυτούς τους όρους καταλήγουμε στην προσεγγιστική σχέση

$$g \simeq -GM \frac{3R_1^2x}{3R_1^4\epsilon} = -G \frac{M}{R_1^2} \frac{x}{\epsilon}. \quad (27)$$

Με άλλα λόγια το μη μηδενικό βαρυτικό πεδίο αμέσως έξω από τον φλοιό συνδέεται με το μηδενικό πεδίο εντός της κοιλότητας με περίπου γραμμικό τρόπο στο εσωτερικό του λεπτού

φλοιού. Αυτήν τη γραμμική μετάβαση θα τη συναντήσουμε και σε επόμενο παράδειγμα όπου δεν θα υπάρχει η σφαιρική συμμετρία.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss σε μι κατανομή μάζας που παρουσιάζει εντελώς διαφορετική συμμετρία από τη σφαιρική. Θα υποθέσουμε ότι η μάζα κατανέμεται σε ένα άπειρο επίπεδο στρώμα πάχους  $d$ , έτσι ώστε να μην μπορεί να διακρίνει κάποιος διαφορά στο πεδίο αν μετατοπιστεί παράλληλα στο επίπεδο αυτό. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του υλικού έχει τη μορφή  $\rho(z)$  εντός του διαστήματος  $z \in [-d/2, +d/2]$  και είναι μηδέν εκτός αυτού του στρώματος, χωρίς καμία εξάρτηση από τις άλλες συντεταγμένες  $x, y$ . Η συμμετρία που υπάρχει εδώ είναι ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας δεν μπορεί ούτε να εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $x, y$ , ούτε και να έχει συνιστώσες στις κατευθύνσεις αυτές. Η επιχειρηματολογία είναι η ακόλουθη: Αν ίσχυε κάτι τέτοιο σε κάποιο σημείο θα υπήρχε ιδιαιτερότητα πάνω από το αντίστοιχο σημείο του στρώματος, ενώ εμείς υποθέσαμε ότι η πυκνότητα του στρώματος δεν εξαρτάται από τις  $x, y$  συντεταγμένες. Επομένως δεν μένει άλλη δυνατότητα από την

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}g(z). \quad (28)$$

Προφανώς εξαιτίας του ότι η βαρύτητα είναι ελκτική αναμένουμε η συνάρτηση  $g(z)$  να είναι αρνητική για  $z > d/2$  και θετική για  $z < -d/2$ , ενώ ο προσδιορισμός του προσήμου της στο εσωτερικό του στρώματος δεν είναι προφανής. Ίσως θα είναι τέτοιος ώστε να επιφέρει την κατάλληλη γεφύρωση μεταξύ των τιμών της  $g(z)$  μόλις έξω από το στρώμα. Τώρα που γνωρίζουμε κάτι για ο πεδίο ας εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss σε κατάλληλη κλειστή επιφάνεια ώστε να είναι εύκολος ο υπολογισμός της ροής. Θα επιλέξουμε ως τέτοια επιφάνεια μια κυλινδρική επιφάνεια<sup>8</sup> η οποία έχει γεννήτορα της παράπλευρης επιφάνειάς της μια ευθεία παράλληλη στον άξονα  $z$ , διατομή  $S$ , και έχοντας ύψος  $H > d$  είναι συμμετρικά τοποθετημένη γύρω από το επίπεδο  $z = 0$ , έτσι ώστε να αποκόπτεi ένα ολόκληρο κομμάτι του στρώματος εκτεινόμενο από το  $-d/2$  έως το  $+d/2$ . Η επιλογή της κυλινδρικής επιφάνειας εξασφαλίζει ότι η ροή στην παράπλευρη επιφάνεια θα είναι μηδενική αφού οποιαδήποτε στοιχειώδης επιφάνεια επί της παράπλευρης επιφάνειας θα παριστάνεται με ένα διάνυσμα επί του επιπέδου  $x - y$  ενώ η ένταση του πεδίου έχει την κατεύθυνση του  $\hat{\mathbf{z}}$ . Συνεπώς στη ροή συνεισφέρουν μόνο οι βάσεις της επιφάνειας στις θέσεις  $z = H/2$  και  $z = -H/2$ . Θα έχουμε λοιπόν

$$g(H/2)S - g(-H/2)S = -4\pi G \int_V \rho(z)dV = -4\pi GS \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz. \quad (29)$$

Το  $-$  πρόσημο στο δεύτερο ολοκλήρωμα οφείλεται στο ότι η κάτω βάση έχει διανυσματική κατεύθυνση προς τα κάτω (προς την  $-\hat{\mathbf{z}}$  κατεύθυνση). Καταλήξαμε στην ακόλουθη πληροφορία όσον αφορά στο πεδίο:

$$g(H/2) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz. \quad (30)$$

<sup>8</sup> Η κυλινδρική επιφάνεια δεν είναι ανάγκη να έχει κυκλική διατομή· θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε διατομή.

Αν υψώσουμε την άνω επιφάνεια κατά  $\Delta z$  χωρίς να μετακινήσουμε την κάτω επιφάνεια η αντίστοιχη εφαρμογή του νόμου του Gauss θα γίνει

$$g(H/2 + \Delta z) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z) dz, \quad (31)$$

Δηλαδή η τιμή του  $g$  είναι ίδια σε οποιοδήποτε ύψος πάνω από το ανώτερο άκρο του στρώματος. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για το εξωτερικό του στρώματος στο κάτω μέρος αυτού (αφού δεν υπάρχει κάποια ιδιαιτερότητα του πάνω σε σχέση με το κάτω). Επομένως εκτός του στρώματος η τιμή της είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(z > d/2) &= -\hat{\mathbf{z}} 2\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z) dz, \\ \mathbf{g}(z < -d/2) &= +\hat{\mathbf{z}} 2\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z) dz \end{aligned} \quad (32)$$

Το αποτέλεσμα είναι άκρως ενδιαφέρον και ως ένα βαθμό απρόσμενο. Το πεδίο έχει σταθερή τιμή εκτός του στρώματος. Είτε βρισκόμαστε 1 χιλιοστό εκτός του στρώματος, είτε ένα χιλιόμετρο μακριά η ένταση είναι ίδια! Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κλίμακα μήκους στη συγκεκριμένη αυτή κατανομή μάζας. Πράγματι οι φυσικές ποσότητες πυκνότητα (που έχει διαστάσεις  $[M \cdot L^{-3}]$ ) και η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας (που έχει διαστάσεις  $[M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}]$ ) δεν μπορούν να συνδεθούν με ένα κατάλληλο συνδυασμό για να φτιάξουν ένα μέγεθος με διαστάσεις μήκους.<sup>9</sup>

Παράλληλα η μη εξάρτηση της έντασης από την απόσταση μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής: Μια στοιχειώδης μάζα του στρώματος, όπως αυτή φαίνεται από ένα συγκεκριμένο σημείο A εκτός του στρώματος που βρίσκεται πάνω στην κάθετη στο στρώμα ευθεία AB η οποία διέρχεται από ένα δοσμένο σημείο B εντός του στρώματος είναι ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης που τη χωρίζει από το εν λόγω σημείο A ( $dm \propto dS = r^2 d\Omega$ ). Επομένως η συνεισφορά στη βαρυτική ένταση από αυτή τη μάζα, λόγω του νόμου αντιστρόφου τετραγώνου, καθίσταται ανεξάρτητη της απόστασης αυτής και άρα και της απόστασης του σημείου A από το στρώμα.

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλεται η ένταση εντός του στρώματος. Αν κατεβάσουμε κι άλλο την ανώτερη βάση του κυλίνδρου, έτσι ώστε αυτή να βυθιστεί κάτω από το άνω πέρασ του στρώματος σε ύψος  $z = z_0$  θα έχουμε

$$g(-d/2 < z_0 < d/2) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz. \quad (33)$$

<sup>9</sup>Το επιχείρημα αυτό είναι καθαρό αν το στρώμα είναι απειροστού πάχους όπου δεν εμφανίζεται κάποιο μήκος, σε αντίθεση με έναν σφαιρικό φλοιό όπου κυριαρχεί η ακτίνα της σφαίρας ως κλίμακα μήκους. Στην περίπτωση, βέβαια, του στρώματος με πάχος όπου παρουσιάζεται μεταβολή της πυκνότητας εντός του, το επιχείρημα αυτό δεν είναι τόσο ξεκάθαρο, αφού θα μπορούσε κάποιος να επικαλεστεί ότι υπάρχουν κλίμακες μήκους σχετιζόμενες με τις μεταβολές της πυκνότητας κατά μήκος του  $z$ .

Γνωρίζοντας τώρα την τιμή του  $g$  στο  $-H/2$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή στο  $z_0$ :

$$\begin{aligned}
 g(z_0) &= -4\pi G \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz + 2\pi G \int_{-d/2}^{d/2} \rho(z) dz \\
 &= 2\pi G \left( \int_{-d/2}^{d/2} \rho(z) dz - 2 \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz \right) \\
 &= 2\pi G \left( - \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz + \int_{z_0}^{d/2} \rho(z) dz \right). \tag{34}
 \end{aligned}$$

όπου  $-d/2 < z_0 < d/2$ .

Τέλος ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το στρώμα ύλης είναι εξαιρετικά λεπτό (πάχους  $\epsilon$ ) και με σταθερή πυκνότητα. Η ένταση έχει την εξής μορφή τότε

$$\mathbf{g}(z) = \hat{\mathbf{z}} 2\pi G \rho \epsilon \begin{cases} -1, & \text{αν } z > \epsilon/2 \\ 2z/\epsilon, & \text{αν } -\epsilon/2 \leq z < \epsilon/2 \\ +1, & \text{αν } z \leq -\epsilon/2. \end{cases}$$

Αν συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με εκείνο της σχέσης (27) θα επιβεβαιώσετε ότι όταν κανείς διασχίσει ένα πολύ λεπτό φύλλο ύλης εμφανίζεται μια ασυνέχεια (στο όριο που το φύλλο έχει απειροστό πάχος) της έντασης μεγέθους

$$\Delta g = 4\pi G \sigma, \tag{35}$$

όπου  $\sigma$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας στο φύλλο. Το  $\sigma$  είναι το  $\rho\epsilon$  για την (35) και  $M/(4\pi R^2)$  για την (27). Σκεφθείτε γιατί στη σφαίρα πολύ κοντά στην επιφάνειά της η συμπεριφορά του πεδίου είναι σαν αυτή του άπειρου επιπέδου. Αυτό εξηγεί γιατί το αποτέλεσμα αυτό είναι γενικό και ισχύει για κάθε επιφανειακή κατανομή ύλης.

Προσπαθήστε μόνοι σας να υπολογίσετε το βαρυτικό πεδίο από μια κυλινδρική κατανομή ύλης η πυκνότητα της οποίας μεταβάλλεται με την απόσταση  $\rho$  από κάποιο άξονα και εκτείνεται μέχρι μια ακτίνα  $R$ . Με κατάλληλη χρήση κυλινδρικών επιφανειών Gauss, ομοαξονικών της κατανομής ύλης, και με επιχειρήματα κυλινδρικής συμμετρίας σχετικά με το πεδίο μπορείτε να βρείτε τι μορφή έχει το πεδίο σε ολόκληρο το χώρο.

## 4 Δυναμικό εντός και εκτός μιας ομογενούς σφαίρας

Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινήσαμε να εκτελούμε υπολογισμούς σχετικά με το βαρυτικό πεδίο μιας κατανομής μάζας καταφεύγοντας στην έννοια του δυναμικού, η οποία –σε αντίθεση με την ένταση– είναι βαθμωτό μέγεθος και επομένως ο χειρισμός της είναι ευκολότερος. Τώρα που καταλήξαμε στο νόμο του Gauss, που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε άμεσα την ένταση σε

πολύ συμμετρικές κατανομές όπως στην περίπτωση μιας ομογενούς σφαίρας, θα επιστρέψουμε στον υπολογισμό του δυναμικού που θα μας χρειαστεί στο επόμενο εδάφιο.

