Κεφάλαιο 13 Κεντρικές δυνάμεις - Θεμελιώδεις δυνάμεις

1 Κεντρικές δυνάμεις και ισοτροπία

Ιδιαίτερο ρόλο στη φύση παίζουν οι θεμελιώδεις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, οι οποίες ασκούνται επί της ευθείας που συνδέει δύο αλληλεπιδρώντα σημειακά σωματίδια. Οι δυνάμεις με αυτή την ιδιότητα καλούνται *κεντρικές δυνάμεις*. Αν απαιτήσουμε ο κόσμος μας να έχει την πιο απλή δυνατή δομή και παρουσιάζεται σε κοσμικό επίπεδο ισοτροπικός, δηλαδή ίδιος σε κάθε δυνατή κατεύθυνση, τότε δύο σημειακά σωματίδια ορίζουν μια ευθεία και οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης μεταξύ των δύο αυτών σωματιδίων δεν θα μπορούσαν να έχουν άλλη διεύθυνση από αυτή την ευθεία. Μια άλλη διεύθυνση της δύναμης θα σηματοδοτούσε την ύπαρξη κάποιας άλλης κατεύθυνσης στο Σύμπαν που θα υπαγόρευε την αντίστοιχη απόκλιση των αμοιβαίων δυνάμεων προς αυτήν και η οποία είτε θα ήταν τυχαία (γεγονός το οποίο θα κατέστρεφε την απλότητα περιγραφής του κόσμου), είτε θα επιβαλλόταν εξαιτίας κάποια προεξάρχουσας κατεύθυνσης στο Σύμπαν (η οποία θα κατέστρεφε την ισοτροπία αυτού).

Ένας άλλος λόγος που θα μας ωθούσε να αποκλείσουμε την περίπτωση μιας μη «ευθυγραμμισμένης» αλληλεπίδρασης δύο σημειακών σωματιδίων, θα ήταν η ύπαρξη ροπής ζεύγους των αντίρροπων δυνάμεων αλληλεπίδρασης, η οποία θα έθετε το ζεύγος των σωματιδίων σε περιστροφή ακόμη και αν αυτό ήταν αρχικά ακίνητο. Αν μάλιστα τα σωματίδια ήταν μέλη ενός σώματος πεπερασμένης διάστασης, μια αλληλεπίδραση τέτοιου είδους θα έθετε το σώμα συνολικά σε ιδιοπεριστροφή χωρίς να δρα καμία εξωτερική δύναμη πάνω του. Κάτι τέτοιο θα ήταν ομολογουμένως αρκετά προβληματικό αφού ένα ακίνητο σώμα θα αποκτούσε ενέργεια από μόνο του και θα ήταν από μόνο του ικανό να λύσει τα ενεργειακά μας προβλήματα.

Προτού κλείσουμε τη φιλολογία σχετικά με την αναγκαιότητα ύπαρξης κεντρικών δυνάμεων, θα επισημάνουμε ότι υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις σε όλα τα παραπάνω προβλήματα που θα μπορούσαν να παρακάμψουν την κεντρικότητα των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων.
(1) Θα μπορούσαν τα σωματίδια να διαθέτουν κάποια εσωτερικά διανυσματικά χαρακτηριστικά που να καθιστούν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις μη κεντρικές. Για παράδειγμα δύο ηλεκτρικά δίπολα με μηδενικές διαστάσεις δεν αλληλεπιδρούν κεντρικά αλλά ο προσανατολισμός των επί μέρους διπόλων αλλοιώνει τις μεταξύ τους δυνάμεις. Μια άλλη τέτοια περίπτωση είναι η αλληλεπίδραση κατά τα άλλα στοιχειωδών σωματιδίων μηδενικών διαστάσεων, που έχουν μη μηδενικό σπιν.[1]
(2) Θα μπορούσαν οι ανά δύο αλληλεπιδράσεις σωματιδίων να αλλοιώνονται από την παρου-

[1]Πρόκειται για μια καθαρά κβαντική ιδιότητα η οποία δεν έχει μηχανικό ανάλογο αφού δεν προέρχεται κατ' ανάγκη από κάποια εσωτερική δομή των σωματιδίων.