Καταλήξαμε στο ότι η ένταση της βαρύτητας σε μια ομογενή σφαίρα (βλ. σχέση (26) αν θέσουμε  $R_1 = 0$  και  $R_2 = R$ .) έχει τη μορφή

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}} G \begin{cases} \frac{Mr}{R^3}, & \text{αν } r < R \\ \frac{M}{r^2}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases}$$

Το πεδίο αυτό θα πρέπει να προκύπτει από ένα δυναμικό τέτοιο ώστε

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi. \quad (36)$$

Προφανώς το δυναμικό θα πρέπει να είναι συνάρτηση αποκλειστικά του  $r$  έτσι ώστε το πεδίο να προκύψει ακτινικό. Επομένως

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (37)$$

Ξεκινώντας από το κέντρο της σφαίρας και ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση προς τα έξω βρίσκουμε

$$\Phi(r) = \Phi(0) - \int_0^r dr' \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{g}(r') = \Phi(0) + \frac{GM}{R} \times \begin{cases} \frac{r^2}{2R^2}, & \text{αν } r < R \\ \frac{3}{2} - \frac{R}{r}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases} \quad (38)$$

Προσέξτε ότι χρειάστηκε να προσθέσουμε τη σταθερά  $\Phi(0)$  ως σταθερά ολοκλήρωσης προκειμένου να δώσουμε μια ορισμένη τιμή σε κάποιο καθορισμένο σημείο της επιλογής μας. Η τιμή του  $\Phi(0)$  δεν έχει φυσικό ενδιαφέρον, αφού δεν επηρεάζει την ένταση του πεδίου όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 4· απλώς καθορίζει το σημείο στο οποίο μηδενίζεται το δυναμικό. Αν επιμένουμε να μηδενίζεται το δυναμικό σε άπειρη απόσταση (όπως κάναμε στα προηγούμενα εδάφια) θα πρέπει να είναι  $\Phi(0) = -(3GM)/(2R)$ . Στην περίπτωση αυτή το δυναμικό θα είναι

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{GM}{2R} \left( -3 + \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{αν } r < R \\ -\frac{GM}{r}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases} \quad (39)$$

Όπως είναι φυσικό η μορφή του δυναμικού στο εξωτερικό της σφαίρας είναι το ίδιο με εκείνο μιας σημειακής μάζας, αφού τα πεδία είναι ταυτόσημα σε αυτή την περιοχή του χώρου. Στο δε εσωτερικό της σφαίρας αξίζει να προσέξει κανείς την τετραγωνική εξάρτηση του δυναμικού από την ακτίνα  $r$ . Η εξάρτηση αυτή είναι χαρακτηριστική ενός γραμμικού ταλαντωτή (βλ. δυναμική ενέργεια ελατηρίου) και είναι αυτή που οδηγεί στο ιδιόμορφο αποτέλεσμα της γραμμικής εξάρτησης της έντασης (και άρα της βαρυτικής δύναμης) από την ακτίνα: ένα σωματίδιο κινούμενο

στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας αποκλειστικά εξαιτίας της βαρυτικής έλξης θα εκτελούσε την κίνηση ενός ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή μια έλλειψη κεντραρισμένη στο κέντρο της σφαίρας.<sup>10</sup>

Στη συνέχεια θα ξαναυπολογίσουμε το δυναμικό στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας αθροίζοντας τα δυναμικά εξαιτίας κάθε σφαιρικού φλοιού (όπως κάναμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου) αντί να χρησιμοποιήσουμε τη συσχέτιση έντασης-δυναμικού. Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό ενός σφαιρικού φλοιού μάζας  $dM$  είναι  $-G dM/r$  εκτός του φλοιού και  $-G dM/R$  σταθ εντός του φλοιού ( $R$  είναι η ακτίνα του φλοιού). Έτσι στο μεν εξωτερικό ολόκληρης της σφαίρας θα είναι το άθροισμα των δυναμικών στο εξωτερικό όλων των φλοιών δηλαδή  $-GM/r$  (για  $r > R$ , όπου  $R$  η ακτίνα της σφαίρας). Στο εσωτερικό όμως θα είναι άθροισμα των δυναμικών εξαιτίας των φλοιών που βρίσκονται πιο μέσα από το σημείο που μας ενδιαφέρει και αυτό των φλοιών που βρίσκονται πιο έξω από το εν λόγω σημείο. Για τους μεν πρώτους μας ενδιαφέρει η έκφραση για το δυναμικό στο εξωτερικό των φλοιών, ενώ για τους δεύτερους η έκφραση για το εσωτερικό. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{GM_{\text{εσ}}}{r} - \int_0^r \frac{GdM(r')}{r'} \\ &= -\frac{GM(r^3/R^3)}{r} - \int_r^R \frac{GM}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4\pi r'^2 dr'}{r'} \\ &= -\frac{GMr^2}{R^3} - \frac{3GM}{R^3} \frac{R^2 - r^2}{2} \\ &= -\frac{GM}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right).\end{aligned}\tag{40}$$

## 5 Δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου

Μια κατανομή ύλης στο χώρο περικλείει σίγουρα ενέργεια, αφού προκειμένου να σχηματιστεί αυτή η κατανομή—αν έδρασε μονάχα η βαρυτική αλληλεπίδραση—οι αρχικά απομονωμένες στο άπειρο μάζες απέκτησαν κινητική ενέργεια. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την ενέργεια των αρχικά μη αλληλεπιδρώντων (λόγω άπειρης απόστασης) μαζών ως μηδενική, όταν πλησιάσουν στη συνέχεια οι μάζες σε πεπερασμένη απόσταση, η δυναμική τους ενέργεια θα είναι αρνητική, **προκειμένου η συνολική ενέργεια να μείνει σταθερή**.

Η έννοια του δυναμικού που στα προηγούμενα εδάφια χρησιμοποιήθηκε περισσότερο ως ένα βοηθητικό μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου, θα αποκτήσει τώρα περισσότερο φυσικό περιεχόμενο. Η σχέση (5) εμφανίζει στο δεξί μέλος το έργο της βαρυτικής δύναμης (ανά μονάδα μάζας και με αρνητικό πρόσημο) καθώς η μάζα  $\mu$  μετακινείται από τη θέση  $\mathbf{r}_0$  στη θέση  $\mathbf{r}$ . Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι το βαρυτικό δυναμικό είναι μια

<sup>10</sup> Προφανώς με την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες κίνησης θα είναι τέτοιες ώστε το σωματίδιο να μην εξέρχεται καθόλου από τη σφαιρική μάζα. Σε αντίθετη περίπτωση, η τροχιά ενόσω το σωματίδιο κινείται εντός της σφαίρας θα διαγράψει τόξο μιας τέτοιας ελλειπτικής τροχιάς.

βαθμωτή συνάρτηση η διαφορά του οποίου μεταξύ δύο σημείων του χώρου μετρά το έργο ανά μονάδα μάζας που καταναλώνει η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια μάζα καθώς η μάζα μετακινείται μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Προσέξτε όμως το αρνητικό πρόσημο:

$$\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2) = -\frac{W_{1 \rightarrow 2}^{\text{βαρ}}}{\mu} \quad (41)$$

Επομένως όταν υπάρχουν δύο μάζες<sup>11</sup> και αλλάζουμε τη μεταξύ τους απόσταση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μια κινείται στο βαρυτικό πεδίο της άλλης και η μεταξύ τους δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται κατά το έργο που χρειάζεται να ασκήσουμε εμείς για να τις μετακινήσουμε από μια αρχική θέση σε μια τελική θέση. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αρχικά η  $m_1$  βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_{10}$  ενώ η  $m_2$  στη θέση  $\mathbf{r}_{20}$ . Προκειμένου να τις μετακινήσουμε στις νέες θέσεις  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  ακολουθούμε την εξής τακτική. Σε πρώτη φάση μετακινούμε και τις δύο μαζί χωρίς να αλλάζουμε τη σχετική τους θέση μέχρις ότου η πρώτη καταλήξει στη νέα της θέση. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό πρέπει προφανώς να ασκούμε πάνω τους κατάλληλες δυνάμεις ώστε να αντισταθμίσουμε τη μεταξύ τους βαρυτική έλξη, δηλαδή θα πρέπει στην κάθε μάζα να ασκούμε δύναμη ίση και αντίθετη με τη βαρυτική έλξη. Το συνολικό έργο λοιπόν των δυνάμεων αυτών θα ισούται με μηδέν αφού οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες και μετακινούν και τις δύο κατά την ίδια διαδρομή· από το  $\mathbf{r}_{10}$  στο  $\mathbf{r}_1$  την #1 και από το  $\mathbf{r}_{20}$  στο  $\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}$  την #2. Στη συνέχεια θα ακινητοποιήσουμε την #1 και θα αρχίσουμε να μετακινούμε την #2 μέχρι να φτάσει στη θέση  $\mathbf{r}_2$ . Αφού κρατάμε την #1 ακίνητη ασκώντας κατάλληλη δύναμη κάθε φορά (για να υπερνικήσουμε τη βαρυτική έλξη της #2 πάνω της) δεν ασκούμε κάποιο έργο σε αυτή. Όμως καθώς αλλάζουμε τη θέση της #2 ως προς την #1 καταναλώνουμε εν γένει κάποιο έργο. Το έργο αυτό είναι το αντίθετο του έργου<sup>12</sup> που ασκεί η βαρυτική δύναμη μεταξύ των δύο μαζών όταν η δεύτερη μεταβαίνει από τη θέση  $\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}$  στην  $\mathbf{r}_2$ . Με άλλα λόγια η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών στην τελική θέση (σε σχέση με την αρχική) είναι

$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = W_F = -W_{\text{βαρ}} = m_2 [\Phi_1(\mathbf{r}_2) - \Phi_1(\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10})], \quad (42)$$

όπου  $\Phi_1$  είναι το δυναμικό που οφείλεται στην πηγή  $m_1$  η οποία βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_1$ . Με άλλα λόγια

$$\begin{aligned} \Delta U &= m_2 \left[ -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_1|} \right] \\ &= -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}|}. \end{aligned} \quad (43)$$

Αν αρχικά τα σώματα βρίσκονταν σε άπειρη απόσταση  $|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}| \rightarrow \infty$  η δυναμική ενέργεια

<sup>11</sup>Θα υποθέσουμε ότι οι μάζες στις οποίες αναφερόμαστε είναι σημειακές. Όταν αργότερα θα αναφερθούμε σε μάζες με πεπερασμένες διαστάσεις θα το επισημάνουμε.

<sup>12</sup>Αφού η δύναμη που ασκούμε σε αυτήν είναι ακριβώς ίση και αντίθετη με τη βαρυτική έλξη προκειμένου να γίνεται η μετακίνηση αργά χωρίς να προσφέρεται κάποια ταχύτητα στην  $m_2$ .



των δύο μαζών σε απόσταση  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  θα είναι λοιπόν

$$U_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (44)$$

Η αρνητική (όπως αναμέναμε) δυναμική αυτή ενέργεια είναι η ενέργεια της #2, της #1, ή τίποτε από τα δύο. Στη λογική του παραπάνω υπολογισμού είναι η ενέργεια της #2 ως προς την #1. Το ίδιο όμως θα παίρναμε αν υπολογίζαμε τη #1 στο βαρυτικό πεδίο της #2. Συνεπώς είναι μάλλον άκομψο να αναφέρεται ως το ένα ή το άλλο αφού κάθε φορά φαίνεται να παίζει διαφορετικό ρόλο η μία ή η άλλη. Πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του ζεύγους των δύο μαζών. Η ενέργεια δεν ανήκει στη μία ή στην άλλη μάζα αλλά στο ίδιο το βαρυτικό πεδίο που σχηματίζεται από τις δύο.

Πως θα γίνει ο παραπάνω υπολογισμός αν οι μάζες είναι περισσότερες από δύο; Η απάντηση είναι απλή· ο σχηματισμός τριών μαζών μπορεί να ξεκινήσει ως σχηματισμός δύο μαζών και στη συνέχεια να προστεθεί η τρίτη μάζα κινούμενη στο πεδίο των άλλων δύο. Η επαλληλία των πεδίων εγγυάται ότι το δυναμικό στη θέση της τρίτης μάζας μπορεί να κατασκευαστεί με πρόσθεση του δυναμικού σε αυτή τη θέση εξαιτίας της πρώτης συν το δυναμικό εξαιτίας της δεύτερης. Δηλαδή

$$\begin{aligned} U_{123} &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + m_3 [\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)] \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}. \end{aligned} \quad (45)$$

Όμοια μπορούμε να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια  $N$  σημειακών μαζών:

$$\begin{aligned} U_{12\dots N} &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \end{aligned} \quad (46)$$

Ο υπολογισμός αφορά τη δυναμική ενέργεια όλων των δυνατών ζευγαριών από μάζες. Η δεύτερη έκφραση οφείλει το  $1/2$  στο ότι το διπλό άθροισμα λαμβάνει δύο φορές όλα τα ζευγάρια (π.χ. μια φορά μέσω του ζεύγους  $i = 3, j = 5$  και άλλη μια φορά μέσω του ζεύγους  $i = 5, j = 3$ ).

Πώς θα υπολογίσουμε όμως τη δυναμική ενέργεια μιας συνεχούς κατανομής μαζών; Για παράδειγμα αυτήν μιας ομογενούς σφαίρας; Είναι απλό. Τα αθροίσματα στην παραπάνω έκφραση θα αντικατασταθούν με ολοκληρώματα (η δεύτερη μάλιστα έκφραση είναι προτιμότερη αφού και τα δύο αθροίσματα αναφέρονται σε όλες τις μάζες):

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{Gdm_1 dm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{G\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (47)$$

Ο υπολογισμός του διπλού αυτού ολοκληρώματος πιθανώς να είναι από τεχνικής άποψης δύσκολος, αλλά θα μπορούσε να γίνει πιο απλός αν προσέξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$- \int_V \frac{G\rho(\mathbf{r}_2)dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (48)$$

δεν είναι τίποτε άλλο παρά το δυναμικό στη θέση  $\mathbf{r}_1$  εξαιτίας ολόκληρης της κατανομής της μάζας στον όγκο  $V$ . Δηλαδή

$$U = \frac{1}{2} \int_V \Phi(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_1)dV_1. \quad (49)$$

Το νέο αυτό ολοκλήρωμα είναι σαφώς απλούστερο αφού έχουμε μάθει πως να υπολογίζουμε το δυναμικό  $\Phi$  εξαιτίας κάποιας κατανομής. Για παράδειγμα η δυναμική ενέργεια συσσώρευσης μάζας σε μια ομογενή σφαιρική κατανομή θα είναι

$$\begin{aligned} U_{\text{σφ}} &= -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{GM}{R} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{3}{2} \right] \rho 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{1}{4} \frac{GM}{R} \frac{4\pi M}{(4/3)\pi R^3} \int_0^R [3 - (r/R)^2] r^2 dr \\ &= -\frac{1}{4} \frac{GM}{R} \frac{4\pi M}{(4/3)\pi R^3} (R^3 - R^3/5) \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \end{aligned} \quad (50)$$

Αυτή είναι η ενέργεια που δαπάνησε το βαρυτικό πεδίο για να σχηματιστεί μια ομογενής μπάλα, όπως για παράδειγμα ένας αστέρας (αν αγνοήσουμε τις διαφορές πυκνότητας με την ακτίνα). Αντίστοιχα, το αντίθετο αυτής της ενέργειας (δίχως το “-” πρόσημο) είναι η ενέργεια που χρειάζεται μια έκρηξη για να διαλύσει αυτή τη μπάλα (αστέρα) στα εξών συνετέθη.

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να δώσει απάντηση σε ένα μαθηματικό-γεωμετρικό πρόβλημα, ο άμεσος υπολογισμός του οποίου θα είχε υπολογιστικές δυσκολίες. Συγκεκριμένα στο ερώτημα ποια είναι η μέση τιμή των αντιστρόφων αποστάσεων δυο οιαδήποτε σημείων εντός μιας σφαίρας, θα έγραφε κανείς τυπικά το διπλό ολοκλήρωμα

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\rangle = \frac{1}{V_R^2} \int_{V_R} \int_{V_R} \frac{dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (51)$$

το οποίο με μια απλή αντιπαραβολή φαίνεται ότι είναι το ίδιο με αυτό της σχέσης (47) εκτός από κάποιες σταθερές. Έτσι

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\rangle = -\frac{2U_{\text{σφ}}}{G\rho^2 V_R^2} = -\frac{2U_{\text{σφ}}}{GM^2} = \frac{6}{5R}. \quad (52)$$

Να λοιπόν που μπορούμε να βρίσκουμε απάντηση σε καθαρά μαθηματικά προβλήματα καταφεύγοντας σε φυσικές έννοιες!

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο θα επαναλάβουμε τον υπολογισμό της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας που περικλείεται σε μια ομογενή σφαίρα ακολουθώντας έναν πιο στοιχειώδη υπολογισμό. Υπό μια έννοια η έκφραση (49) είναι κάπως φορμαλιστική και καθόλου άμεση· περιέχει αυτόν τον όρο  $1/2$  η προέλευση του οποίου οφείλεται στον διπλό υπολογισμό του εκάστοτε ζευγαριού στοιχειωδών μαζών κατά την άθροιση-ολοκλήρωση. Επίσης περιέχει το δυναμικό της ολοκληρωμένης σφαίρας ενώ εμείς γνωρίζουμε πως η δυναμική ενέργεια μετριέται κατά τη σταδιακή συσσώρευση μάζας από το άπειρο προς την τελική κατανομή της ύλης. Έτσι στην παράγραφο που ακολουθεί θα υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια πιο φυσικά καθώς “κτίζεται” η σφαιρική κατανομή μάζας εκ του μηδενός.

Θα υποθέσουμε ότι συγκεντρώνουμε κάθε φορά τη μάζα –φέρνοντάς την από το άπειρο– σε μια ομογενή σφαίρα η οποία σταδιακά μεγαλώνει. Έτσι η δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα (ολοκλήρωση) των ενεργειών που χρειάζεται η εκάστοτε καινούργια στοιχειώδης μάζα  $dM$  να κινηθεί στο βαρυτικό πεδίο της ήδη συγκεντρωμένης σε σφαίρα ακτίνας  $r$  μάζας  $M(r)$ . Έτσι

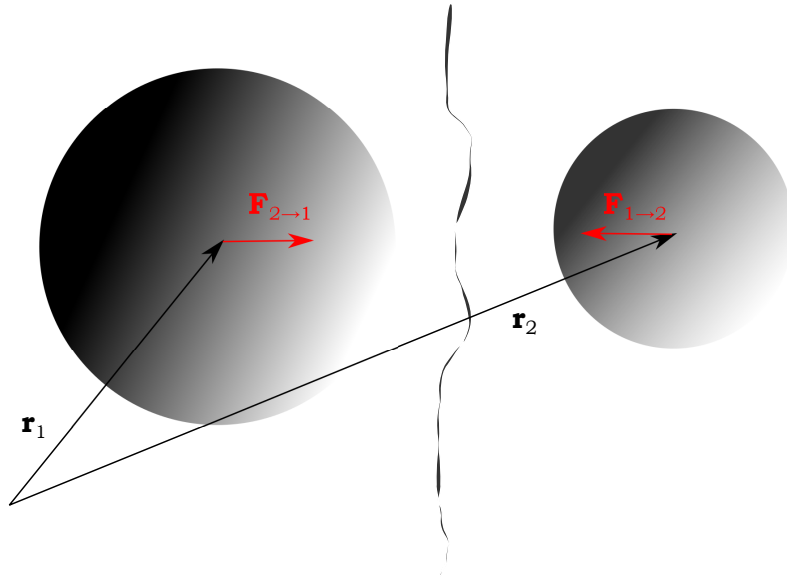
$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^R \Phi_{M(r)} dM \\
 &= - \int_0^R \frac{GM(r)}{r} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr \\
 &= - \int_0^R \frac{GM}{r} \frac{r^3}{R^3} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr \\
 &= - \frac{3GM}{R^6} \int_0^R r^4 dr \\
 &= - \frac{3GM}{5R}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Το αποτέλεσμα προφανώς είναι το ίδιο με αυτό που βρήκαμε παραπάνω αλλά ο υπολογισμός ήταν σίγουρα πιο φυσικός. Αξίζει απλώς να σημειώσουμε ότι η εκάστοτε νέα μάζα  $dM$  έρχεται και διασκορπίζεται πάνω στην ισοδυναμική επιφάνεια της σφαίρας ομογενώς, οπότε μπορούμε να λογαριάσουμε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια σαν να επρόκειτο για μια στοιχειώδη μάζα η οποία τοποθετείται σε ένα σημείο με δοσμένη τιμή δυναμικού.

## 6 Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρών - πλανητών

Τα ουράνια σώματα Ήλιος - αστέρες - πλανήτες είναι κατά μεγάλη προσέγγιση σφαίρες πεπερασμένων διαστάσεων και όχι σημειακές μάζες. Ποια είναι η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο τέτοιων μαζών  $M_1, M_2$ ; Μέχρι τώρα έχουμε μάθει ποιο είναι το βαρυτικό πεδίο από μια σφαιρική κατανομή μάζας, αλλά το πεδίο μιας τέτοιας μάζας είναι διαφορετικό από σημείο σε σημείο. Πως θα υπολογίσουμε λοιπόν τη συνολική δύναμη του πεδίου σε μια άλλη σφαίρα; Κανονικά

θα έπρεπε να προσθέσουμε διανυσματικά τις δυνάμεις του ανομοιογενούς αυτού πεδίου εξαιτίας της πρώτης σφαίρας σε κάθε στοιχειώδη μάζα της δεύτερης σφαίρας. Κάτι τέτοιο, αν και εφικτό, θα ήταν αρκετά πολύπλοκο. Αντ' αυτού μπορούμε να καταφύγουμε στον 3ο νόμο του Νεύτωνα.



**Σχήμα 4:** Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρών.

Αν τοποθετούσαμε ένα διαχωριστικό πέτασμα μεταξύ των δύο σφαιρών και βρισκόμασταν από τη μια πλευρά αυτού δεν θα μπορούσαμε να καταλάβουμε αν το βαρυτικό πεδίο εξαιτίας της απέναντι πηγής ( $M_1$ ) είναι αποτέλεσμα μιας σφαίρας<sup>13</sup> ή μιας σημειακής μάζας ίσης με  $M_1$  τοποθετημένης στο κέντρο αυτής. Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι πρόκειται για μια σημειακή μάζα  $M_1$  τοποθετημένη στο κέντρο της σφαίρας  $\mathbf{r}_1$ . Αυτή η υποτιθέμενη σημειακή μάζα ασκεί –όπως είπαμε και παραπάνω– διαφορετική δύναμη στις στοιχειώδεις μάζες της σφαίρας 2 που βρίσκεται στη δική μας πλευρά. Ποια είναι η συνισταμένη όλων αυτών; Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν δεν προσθέσουμε όλες αυτές τις διαφορετικές στοιχειώδεις δυνάμεις· γνωρίζουμε όμως ότι η δύναμη αυτή είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκεί η δική μας σφαίρα (η 2) στη σημειακή μάζα  $M_1$ . Η δύναμη της αντίδρασης αυτή όμως είναι η βαρυτική δύναμη μιας σφαιρικής κατανομής σε μια σημειακή μάζα, η οποία έχουμε αποδείξει ότι είναι

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (54)$$

<sup>13</sup>Μάλιστα δεν θα μπορούσαμε ούτε καν να καταλάβουμε πώς είναι κατανομημένη η μάζα της στο εσωτερικό της αφού η πυκνότητα ύλης θα μπορούσε να είναι μια τυχαία  $\rho(r)$ .

όπου  $\mathbf{r}_2$  είναι η θέση του κέντρου της  $M_2$ . Συνεπώς η ζητούμενη δύναμη (της 1 στη 2) είναι

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (55)$$

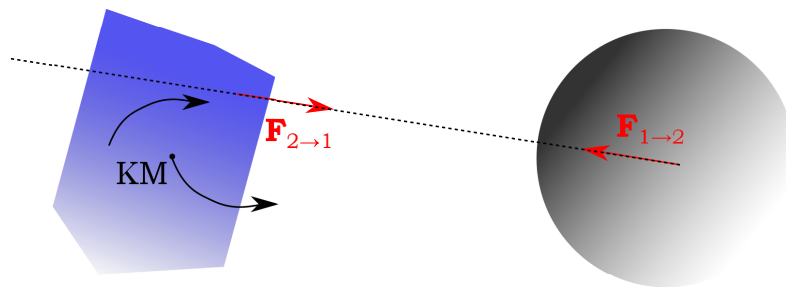
Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μελετάμε τις βαρυτικές έλξεις μεταξύ του Ήλιου και των πλανητών σαν να επρόκειτο για σημειακές μάζες και όχι για σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Αν και μοιάζει τετριμένο το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου τέτοιο. Οφείλεται αποκλειστικά στη σφαιρική συμμετρία. Έτσι αν οι πλανήτες ήταν ...κύβοι δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις βασιζόμενοι στον παραπάνω τύπο. Μάλιστα μια απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία του Ήλιου θεωρήθηκε αρχικά υπεύθυνη για την περίεργη τροχιά του Ερμή, η εξήγηση της οποίας τελικά αποτέλεσε τον πρώτο μεγάλο θρίαμβο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Δυστυχώς η συμβατική θεώρηση περί παραμορφωμένου Ήλιου ήθελε τον Ήλιο υπερβολικά παραμορφωμένο.

## 7 Παλιρροϊκές δυνάμεις

Προτού ασχοληθούμε με τις παλιρροϊκές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο εκτεταμένων βαρυτικών σωμάτων θα προσπαθήσουμε να βρούμε αν η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο μαζών θα μπορούσε να θέσει σε ιδιοπεριστροφή τα δύο σώματα. Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνησή μας με την περίπτωση των δύο σφαιρών. Όπως είδαμε η βαρυτική έλξη τους είναι ίδια με αυτήν δύο σημειακών μαζών. Που εφαρμόζεται όμως η δύναμη αυτή όταν έχουμε δύο σφαίρες. Μα προφανώς στο κέντρο τους. Είναι αλήθεια προφανές; Αν η δύναμη αυτή δεν ασκούσαν στο κέντρο της μιας σφαίρας αλλά εκτός αυτού θα μπορούσε να ασκήσει ροπή στη σφαίρα και αυτή να τεθεί σε περιστροφή. Η συμμετρία όμως του προβλήματος δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο. Αν κάποιος επιχειρηματολογούσε ότι ναι μεν το σημείο εφαρμογής της βαρυτικής δύναμης δεν θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός της ευθείας που συνδέει τα δύο κέντρα για λόγους συμμετρίας, αλλά θα μπορούσε να βρίσκεται επί της ευθείας αυτής, εφαρμοζόμενη όμως σε κάποιο άλλο σημείο εκτός του κέντρου, δεν θα είχε και πολύ νόημα. Μια τέτοια “μετατοπισμένη” δύναμη δεν θα ασκούσε ροπή και θα μετακινούσε το σημείο εφαρμογής με τον ίδιο τρόπο ωσάν να ασκούσαν στο κέντρο της σφαίρας (το κέντρο μάζας). Ποιος ο λόγος λοιπόν για μια τέτοια άχρηστη θεώρηση;

Τι θα συνέβαινε όμως αν χαλούσαμε τη συμμετρία ας πούμε του ενός αντικειμένου; Ας φανταστούμε τη βαρυτική επίδραση μιας μάζας αλλόκοτου σχήματος σε μια σφαίρα. Η απάντηση είναι τώρα πιο ενδιαφέρουσα: η έλξη δεν συμβαίνει κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δύο κέντρα μάζας (και δεν περιγράφεται βέβαια από την έκφραση (55)). Το ένα σώμα είναι μια σφαίρα. Έτσι κάθε στοιχειώδης μάζα του αλλόκοτου σώματος ασκεί στη σφαίρα μια δύναμη ακριβώς στο κέντρο αυτής (αμοιβαία έλξη σημειακής μάζας και σφαίρας). Αν αθροιστούν οι συμβολές από κάθε κομμάτι της αλλόκοτης μάζας θα εμφανιστεί και πάλι μια δύναμη που θα διέρχεται από το κέντρο αυτής. Η αντίδραση αυτής της δύναμης (η βαρυτική έλξη της σφαίρας στο αλλόκοτο σώμα) θα είναι μια δύναμη που θα διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, όχι

όμως αναγκαστικά και από το κέντρο μάζας του περιέργου σώματος. Η ροπή του ζεύγους των δύο βαρυτικών έλξεων είναι μηδενική αφού αυτές βρίσκονται στον ίδιο φορέα (ευθεία). Επομένως το περιέργο σώμα μπορεί να αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του αλλά αυτή η στροφορμή θα εξισορροπηθεί από τη στροφορμή που θα αποκτήσει το σώμα αυτό κινούμενο σε τροχιά γύρω από το κοινό κέντρο μάζας των δύο σωμάτων. Η σφαίρα πάντως δεν θα αποκτήσει ιδιοστροφορμή. Έτσι ενώ δύο σφαίρες αν ξεκινήσουν ακίνητες θα πέσουν η μία πάνω στην άλλη, τα δύο παραπάνω σώματα δεν θα οδηγηθούν κατ' ανάγκη σε μετωπική σύγκρουση. Προφανώς, αν και τα δύο σώματα είναι ασύμμετρα οι κινήσεις θα είναι ακόμη πιο περίεργες· και τα δύο εν γένει σώματα θα αποκτήσουν ιδιοπεριστροφή.



**Σχήμα 5:** Βαρυτική έλξη μεταξύ σφαίρας και άλλου σώματος.

Όπως είδατε με το προηγούμενο παράδειγμα, η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων δεν είναι πάντα τόσο απλή, όπως συμβαίνει μεταξύ δύο σφαιρών οπότε μπορεί κανείς να αγνοήσει τις διαστάσεις τους και να τις αντιμετωπίζει ως σημειακές μάζες. Στη γενική περίπτωση, όχι μόνο το μέτρο της δύναμης δεν είναι απλώς ένας νόμος αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των κέντρων μάζας, αλλά ούτε καν διέρχεται η βαρυτική δύναμη από το κέντρο μάζας του εκάστοτε σώματος. Υπάρχει όμως και άλλο ένα στοιχείο το οποίο αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν τα σώματα δεν εκλαμβάνονται ως απολύτως στερεά σώματα. Πρόκειται για το αποτέλεσμα της ανομοιογένειας του βαρυτικού πεδίου της πηγής σε ολόκληρη την έκταση του σώματος που δέχεται τη βαρυτική δύναμη. Πιο συγκεκριμένα, άλλα μέρη του σώματος αισθάνονται πιο έντονο πεδίο και άλλα ασθενέστερο. Αν το σώμα που δέχεται λοιπόν τη βαρυτική δύναμη παρουσιάζει κάποια ελαστικότητα το σώμα θα παραμορφωθεί και έτσι θα αλλάξει και η συνολική ελκτική δύναμη.

Ας δούμε πιο αναλυτικά με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα τα χαρακτηριστικά αυτού του παλιρροϊκού, όπως ονομάζεται, φαινομένου. Θα υποθέσουμε ότι δύο σφαιρικές μάζες  $M_1$ ,  $M_2$  με τα κέντρα τους σε απόσταση  $R$  έλκονται. Σε πρώτη φάση μας ενδιαφέρει η ανομοιογένεια των πεδίων στην έκταση του εκάστοτε σώματος και όχι οι επιπτώσεις αυτής, οπότε θα θεωρήσουμε ότι τα σώματα παραμένουν σφαιρικά. Θα περιγράψουμε λοιπόν το βαρυτικό πεδίο του σώματος 1 ως το πεδίο στο κέντρο του 2, συν τη μεταβολή του πεδίου αυτού καθώς αλλάζουμε τη θέση γύρω από το κέντρο του 2:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \Delta \mathbf{g} \quad (56)$$

όπου  $\mathbf{g}_0$  είναι το βαρυτικό πεδίο εξαιτίας του 1 στο κέντρο του 2 (στη θέση  $\mathbf{R}$  από το κέντρο του 1)

$$\mathbf{g}_0 = -G \frac{M_1}{|\mathbf{R}|^3} \mathbf{R} \quad (57)$$

και  $\Delta \mathbf{g}$  η διαφορά του

$$\mathbf{g} = -G \frac{M_1}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \quad (58)$$

στη θέση  $\mathbf{R} + \mathbf{r}$  από το κέντρο του 1, από την τιμή της έντασης του βαρυτικού πεδίου  $\mathbf{g}_0$  στο κέντρο του 2. Η επιλογή μας να “σπάσουμε” με αυτό τον τρόπο το πεδίο είναι διττή. Ο ένας λόγος είναι για να μπορούμε να περιγράψουμε τη διαφοροποίηση του πεδίου σε μικρές αποστάσεις από το κέντρο  $r \ll R$ , θεωρώντας ότι τα δύο σώματα έχουν μεν διαστάσεις, όχι όμως μεγάλες σε σχέση με την απόσταση των δύο σωμάτων (όπως συμβαίνει με τους πλανήτες και τον Ήλιο). Ο άλλος λόγος σχετίζεται με το διαχωρισμό του παλιρροϊκού φαινομένου από τη βαρύτητα ως ένα πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου. Στην πραγματικότητα, όταν εξετάζουμε δύο ουράνια σφαιρικά σώματα που κινούνται αποκλειστικά εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης, η  $\Delta \mathbf{g}$  είναι η φαινόμενη ένταση της βαρύτητας που αισθάνεται ένα σημείο που κινείται στο επιταχυνόμενο σύστημα της σφαίρας 2, αφού αυτή επιταχύνεται με  $\mathbf{g}_0$  και επομένως  $-\mathbf{g}_0$  είναι η ένταση που θα αισθάνεται κάθε σημείο της σφαίρας 2 λόγω της μη αδρανιακότητας αυτής (επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς).

Ας αναπτύξουμε λοιπόν τον όρο  $|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3}$  για μικρά  $r$ .

$$\begin{aligned} |\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3} &= (R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{-3/2} \\ &= \frac{1}{R^3} [1 + (r/R)^2 + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}/R^2)]^{-3/2} \\ &\simeq \frac{1}{R^3} [1 - (3/2) [(r/R)^2 + 2(r/R) \cos \theta] + \dots] \\ &= \frac{1}{R^3} [1 - 3(r/R) \cos \theta + \mathcal{O}((r/R)^2)] \end{aligned} \quad (59)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{r}$ . Η πρότελευταία σχέση είναι απλώς το ανάπτυγμα Taylor της ακριβούς έκφρασης μέχρι 1η τάξη ως προς τη μικρή ποσότητα  $(r/R)^2 + 2(r/R) \cos \theta$  και προκειμένου να είμαστε συνεπείς ως προς την τάξη μεγέθους που κρατάμε στην τελευταία σχέση διαγράψαμε τον όρο δεύτερης τάξης ως προς  $r/R$  μιας και ο επόμενος όρος στο ανάπτυγμα Taylor που αγνοήσαμε περιέχει και αυτός όρο τάξης  $(r/R)^2$ . Ο λόγος που επιλέξαμε να προχωρήσουμε μέχρι την 1η τάξη δεν μπορεί να δικαιολογηθεί παρά μόνο εκ των υστέρων. Με άλλα λόγια για να είμαστε σίγουροι ότι δεν χρειάζεται να προχωρήσουμε σε ακόμη μεγαλύτερη τάξη θα πρέπει να γράψουμε την τελική μορφή του ζητούμενου μεγέθους (του  $\Delta \mathbf{g}$ ) για να βεβαιωθούμε ότι το ανάπτυγμα που λαμβάνουμε μας δίνει κάτι χρήσιμο και όχι κάτι

τετριμένο και προφανές. Βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_0 &\simeq -\frac{GM_1}{R^3} [(1 - 3(r/R) \cos \theta + \dots) (\mathbf{R} + \mathbf{r}) - \mathbf{R}] \\
&= -\frac{GM_1}{R^3} \left[ \mathbf{r} - 3r \cos \theta \frac{\mathbf{R}}{R} + \mathcal{O}(r^2/R) \right] \\
&\simeq -\frac{GM_1}{R^3} r \left[ \hat{\mathbf{r}} - 3 \cos \theta \hat{\mathbf{R}} \right].
\end{aligned} \tag{60}$$

Η έκφραση αυτή δείχνει πως μεταβάλλεται αυτό το φαινόμενο βαρυτικό πεδίο με την κατεύθυνση του  $\mathbf{r}$ . Για να αποκτήσουμε πιο καθαρή μορφή του πεδίου αυτού, ας υποθέσουμε ότι η σφαίρα 2 που δέχεται τη βαρυτική έλξη της 1 έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων οπότε  $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta$ , ενώ η σφαίρα 1 έχει το κέντρο της στη θέση  $-R\hat{\mathbf{x}}$ , οπότε  $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}} = R\hat{\mathbf{x}}$ . Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\Delta \mathbf{g} \simeq \frac{GM_1 r}{R^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}). \tag{61}$$

ή σε πολικές συντεταγμένες (επιβεβαιώστε το)

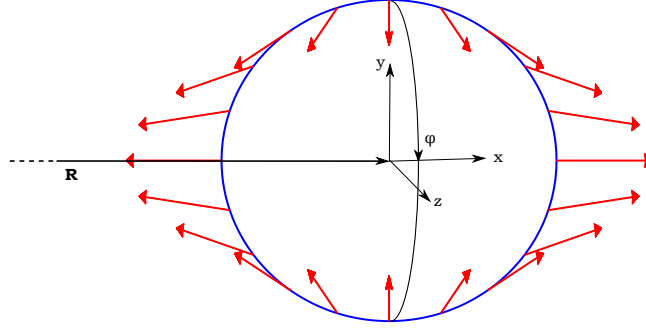
$$\Delta \mathbf{g} \simeq \frac{GM_1 r}{2R^3} \left[ -3 \sin 2\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + (1 + 3 \cos 2\theta) \hat{\mathbf{r}} \right]. \tag{62}$$

Το πεδίο αυτό είναι καθαρά ακτινικό σε γωνίες  $\theta$  πολλαπλάσια του  $\pi/2$  και επαναλαμβάνεται απράλλαχτο μετά από γωνία  $\pi$  (βλ. σχήμα 6).

Στη Γενική θεωρία της Σχετικότητας το παλιρροϊκό πεδίο είναι ουσιαστικά ο τρόπος που εκδηλώνεται η βαρύτητα, αφού το πεδίο  $\mathbf{g}_0$  ευθύνεται απλώς για την κίνηση των σωμάτων η οποία στη Σχετικότητα δεν είναι άλλη από τη γεωδαισιακή κίνηση των σωμάτων στον καμπύλο χωρόχρονο που διαμορφώνουν οι βαρυτικές πηγές. Έτσι η παλιρροϊκή δύναμη είναι αυτή που ευθύνεται για το πλησίασμα δύο καταδυτών σε ελεύθερη πτώση καθώς πλησιάζουν προς το κέντρο της Γης. Επίσης τα βαρυτικά κύματα που προβλέπονται από τη Γενική θεωρία της Σχετικότητας και παραμένουν ακόμη φευγαλέα δεν είναι τίποτε άλλο από κύματα παλιρροϊκών δυνάμεων που συμπιέζουν και τραβούν σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Τέλος το βαρυτόνιο, το θεωρητικό σωματίδιο που μεταφέρει τη βαρυτική αλληλεπίδραση (κατ' αντιστοιχία με το φωτόνιο που μεταφέρει την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση) είναι ένα στοιχειώδες σωματίδιο που θα μπορούσε να γίνει αντιληπτό ως ένας παλιρροϊκός παλμός. Το σπιν του σωματιδίου αυτού είναι 2, γεγονός το οποίο συνδέεται με την  $2\theta$  εξάρτηση του παλιρροϊκού πεδίου.

Με αφορμή την παραπάνω αναφορά στη Γενική Σχετικότητα, θα επισημάνουμε μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των μαύρων τρυπών. Επειδή η ακτίνα της τρύπας (του ορίζοντα της μαύρης τρύπας) συνδέεται γραμμικά με τη μάζα της, το κλάσμα  $M/R^3$  πάνω στον ορίζοντα είναι ανάλογο του κλάσματος  $1/M^2$ , με συνέπεια οι παλιρροϊκές δυνάμεις στις μεγάλες μαύρες τρύπες να εξασθενεί. Η αριθμητική επεξεργασία δίνει αμελητέες παλιρροϊκές δυνάμεις σε μαύρες τρύπες με μέγεθος σαν αυτή που βρίσκεται στο κέντρο του Γαλαξία μας και επομένως δεν κινδυνεύει κανείς να διαμελιστεί διασχίζοντας τον ορίζοντά της. Απλώς δεν θα μπορέσει ποτέ να μας μεταφέρει τις εμπειρίες του...





**Σχήμα 6:** Το παλιρροϊκό πεδίο στην επιφάνεια μιας σφαίρας (το αντίστοιχο τρισδιάστατο πεδίο προκύπτει με περιστροφή του παραπάνω σχήματος γύρω από την οριζόντια διάμετρο κατά  $\phi = \pi$ ). Όπως φαίνεται στο διάγραμμα τα παλιρροϊκά φαινόμενα έχουν την τάση να επιμηκύνουν τα σώματα στην διεύθυνση που συνδέει τα δύο αλληλεπιδρώντα σώματα και να τα συμπιέζει σε όλες τις κάθετες διευθύνσεις.

Πέραν του παραμορφωτικού χαρακτήρα των παλιρροϊκών δυνάμεων που έχουν την τάση να επιμηκύνουν τα σώματα στη διεύθυνση που τα συνδέει με τη βαρυτική πηγή και να τα συμπιέζει στις κάθετες διευθύνσεις, υπάρχει και μια τάση συνολικής συμπίεσης των σωμάτων. Για να το δούμε αυτό ας ανατρέξουμε στη σχέση (60) και ας υπολογίσουμε το μέσο όρο της ακτινικής συνιστώσας του παλιρροϊκού πεδίου πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια.

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \mathbf{g}_r \rangle &= \frac{\int_{S_1} dS \, \hat{\mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{g}}{S_1} \\
 &= -\frac{GM_1 r}{R^3} \frac{2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi r^2} \\
 &= -\frac{2}{3} \frac{GM_1 r}{R^3}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Μπορείτε να δείξετε ότι για δύο σφαιρικά σώματα παρόμοιας πυκνότητας η συμπίεση του καθενός λόγω των παλιρροϊκών φαινομένων είναι εξαιρετικά μικρότερη από τη συμπίεση λόγω της ιδιοβαρύτητας του κάθε σώματος, εφόσον  $R \gg \max\{R_1, R_2\}$ .

Ας μελετήσουμε τώρα την επίδραση των παλιρροϊκών δυνάμεων στη Γη εξαιτίας του Ήλιου και της Σελήνης, των δύο σωμάτων που αναμένεται<sup>14</sup> να έχουν ισχυρή παλιρροϊκή δράση στη

<sup>14</sup>Ο πρώτος εξαιτίας της μεγάλης του μάζας (σε σχέση με τους πλανήτες) και η δεύτερη εξαιτίας της εγγύτητάς της στη Γη.

Γη. Από τη σχέση (60) (και τις αντίστοιχες σε διαφορετικές διανυσματικές βάσεις) είναι φανερό ότι το μέγεθος των παλιρροϊκών πεδίων σε ένα δεδομένο σώμα (δοσμένο  $r$ ) εξαρτάται από το λόγο  $GM/R^3$  της βαρυτικής πηγής. Εξαιτίας του Ήλιου ο λόγος αυτός στη Γη είναι  $0.40 \times 10^{-13} s^{-2}$  και εξαιτίας της Σελήνης  $0.73 \times 10^{-13} s^{-2}$  έως  $1.08 \times 10^{-13} s^{-2}$  (ανάλογα με τη θέση της Σελήνης). Η Σελήνη έχει λοιπόν περίπου 2.5 φορές πιο σημαντική παλιρροϊκή επίδραση στη Γη. Το αποτέλεσμα της επίδρασης αυτής είναι να παραμορφώνεται η επιφάνεια των υδάτων της Γης σε συμφωνία με τη μορφή του παλιρροϊκού πεδίου. Η τάση του πεδίου αυτού, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι να ανυψωθεί η επιφάνεια των ωκεανών στην κατεύθυνση Γης-Σελήνης (ή Γης-Ήλιου) και να χαμηλώσει επί του μέγιστου κύκλου του κάθετου στην προηγούμενη διεύθυνση. Μάλιστα, καθώς η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες, αναμένεται αυτό το περιοδικό “φούσκωμα” και “ξεφούσκωμα” των υδάτων να συμβαίνει σε έναν τόπο με περίοδο περίπου<sup>15</sup> 12 ώρες. Η αλήθεια είναι ότι λόγω της ταυτόχρονης ύπαρξης των παλιρροϊκών πεδίων της Σελήνης και του Ήλιου το συνολικό αποτέλεσμα και η περιοδικότητα αυτών είναι κάπως πιο πολύπλοκη. Επιπλέον λόγω της αδράνειας (μάζας) των υδάτων να ανταποκριθούν άμεσα στο παλιρροϊκό αυτό βαρυτικό πεδίο και της τριβής τους με τον πυθμένα των ωκεανών υπάρχει μια καθυστέρηση στην εκδήλωση των φαινομένων και το μέγιστο φούσκωμα δεν εκδηλώνεται στον τόπο που βρίσκεται κάθε στιγμή κάτω από τη Σελήνη (ή στον αντίποδα αυτού), αλλά σε σημεία που θα βρεθούν κάποιες ώρες αργότερα “κάτω” από τη Σελήνη. Ο Laplace ήταν ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά τη δυναμική αυτή απόκριση των παλιρροϊών στη Γη και κατέληξε σε αναλυτικές εκφράσεις περιγραφής τους.

Το συνολικό αποτέλεσμα των παλιρροϊών είναι μια συνεχής ροπή λόγω των τριβών στον πυθμένα των ωκεανών με φορά αντίθετη με αυτή της περιστροφής της Γης που επιβραδύνει αργά αλλά σταθερά τον ρυθμό περιστροφής της κατά περίπου 2 ms ανά αιώνα. Ταυτόχρονα η Σελήνη επιταχύνει το ρυθμό περιφοράς της γύρω από τη Γη, προκειμένου να διατηρηθεί η συνολική στροφορμή του απομονωμένου συστήματος Γη-Σελήνη, με αποτέλεσμα η Σελήνη να απομακρύνεται από τη Γη κατά 4 περίπου εκατοστά ανά έτος.

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε ποιοτικά τη μορφή του παλιρροϊκού πεδίου αλλά δεν εξαγάγαμε καμία ποσοτική πληροφορία σχετικά με το ύψος των παλιρροϊών. Ο λόγος είναι ότι η επιτάχυνση του παλιρροϊκού πεδίου ακόμη και αν συγκριθεί με την επιτάχυνση της ιδιοβαρύτητας του πλανήτη Γη, δεν μπορεί να οδηγήσει σε κάποιο ποσοτικό στοιχείο σχετικά με την ανύψωση των υδάτων. Για να αντλήσουμε μια τέτοια πληροφορία θα πρέπει να αναζητήσουμε το δυναμικό από το σύνθετο πεδίο της βαρύτητας του πλανήτη και αυτό της Σελήνης<sup>16</sup>

<sup>15</sup>Η περιοδικότητα αντιστοιχεί σε κάπως μεγαλύτερο χρόνο από 12 ώρες αφού στο διάστημα που χρειάζεται ο εν λόγω τόπος για να ξαναβρεθεί στη διεύθυνση Γης-Σελήνης, αφού εν τω μεταξύ η Σελήνη έχει μετατοπιστεί στον ουρανό κατά  $2\pi \times 12h / (28 \cdot 24h)$ . Θα πρέπει βέβαια να τονίσουμε ότι λόγω της μορφής του παλιρροϊκού πεδίου, οι διευθύνσεις που παραμένουν πάντα κάθετοι στην ευθεία που συνδέει τη Γη με τη Σελήνη παρά την περιστροφή της Γης (περιοχές κοντά στους πόλους) υπόκεινται συνεχώς σε χαμήλωμα των υδάτων· μόνο περιοχές κοντά στον Ισημερινό που κάθε έξι ώρες βρίσκονται είτε στην ευθεία Γης-Σελήνης είτε κάθετα σε αυτή τα ύδατα ανεβοκατεβαίνουν.

<sup>16</sup>Στο σημείο αυτό θα αγνοήσουμε το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, προκειμένου να απλοποιήσουμε τα πράγματα και να μπορέσουμε να εξαγάγουμε κάποια χρήσιμη πληροφορία, ώστε να τη συγκρίνουμε με τα ρεαλιστικά στοιχεία.

Υπολογίζοντας το σχήμα της επιφάνειας σταθερού δυναμικού, θα μπορέσουμε να μετρήσουμε το θεωρητικά αναμενόμενο ύψος των παλιρροιών.

Επιστρέφοντας στη σχέση (61) το δυναμικό εξαιτίας των παλιρροικών δυνάμεων θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε

$$-\nabla V_{\text{παλιρ}} = \Delta \mathbf{g} = \frac{GM_1}{R^3}(2x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}), \quad (64)$$

όπου  $M_1$  θα είναι η μάζα της Σελήνης και  $R$  η απόσταση Γης-Σελήνης, ενώ  $x, y$  θα είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στην επιφάνεια της Γης σε μια διατομή αυτής που διέρχεται από την ευθεία Γης-Σελήνης. Το αντίστοιχο δυναμικό λόγω ιδιοβαρύτητας της Γης (θεωρώντας αυτήν σε ικανοποιητικό βαθμό σφαιρική) θα είναι

$$-\nabla V_{\text{ιδιοβ}} = \mathbf{g}_0 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^3}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}), \quad (65)$$

όπου  $M_\Gamma$  η μάζα της Γης και  $R_\Gamma$  η περίπου σταθερή ακτίνα της. Αντιστρέφοντας τις σχέσεις αυτές ώστε να λάβουμε τη μορφή του εκάστοτε δυναμικού βρίσκουμε

$$V = V_{\text{ιδιοβ}} + V_{\text{παλιρ}} = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GM_1}{2R^3}(2x^2 - y^2) \quad (66)$$

και αν ζητήσουμε το σχήμα μιας ισοδυναμικής επιφάνειας κοντά στην επιφάνεια της Γης θα έχουμε

$$C = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma(\theta)} + \frac{GM_1}{2R^3}R_\Gamma(\theta)(2\cos^2\theta - \sin^2\theta). \quad (67)$$

Για σύγκριση με την ποσότητα  $GM_1/R^3$  που υπολογίσαμε παραπάνω, η ποσότητα  $GM_\Gamma/R_\Gamma^3$  ισούται με  $g_0/R_\Gamma = 1.54 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ . Επομένως αναμένουμε πολύ μικρές διαφορές του  $R_\Gamma(\theta)$  στον πρώτο όρο της (67) να εξουδετερώνουν τις γωνιακές διαφοροποιήσεις του δεύτερου μικρού όρου, ενώ οι διαφοροποιήσεις του  $R_\Gamma(\theta)$  στο δεύτερο όρο θα μπορούν να παραληφθούν όντας μικρές μεταβολές του μικρού όρου. Έτσι θα αντικαταστήσουμε το  $R_\Gamma(\theta)$  του πρώτου όρου με  $R_{\Gamma 0} + \delta r(\theta)$  ενώ την αντίστοιχη συνάρτηση στο δεύτερο όρο μπορούμε να τη γράψουμε απλά ως  $R_{\Gamma 0}$ . Με τις αντικαταστάσεις αυτές θα έχουμε

$$C = \frac{GM_\Gamma^2}{R_{\Gamma 0}} \left(1 - \frac{\delta r(\theta)}{R_{\Gamma 0}}\right) + \frac{GM_1}{2R^3}R_{\Gamma 0}^2(\theta)(2\cos^2\theta - \sin^2\theta). \quad (68)$$

και λύνοντας ως προς  $\delta r(\theta)$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta r(\theta) &= \frac{GM_1/R^3}{GM_\Gamma/R_{\Gamma 0}^3}R_{\Gamma 0} \left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) \\ &= \frac{0.73 - 1.08}{1.54} \times 10^{-7} \times (6.37 \times 10^6 \text{ m}) \left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) \\ &= (30 - 45) \times \left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) \text{ cm} \end{aligned} \quad (69)$$

Αυτή είναι η τάξη μεγέθους των παλίρροιών που περιμένουμε εξαιτίας της Σελήνης (και αντίστοιχα 2.5 φορές μικρότερο ύψος εξαιτίας του Ήλιου). Αν κοιτάξει όμως κανείς στο διαδίκτυο βρίσκει ύψη παλίρροιών σε κάποια μέρη του πλανήτη που ανέρχονται σε παραπάνω από 10 μέτρα! Γιατί βγήκαν οι αναλυτικές μας εκτιμήσεις τόσο λανθασμένες; Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι η Γη περιστρέφεται επομένως οι παλίρροιες που σε μια ακίνητη Γη θα έφταναν το πολύ σε ύψος μερικές δεκάδες εκατοστά, στην πραγματική Γη συμπεριφέρονται ως ένας αρμονικός ταλαντωτής με διέγερση και απόσβεση. Ανάλογα με τη μορφολογία του πυθμένα του ωκεανού μπορεί να έχει άλλη ιδιοσυχνότητα έτσι ώστε να προκαλείται με την περιοδική παλίρροϊκή διέγερση είτε ενισχυμένο πλάτος είτε εξασθενημένο. Έτσι σε κάποιους τόπους τα συντονιστικά φαινόμενα μπορεί να ανεβάσουν το ύψος της παλίρροιας μερικές δεκάδες φορές ψηλότερα από το αναμενόμενο.

## 8 Πολυπολικές ροπές

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, ενώ η ιδιοβαρύτητα ενός ουράνιου σώματος σε ρευστή μορφή τείνει να του δώσει σφαιρικό σχήμα, οι παλίρροϊκές επιδράσεις από γειτονικά σώματα τείνουν να το παραμορφώσουν και τελικά το παραμορφώνουν (παλίρροιες στους ωκεανούς). Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως αλλάζει η βαρυτική δύναμη ενός σώματος, όταν αυτό παραμορφωθεί. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι το σώμα έχει τυχαίο σχήμα και κατανομή μάζας ώστε να εκτελέσουμε έναν πρώτο θεωρητικό υπολογισμό του δυναμικού στο εξωτερικό του σώματος. Αργότερα θα υπολογίσουμε πρακτικά το δυναμικό αυτό για ένα ελαφρά παραμορφωμένο σφαιρικό πλανήτη και θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να μετρήσουμε την επίδραση της περιστροφής στο σχήμα του.

Το δυναμικό στη θέση  $\mathbf{r}$  εκτός μιας τυχαίας κατανομής μάζας που εκτείνεται στον όγκο  $V$  και χαρακτηρίζεται από τοπική πυκνότητα  $\rho(\mathbf{r}')$  στην εκάστοτε θέση  $\mathbf{r}'$  είναι

$$V(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{G dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int_V \frac{G \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (70)$$

Αναπτύσσοντας τον παρονομαστή κατά Taylor, θεωρώντας ότι το εύρος τιμών του  $|\mathbf{r}'|$  είναι πολύ μικρό σε σχέση με το  $|\mathbf{r}|$ , δηλαδή η απόσταση που θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι αρκετά μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις του βαρυτικού σώματος, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{-1/2} \\ &= r^{-1} (1 + [-2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2])^{-1/2} \\ &\simeq r^{-1} (1 + (-1/2)[...] + (3/8)[...]^2 + \dots). \end{aligned} \quad (71)$$

Στην παραπάνω παράσταση  $\theta'$  είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}'$ , ενώ η συντομογραφία  $[...]$  αναπαριστά την ποσότητα  $[2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2]$  ως προς την οποία σχηματίσαμε το ανάπτυγμα Taylor μέχρι 2ης τάξης θεωρώντας την μικρή σε σχέση με τη μονάδα. Ο όρος αυτός περιέχει όμως ποσότητες διαφορετικής τάξης ως προς την πραγματικά

μικρή ποσότητα  $r'/r$  και επομένως χρειάζεται μια αναδιάταξη των όρων του αναπτύγματος Taylor για να έχουμε μια πιο συνεπή κατάταξη των όρων ίδιου μεγέθους. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &\simeq r^{-1} \left( 1 + (-1/2)[-2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2] + (3/8)[[-2(r'/r) \cos \theta' + \dots]^2 + \dots \right) \\ &= r^{-1} \left( 1 + (r'/r) \cos \theta' + \frac{1}{2}(r'/r)^2(3 \cos^2 \theta' - 1) + \mathcal{O}((r'/r)^3) \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Επομένως το δυναμικό στη θέση  $\mathbf{r}$  θα μπορεί να γραφεί ως το ακόλουθο ανάπτυγμα

$$V(\mathbf{r}) = -G \left[ \frac{\int_V dm'}{r} + \frac{\int_V r' \cos \theta' dm'}{r^2} + \frac{\int_V r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dm'}{2r^3} + \dots \right]. \quad (73)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι του αναπτύγματος έχουν ολοένα και μεγαλύτερη δύναμη του  $r$  στον παρονομαστή. Επιπλέον στον πρώτο όρο έχουμε  $\int_V dm' = M$  δηλαδή αναπαριστά τη συνολική μάζα του βαρυντικού σώματος. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γίνει ταυτοτικά μηδέν, αν διαλέξουμε την αρχή των αξόνων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας του βαρυντικού σώματος. Ο λόγος είναι ο ακόλουθος: η θέση του κέντρου μάζας για ένα σώμα αν η αρχή των αξόνων βρίσκεται σε αυθαίρετη θέση είναι

$$\mathbf{R}_{\text{KM}} = \frac{\int_V dm' \mathbf{r}'}{M}. \quad (74)$$

Συνεπώς για αυθαίρετη θέση της αρχής των αξόνων είναι

$$\int_V r' \cos \theta' dm' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left( \int_V \mathbf{r}' dm' \right) = M \mathbf{R}_{\text{KM}} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (75)$$

Αν η αρχή των αξόνων και το κέντρο μάζας συμπίπτουν τότε  $\mathbf{R}_{\text{KM}} = 0$  και το ολοκλήρωμα του 2ου όρου στο ανάπτυγμα του δυναμικού μηδενίζεται. Ο διπολικός λοιπόν αυτός όρος (όπως ονομάζεται) εξαφανίζεται με τη συνετή αυτή επιλογή αρχής των αξόνων.<sup>17</sup> Ο επόμενος όρος

$$\int_V r'^2 \left[ \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta' - 1) \right] dm' \quad (76)$$

<sup>17</sup>Το αντίστοιχο ανάπτυγμα για το ηλεκτρικό δυναμικό δεν διαθέτει τη δυνατότητα να μπορεί οπωσδήποτε να μηδενιστεί σε κατάλληλο σύστημα αξόνων. Ο λόγος είναι η ύπαρξη δύο προσήμων ηλεκτρικών φορτίων. Το γεγονός ότι οι μάζες είναι μόνο θετικές έχει τεράστιες συνέπειες που διαφοροποιούν τη βαρύτητα από τον ηλεκτρισμό. Το διπολικό πεδίο στη βαρύτητα είναι εκ ταυτότητας μηδέν ή έστω γραμμικά μεταβαλλόμενο με το χρόνο λόγω διατήρησης της ορμής ενός απομονωμένου συστήματος, επομένως αν μπορούσε να υπάρχει το αντίστοιχο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στη βαρύτητα αυτή δεν θα μπορούσε να προέλθει από ταλαντώσεις διπόλου -όπως συμβαίνει με τις κεραίες και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αυτός είναι ένας επιπλέον λόγος -εκτός από τη σχετική αδυναμία της ίδιας της βαρύτητας- που καθιστά τα βαρυτικά κύματα (που προβλέπει η γενική θεωρία της σχετικότητας) τόσο αδύναμα ώστε να παραμένουν ακόμη φευγαλέα για τους υπάρχοντες δέκτες βαρυτικών κυμάτων.

είναι αυτό που ονομάζουμε τετραπολική ροπή, ή απλά τετράπολο,  $Q(\hat{\mathbf{r}})$  του σώματος στην κατεύθυνση του  $\hat{\mathbf{r}}$ . Στην πραγματικότητα η τετραπολική ροπή είναι ένας τανυστής με καρτεσιανές συντεταγμένες

$$Q_{ij} = 3 \int_V dm' r'_i r'_j \quad (77)$$

οπότε

$$Q(\hat{\mathbf{r}}) = \int_V dm' \left[ \frac{3}{2} (r' \cos \theta')^2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} Q_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i (\hat{\mathbf{r}})_j - \frac{1}{6} Q_{ii}, \quad (78)$$

όπου  $(\hat{\mathbf{r}})_i$  είναι η  $i$ -οστή συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{\mathbf{r}}$ . Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί στην

$$Q(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i (\hat{\mathbf{r}})_j \quad (79)$$

αν εισάγει κανείς το άιχνο μέρος του τανυστή  $Q_{ij}$

$$\mathbb{Q}_{ij} \equiv Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Q_{kk} \quad (80)$$

δηλαδή είναι η τετραπολική ροπή, από τους διαγώνιους όρους της οποίας έχει αφαιρεθεί το  $1/3$  του ίχνους της ώστε ο τανυστής να μείνει με μηδενικό συνολικά ίχνος.

Με τους παραπάνω ορισμούς που ποσοτικοποιούν με τον τρόπο που είναι κατανεμημένη η μάζα το δυναμικό μακριά από ένα απομονωμένο σώμα είναι

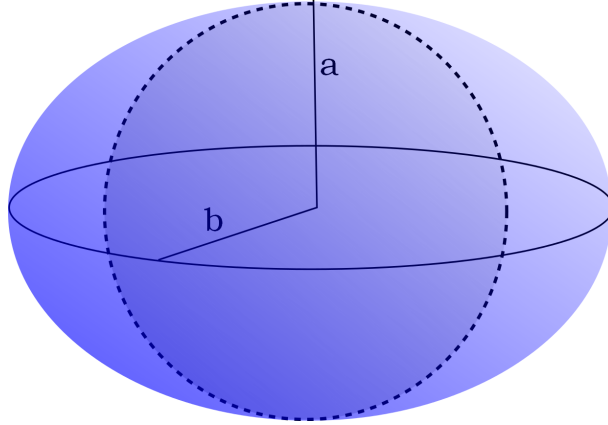
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G \mathbb{Q}_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i (\hat{\mathbf{r}})_j}{2r^3} + \dots \quad (81)$$

Για μια σφαιρική κατανομή μάζας ο τετραπολικός όρος (όπως και όλοι οι επόμενοι όροι - οκταπολικός, ο δεκαεξαπολικός κλπ) μηδενίζονται, όπως γνωρίζουμε από την απλούστατη μορφή του δυναμικού μιας σφαιρικής κατανομής. Όταν η κατανομή δεν παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, οι όροι αυτοί είναι εν γένει μη μηδενικοί.

Θα υποθέσουμε τώρα ότι το σώμα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι ένα ελαφρώς πεπλατυσμένο σώμα σαν τη Γη η επιφάνεια του οποίου περιγράφεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (82)$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το βαρυτικό δυναμικό ενός τέτοιου σώματος. Όπως είδαμε παραπάνω θα χρειαστούμε την τετραπολική ροπή  $\mathbb{Q}_{ij}$  ενός τέτοιου σώματος προκειμένου να υπολογίσουμε το δυναμικό με ακρίβεια μέχρι τάξης  $(r'/r)^2$  όπου  $r'$  αντιπροσωπεύει ένα μέτρο των τυπικών διαστάσεων του σώματος (για τη Γη θα μπορούσε να είναι η ισημερινή ακτίνα



**Σχήμα 7:** Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Η διάμετρος κατά τον κατακόρυφο άξονα είναι  $2b$  ενώ κάθε οριζόντιο επίπεδο αποκόπτει από το ελλειψοειδές έναν κυκλικό δίσκο. Η διάμετρος του μέγιστου αυτού κύκλου (ισημερινού) είναι  $2a$ .

της) ενώ το  $r$  αντιστοιχεί στην απόσταση από το κέντρο του ελλειψοειδούς που θέλουμε να μετρήσουμε το δυναμικό. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = 3 \int_V dm' \begin{pmatrix} x'^2 & x'y' & x'z' \\ y'x' & y'^2 & y'z' \\ z'x' & z'y' & z'^2 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα όλοι οι μη διαγώνιοι όροι είναι 0 εξαιτίας της συμμετρίας που παρουσιάζει το σώμα σε ανακλάσεις σε όλα τα επίπεδα που διέρχονται από δύο καρτεσιανούς άξονες. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\int_V dm' x' z'$$

είναι 0 αφού για κάθε στοιχειώδη μάζα  $dm'$  η οποία βρίσκεται στη θέση  $(x', y', z')$  υπάρχει άλλη μια, κατοπτρική της ως προς το επίπεδο  $x' = 0$ , στη θέση  $(-x', y', z')$  η συνεισφορά της οποίας είναι αντίθετη της πρώτης στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Οι δε διαγώνιοι όροι μοιάζουν με τα ολοκληρώματα που δίνουν τη ροπή αδράνειας των σωμάτων. Βασιζόμενοι σε αυτή την ομοιότητα, θα υπολογίσουμε τους 3 διαγώνιους όρους  $Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz}$ . Λόγω συμμετρίας του σώματος γύρω από τον άξονα  $z$  (αξονική συμμετρία) θα πρέπει  $Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy})$ . Το άθροισμα όμως  $Q_{xx} + Q_{yy}$  δεν είναι άλλο από το τριπλάσιο της ροπής αδράνειας του σώματος γύρω από τον άξονα  $z$ , αφού

$$I_z = \int_V dm' \rho'^2_{\perp} = \int_V dm' (x'^2 + y'^2).$$

Η ροπή αδράνειας όμως αυτή θα πρέπει να είναι η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ακτίνας  $b$ , αφού οι  $z$ -διαστάσεις στην κατανομή της μάζας δεν παίζουν κανένα ρόλο στη ροπή αδράνειας

γύρω από τον άξονα  $z$  (θυμηθείτε ότι η ροπή αδράνειας ενός ψηλού κυλίνδρου και ενός λεπτού δίσκου είναι  $MR^2/2$ ). Συνεπώς

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{5} Mb^2 = \frac{3}{5} Mb^2. \quad (84)$$

Όσο για την  $Q_{zz}$  θα είναι

$$Q_{zz} = 3 \int_V dm' z'^2 = \frac{a^2}{b^2} 3 \int_V dm' \rho'^2_{\perp} = \frac{3}{5} Ma^2. \quad (85)$$

αφού λόγω συμπίεσης του ελλειψοειδούς κατά παράγοντα  $a/b$  στον κατακόρυφο άξονα, οι  $z'$  διαστάσεις είναι μειωμένες κατά τον ίδιο παράγοντα σε σχέση με το  $\rho'_{\perp}$ .

Με αφαίρεση του ίχνους του πίνακα των τετραπολικών ροπών βρίσκουμε

$$\mathbb{Q}_{ij} = \frac{M}{5} (b^2 - a^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (86)$$

και το δυναμικό παίρνει την εξής μορφή

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{2r^3} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \dots \quad (87)$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων στην τελευταία έκφραση αποτελεί αναλυτική γραφή του όρου  $\mathbb{Q}_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i(\hat{\mathbf{r}})_j$  στη σχέση (81) με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{r}}$  γραμμένο στις συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r^3} (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + \dots \\ V(\mathbf{r}) &= -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) + \dots \end{aligned} \quad (88)$$

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να αναζητήσουμε το σχήμα της ισοδυναμικής επιφάνειας ενός ρευστού πλανήτη όταν αυτός περιστρέφεται με χαμηλή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  ζητώντας τη μορφή της ελλειψοειδούς επιφάνειας που ικανοποιεί τη σχέση

$$V_{\text{επερ}} = V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \omega^2 \rho_{\perp}^2 = \text{σταθ} \quad (89)$$

όπου ο επιπλέον όρος δυναμικού αντιπροσωπεύει το φυγοκεντρικό δυναμικό (βλ. κεντρικές δυνάμεις) το οποίο αισθάνεται η εκάστοτε στοιχειώδης μάζα ρευστού που συμπεριστρέφεται μαζί με όλο τον πλανήτη. Η απόσταση  $\rho_{\perp} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  είναι η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής  $z$ .

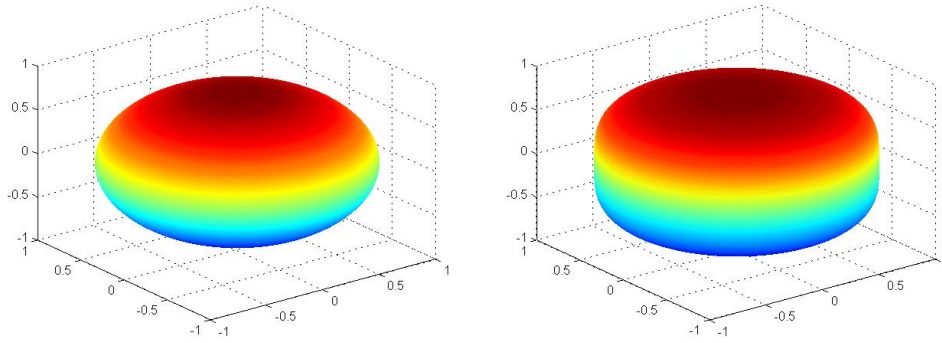
**Κριτική στη μέθοδο:** Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του σχήματος ας ελέγξουμε πιο σχολαστικά τις προσεγγίσεις που κάναμε.



1. Αφότου γράψαμε το πολυπολικό –όπως ονομάζεται– ανάπτυγμα του δυναμικού για μια τυχαία κατανομή μάζας (σχέση (81)) προχωρήσαμε στον υπολογισμό της τετραπολικής ροπής ενός ελλειψοειδούς με μοναδικό οδηγό ότι το σχήμα της περιστρεφόμενης Γης **μοιάζει** με ένα εκ περιστροφής ελλειψοειδές. Θα μπορούσε κανείς να επιχειρηματολογήσει ότι άπειρα σχήματα έχουν την ιδιότητα να είναι αξονικά συμμετρικά<sup>18</sup> και επομένως δεν είναι αναγκαστικό ένας περιστρεφόμενος πλανήτης να αποκτήσει ελλειψοειδές σχήμα· θα μπορούσε για παράδειγμα η επιφάνειά του να έχει τη μορφή

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^{2n}}{a^{2n}} = 1 \quad (90)$$

το οποίο έχει και πάλι τη μορφή μιας πεπλατυσμένης σφαίρας με αξονική συμμετρία,<sup>19</sup> αλλά δεν είναι ελλειψοειδές και επομένως δεν χαρακτηρίζεται από την τετραπολική ροπή που υπολογίσαμε παραπάνω. Για παράδειγμα για  $n \rightarrow \infty$  το σώμα παίρνει τη μορφή κυλίνδρου (βλ. σχήμα 8)



**Σχήμα 8:** Δύο πεπλατυσμένα σφαιροειδή τύπου (90). Το αριστερό είναι το κλασικό ελλειψοειδές με  $n = 1$  σαν το (82), ενώ το δεξιό είναι το πιο “τετραγωνισμένο” με  $n = 2$ . Και τα δύο χαρακτηρίζονται από τον ίδιο λόγο πολικής προς ισημερινή ακτίνα (εδώ ο λόγος αυτός είναι 0.8).

**Απάντηση:** Αν το σώμα δεν είναι ελλειψοειδές στην περίπτωση χαμηλού ρυθμού περιστροφής τότε στο όριο που η περιστροφή τείνει στο μηδέν δεν ανακτούμε το σφαιρικό σχήμα. Ακόμη και αν κάποιος υποθέσει ότι το σφαιροειδές είναι του τύπου (90), με  $n = 1 + f(\omega)$  με  $f(\omega) \rightarrow 0$  καθώς το  $\omega \rightarrow 0$ , περιγράφει το σώμα αυτόματα αυτό σημαίνει ότι σε πολύ χαμηλούς ρυθμούς περιστροφής το σχήμα γίνεται κατά προσέγγιση

<sup>18</sup>Αυτό το στοιχείο δεν μπορούμε να το θυσιάσουμε στις υποθέσεις μας εφόσον υπάρχει ισοτροπία στο ισημερινό επίπεδο και δεν θα μπορούσε να διαφοροποιηθεί ο άξονας  $x$  από τον άξονα  $y$ . Αυτή η ευλογοφανής υπόθεση παύει να είναι σωστή σε μεγάλους ρυθμούς περιστροφής, όπου τότε ευνοείται ενεργειακά ένας τριαξονικός (τρεις ανισομεγέθεις άξονες) σχηματισμός (σφαιροειδή Jacobi) και ακόμη πιο περίεργοι αχλαδοειδείς σχηματισμοί (σφαιροειδή Poincaré σε ακόμη πιο γρήγορες περιστροφές).

<sup>19</sup>Η τετραγωνική μορφή των δύο πρώτων όρων, έτσι ώστε να εμφανιστεί ο συνδυασμός  $x^2 + y^2$ , είναι σημαντική ώστε να διαθέτει το σώμα αξονική συμμετρία.

ελλειψοειδές και η ανάλυση που κάναμε παρπάνω για το δυναμικό ελλειψοειδούς έχει νόημα.

2. Η ανάλυση του δυναμικού έγινε βάσει της υπόθεσης ότι το δυναμικό υπολογίζεται πολύ μακριά από το βαρυτικό σώμα έτσι ώστε  $r'/r \ll 1$ . Πώς λοιπόν μπορούμε να εμπιστευόμαστε μια τέτοια προσεγγιστική σχέση για ένα σημείο επάνω στην επιφάνεια του σώματος όπου  $r'/r = 1$ ;

**Απάντηση:** Η αλήθεια είναι ότι για να εμπιστευτεί κανείς την προσεγγιστική αυτή έκφραση για το δυναμικό θα πρέπει να βεβαιωθεί ότι οι επόμενοι όροι της σειράς είναι πολύ μικρότεροι από τον τετραπολικό όρο που έχουμε κρατήσει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι σημαντικά μικρότεροι εκτός αν η πλάτυνση είναι εξαιρετικά μικρή ( $a \simeq b$ ). Για παράδειγμα μπορεί κανείς να δείξει ότι ο επόμενος μη μηδενικός όρος,<sup>20</sup> ο δεκαεξαπολικός όρος ο οποίος συνεισφέρει στο δυναμικό ως  $r^{-5}$  είναι ανάλογος της ποσότητας  $(b^2 - a^2)^2$  και επομένως για  $b - a \rightarrow 0$  ο δεκαεξαπολικός όρος είναι ανώτερης τάξης από τον τετραπολικό ως προς τη μικρή ποσότητα  $(b - a)$ . Έτσι να μεν ο δεκαεξαπολικός όρος περιέχει κλάσματα της μορφής  $b^4/r^5$ , ή  $a^4/r^5$  ή  $b^2a^2/r^5$  που για ένα σημείο της επιφάνειας  $a \leq r \leq b$  είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τα κλάσματα  $b^2/r^3$  ή  $a^2/r^3$  των τετραπολικών όρων αλλά ο συνδυασμός των πρώτων κλασμάτων είναι πολύ μικρότερος από το συνδυασμό των δεύτερων. Συνεπώς στα όρια αργών περιστροφών που η πλάτυνση είναι πολύ μικρή οι όροι πέραν του τετραπολικού μπορούν να αγνοηθούν.

3. Ο υπολογισμός του τετραπολικού όρου ενός ελλειψοειδούς επετεύχθη επειδή θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή σε ολόκληρο τον όγκο του ρευστού. Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει· η πυκνότητα μειώνεται καθώς κινούμαστε προς τα επιφανειακά στρώματα καθώς οι πιέσεις από τα υπερκείμενα στρώματα είναι ασθενέστερες. Επομένως όλος ο υπολογισμός είναι λανθασμένος

**Απάντηση:** Όπως θα δούμε λίγο παρακάτω ο βαθμός πλάτυνσης (ο λόγος  $(b - a)/(b + a)$ ) είναι αντιστρόφως ανάλογος της πυκνότητας για ομογενή ρευστά). Επομένως αναμένουμε ο πυρήνας του ρευστού να είναι λιγότερο πεπλατυσμένος απ' ό,τι οι εξωτερικοί φλοιοί.<sup>21</sup> Η συνέπεια αυτής της τεχνικής λεπτομέρειας που συνδέεται με τη ρεαλιστικότητα του προβλήματος είναι ο αριθμητικός συντελεστής  $1/10$  που εμφανίζεται στον τετραπολικό όρο να καθίσταται ακόμη μικρότερος λόγω μη ομοιογένειας του υλικού του ρευστού. Ο λόγος που τον καθιστά μικρότερο είναι ότι ο πυρήνας όντας πιο σφαιρικός θα έχει τετραπολική συνεισφορά πιο μικρή, αφού όπως γνωρίζουμε στην περίπτωση της σφαίρας τέτοιος όρος στο δυναμικό δεν υπάρχει.

Πράγματι λοιπόν ο υπολογισμός του δυναμικού είναι λάθος αλλά θα μπορούσε ποιοτικά να διορθωθεί με έναν κατάλληλο αριθμητικό συντελεστή (μικρότερο του  $1/10$ ) σε αντι-

<sup>20</sup>Ο οκταπολικός όρος, όπως και όλοι οι  $2^{2l+1}$ -πολικοί όροι, είναι ταυτοτικά 0 καθώς το σώμα έχει κατοπτρική συμμετρία σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο.

<sup>21</sup>Οι επιφάνειες σταθερής πυκνότητας είναι ελλειψοειδή εκ περιστροφής, με ολοένα αυξανόμενη εκκεντρότητα ελλειψοειδών καθώς κινούμαστε από το κέντρο προς την επιφάνεια.

κατάσταση του  $1/10$ . Κατά τ' άλλα η ποσοτική εξάρτηση από τις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος είναι σωστή.

4. Όπως είδαμε το δυναμικό, το οποίο θα ζητήσουμε να είναι σταθερό στην επιφάνεια, είναι συνδυασμός του βαρυτικού δυναμικού του ίδιου του σώματος και του φυγοκεντρικού δυναμικού εξαιτίας της περιστροφής του. Ο τετραπολικός όρος όπως είπαμε θα είναι πολύ μικρότερος από τον μονοπολικό όρο  $-GM/r$  στα όρια της χαμηλής περιστροφής, για τον ίδιο λόγο που ο δεκαεξαπολικός είναι πολύ μικρότερος από τον τετραπολικό. Είναι λοιπόν απαραίτητο να λάβουμε υπόψη και τον τετραπολικό όρο;

**Απάντηση:** Ναι όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το αποτέλεσμα. Μια σύντομη αιτιολόγηση είναι ότι το φυγοκεντρικό δυναμικό είναι του ίδιου μεγέθους με το τετραπολικό δυναμικό. Αυτό όμως δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε προτού εκτελέσουμε τις πράξεις μέχρι τέλους, με και χωρίς τον τετραπολικό όρο. Αν δεν υπάρχουν διαφορές στο όριο των πολύ χαμηλών περιστροφών θα μπορούσαμε να είχαμε αγνοήσει το τετραπολικό δυναμικό. Όπως ίσως φαντάζεστε για να έχουμε κάνει μια τόσο εκτενή αναφορά στα πολυπολικά αναπτύγματα, ο όρος αυτός θα έχει τελικά σημαντική επίπτωση.

5. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι μολονότι το ελλειψοειδές σχήμα παρουσιάζει εξαιρετικά ομαλή μετάβαση στο σφαιρικό σχήμα καθώς ο ρυθμός περιστροφής τείνει στο 0, όταν ο ρυθμός περιστροφής παύει να είναι μηδενικός και το σώμα αρχίζει να περιστρέφεται με υψηλή γωνιακή ταχύτητα η παραμόρφωσή του θα μπορούσε να οδηγήσει σε ένα τελείως διαφορετικό σχήμα.

**Απάντηση:** Δεδομένου ότι ο υπολογισμός του δυναμικού για ένα γενικό ελλειψοειδές μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή (υπό μορφή μάλλον δύσκολων ολοκληρωμάτων) είναι ιδιαίτερα αξιοθαύμαστο ότι ο συνδυασμός αυτού του δυναμικού με το φυγοκεντρικό δυναμικό μπορούν να “κλειδώσουν” κατάλληλα ώστε να δώσουν σταθερή τιμή στο δυναμικό της επιφάνειας, συσχετίζοντας κατάλληλα την πλάτυνση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Πράγματι, το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου αναμενόμενο.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα βρούμε αυτή τη σχέση στο όριο των μικρών ρυθμών περιστροφής.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την επιφάνεια που καθιστά το ενεργό δυναμικό  $V_{\text{ενε}}$  της σχέσης (89) σταθερό. Επειδή όλοι οι όροι του δυναμικού παρουσιάζουν αξονική συμμετρία (καμία εξάρτηση από τη γωνία  $\phi$  γύρω από τον άξονα περιστροφής  $z$ ) αναζητούμε μια επιφάνεια αξονικά συμμετρική που παράγεται από μια εκ περιστροφής καμπύλη η οποία περιγράφεται από την πολική εξίσωση  $r(\theta)$ . Ψάχνουμε λοιπόν για κατάλληλη συνάρτηση  $r(\theta)$  που λύνει την εξίσωση

$$\begin{aligned} \text{σταθ} &= V(r(\theta)) - \frac{1}{2}\omega^2(r(\theta) \sin \theta)^2 \\ &= -\frac{GM}{r(\theta)} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10[r(\theta)]^3}(1 - 3\cos^2 \theta) - \frac{1}{2}\omega^2(r(\theta) \sin \theta)^2 \end{aligned} \quad (91)$$

Δεν πρέπει να αγνοούμε ότι η λύση που ψάχνουμε αφορά μικρή  $\omega$  και επομένως  $b \simeq a$ , δηλαδή λύσεις κοντά στη σφαιρική, δηλαδή

$$r(\theta) = r_0 + \delta r(\theta) \quad (92)$$

με  $|\delta r(\theta)| \ll r_0$  και  $b = r_0 + \delta r(\pi/2)$ ,  $a = r_0 + \delta r(0)$ . Δεδομένου λοιπόν ότι ο 2ος και 3ος όρος στην έκφραση του δυναμικού είναι πολύ μικροί σε σχέση με τον 1ο, μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα του  $1/r$  του 1ου όρου μέχρι σε 1η τάξη ως προς  $\delta r(\theta)$ , αλλά δεν είναι ανάγκη να κάνουμε το ίδιο και στους άλλους δύο όρους. Έτσι θα έχουμε

$$\text{σταθ} = -\frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{\delta r(\theta)}{r_0}\right) - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r_0^3} (1 - 3\cos^2 \theta) - \frac{1}{2}\omega^2 (r_0 \sin \theta)^2 \quad (93)$$

και λύνοντας ως προς  $\delta r(\theta)$  βρίσκουμε

$$\delta r(\theta) = r_0 \left[ C' + \frac{(b^2 - a^2)}{10r_0^2} (1 - 3\cos^2 \theta) + \frac{\omega^2 r_0^3}{2GM} \sin^2 \theta \right], \quad (94)$$

όπου  $C'$  είναι κάποια κατάλληλη σταθερά έτσι ώστε  $b = r_0 + \delta r(\pi/2)$  και  $a = r_0 + \delta r(0)$ . Αφαιρώντας κατά μέλη αυτές τις δύο συνθήκες βρίσκουμε

$$\frac{b - a}{r_0} = \frac{(b^2 - a^2)}{10r_0^2} (1 - (-2)) + \frac{\omega^2 r_0^3}{2GM} (1 - 0) \quad (95)$$

και θέτοντας  $r_0 = (b + a)/2$  αφού  $r_0 \simeq b \simeq a$

$$\frac{b - a}{r_0} = \frac{5}{4} \left( \frac{\omega^2 r_0^3}{GM} \right). \quad (96)$$

Καταλήγοντας στο αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι η παρουσία του τετραπολικού όρου ήταν σημαντική. Αν την αγνοούσαμε θα λαμβάναμε την ακόλουθη αρκετά διαφορετική αντίστοιχη σχέση για την πλάτυνση

$$\frac{b - a}{r_0} \Big|_{\text{τετραπ}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 r_0^3}{GM} \right). \quad (97)$$

Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη και τη μεταβολή στην πυκνότητα (βλ. σχόλιο 3 παραπάνω) ο σωστός συντελεστής πρέπει να είναι κάπως μικρότερος από το  $5/4$  της σχέσης (96).

Στην περίπτωση της Γης ο όρος πλάτυνσης είναι (όπως τον ορίσαμε παραπάνω)  $1/297.757$  ενώ το δεξί μέλος της (96) προβλέπει θεωρητικά πλάτυνση  $1/233$ . Το λάθος είναι στη σωστή κατεύθυνση που αναμένουμε εξαιτίας της διαστρωμάτωσης της πυκνότητας στο εσωτερικό της Γης.

- Η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}.$$

Η δύναμη αυτή είναι κεντρική και συντηρητική.

- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι

$$U_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια δεν είναι ενέργεια κάποιου σωματιδίου αλλά ολόκληρου του συστήματος που περιλαμβάνει τις δύο μάζες και το ίδιο το βαρυτικό πεδίο.

- Οι δυναμική ενέργεια ενός συστήματος πολλών σωματιδίων είναι

$$U_N = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

λόγω επαλληλίας των βαρυτικών δυνάμεων που μεταφράζεται σε άθροιση δυναμικών ενεργειών. Στο συνεχές όριο η παραπάνω έκφραση λαμβάνει τη μορφή

$$U = -\frac{1}{2} \iint_{V=\text{όγκος κατανομής}} \frac{G \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})$$

όπου  $\Phi(\mathbf{r})$  το δυναμικό στη θέση  $\mathbf{r}$  εξαιτίας της δεδομένης κατανομής μάζας.

- Ο νόμος του Gauss

$$\int_{S(V)} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = -4\pi G M_V$$

συνδέει το επιφανειακό ολοκλήρωμα της έντασης της βαρύτητας ενός βαρυτικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια  $S(V)$  που περιβάλλει κάποιον όγκο  $V$ , με τη μάζα  $M_V$  που περιέχεται στον όγκο αυτό. Η παρουσία μάζας εκτός αυτής της επιφάνειας δεν αλλοιώνει την παραπάνω έκφραση (οδηγεί σε μηδενική ροή του πεδίου). Ο λόγος ύπαρξης της γενικής αυτής σχέσης συνδέεται άρρηκτα με το νόμο αντιστρόφου τετραγώνου που ικανοποιεί το βαρυτικό πεδίο, γεγονός που καθιστά το ελεύθερο πεδίο να είναι μηδενικής απόκλισης ( $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$  σε περιοχές ελεύθερες από ύλη).

- Ο νόμος του Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας αποκαλύψει εύκολα τη μορφή του βαρυτικού πεδίου σε κατανομές ύλης που παρουσιάζουν μεγάλη συμμετρία.

- Η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρικών φλοιών πεπερασμένων διαστάσεων, αλλά μη επικαλυπτόμενων είναι ακριβώς ίδια με αυτήν δύο σημειακών μαζών με μάζες όσο ο κάθε σφαιρικός φλοιός, τοποθετημένες στα κέντρα των αντίστοιχων σφαιρών. Η πρόταση αυτή ισχύει κατ' επέκταση και για γεμάτες σφαιρικές μάζες με ισοτροπικά κατανομημένη ύλη. Δεν ισχύει όμως για μη σφαιρικές κατανομές ύλης.
- Οι παλιρροϊκές δυνάμεις οφείλονται στη διαφοροποίηση του βαρυτικού πεδίου στην περιοχή ενός σώματος από τις άλλες πηγές του βαρυτικού πεδίου καθώς τα σώματα κινούνται εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης. Η ένταση των παλιρροϊκών δυνάμεων από μια σημειακή (ή σφαιρική) βαρυτική πηγή μειώνεται με την απόσταση  $r$  από την πηγή ως  $\propto r^{-3}$ .
- Το βαρυτικό πεδίο γύρω από μια τυχαία κατανομή μάζας μπορεί να γραφεί ως ένα πλειονοπολικό ανάπτυγμα (όπως και στον ηλεκτρομαγνητισμό) με μονοπολικό όρο αυτόν μιας μάζας όσο η συνολική μάζα της κατανομής. Αν η αρχή μέτρησης των αποστάσεων είναι το κέντρο μάζας της κατανομής δεν εμφανίζεται στο ανάπτυγμα ο διπολικός όρος, οπότε ο αμέσως επόμενος μετά τον μονοπολικό όρο είναι ο τετραπολικός όρος που έχει τη μορφή

$$\Phi_{l=2}(\mathbf{r}) = -G \frac{\mathcal{Q}_{ij} r_i r_j}{r^5}$$

όπου  $\mathcal{Q}_{ij}$  η τετραπολική ροπή της κατανομής

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int_V dm(\mathbf{R}) (3 R_i R_j - R^2 \delta_{ij})$$

( $\mathbf{R}$  είναι η θέση της κάθε στοιχειώδους μάζας σε ολόκληρο τον όγκο  $V$  όπου κατανέμεται η ύλη). Βάσει του ορισμού της η τετραπολική ροπή μετράει την πρώτη απόκλιση της κατανομής από τη σφαιρική συμμετρία. Έτσι για μια σφαίρα η τετραπολική ροπή είναι μηδέν, ενώ για ένα επίμηκες σώμα η  $\mathcal{Q}_{zz}$  (με άξονα συμμετρίας τον  $z$ ) είναι θετική (και αρνητική για ένα πεπλατυσμένο σώμα).