σία ενός τρίτου σωματιδίου, καθιστώντας τες μη κεντρικές. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις σε κάποιους ατομικούς πυρήνες. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε μόνο σε κεντρικές δυνάμεις, όπως είναι η βαρύτητα και οι δυνάμεις Coulomb.

2 Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, ισοτροπικών και μη

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης, δηλαδή σε ένα πεδίο που δρα πάνω στο σωματίδιο έτσι ώστε η δύναμη που κινεί το σωματίδιο να κατευθύνεται προς (ή αντίθετα) ένα σταθερό σημείο. Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι το σταθερό αυτό σημείο είναι η αρχή των αξόνων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η περίπτωση που θα εξετάσουμε εδώ αποτελεί μια ειδική περίπτωση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός εξαιρετικά μαζικού σωματιδίου (που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) και του υπό εξέταση (πολύ μικρότερης μάζας) σωματιδίου. Λόγω της πολύ μεγάλης μάζας του το πρώτο σωματίδιο μπορεί να εκληφθεί ως ακίνητο, ή αλλιώς ως σταθερή πηγή της δύναμης που ασκείται στο «μικρό» σωματίδιο. Ακόμη όμως και αν τα σωματίδια έχουν συγκρίσιμες μάζες, όπως μάθαμε στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων (Κεφάλαιο 11), αν θεωρήσει κανείς τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της κίνησης ενός εικονικού σώματος σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης.

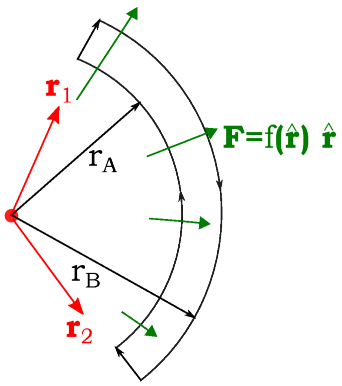
Ένα κεντρικό πεδίο δύναμης μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{1}$$

δηλαδή θα πρέπει να έχει τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ του διανύσματος θέσης του σωματιδίου, με αρχή των αξόνων είτε το μεγάλης μάζας σωματίδιο-πηγή του πεδίου, είτε το ΚΜ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.[2] Η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που μας λέει πως μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης με τη θέση του σωματιδίου, είτε λόγω αλλαγής της απόστασης $|\mathbf{r}|$ του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων, είτε λόγω αλλαγής της διεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}$ της ευθείας που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων. Η δύναμη αυτή μπορεί να είναι αμιγώς ελκτική ($f(\mathbf{r}) < 0$) ή αμιγώς απωστική ($f(\mathbf{r}) > 0$), ή σε άλλα σημεία θετική και σε άλλα απωστική.

Μια κεντρική δύναμη *δεν* είναι κατ' ανάγκη συντηρητική. Ο ευκολώτερος τρόπος να το δει κανείς αυτό είναι μέσω ενός συγκεκριμένου παραδείγματος (βλ. σχήμα 1). Ας υποθέσουμε ότι στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_1$ η συνάρτηση f είναι πάντα θετική, ενώ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_2$ η συνάρτηση f είναι πάντα αρνητική. Θα επιλέξουμε μια κλειστή διαδρομή η οποία ξεκινά από το σημείο $\mathbf{r}_A = r_A\hat{\mathbf{r}}_1$ και φτάνει στο $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}_1$ κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}_1$, στη συνέχεια κινείται πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_B μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_B = r_B\hat{\mathbf{r}}_2$, κατόπιν κινείται ακτινικά μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_A = r_A\hat{\mathbf{r}}_2$, και τέλος επανέρχεται στο αρχικό σημείο κινούμενο πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_A. Κατά την κίνηση πάνω στα ακτινικά κομμάτια το έργο της δύναμης είναι

[2] Στη δεύτερη περίπτωση η μάζα του σωματιδίου θα είναι η ανηγμένη μάζα του ζεύγους των σωματιδίων και η θέση $\mathbf{r}$ θα είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων.



Σχήμα 1: Μια απωστική κεντρική δύναμη (πράσινα βέλη), το μέτρο της οποίας αλλάζει με την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{r}}$, οδηγεί εν γένει σε μη μηδενικό έργο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, αφού η συμβολή της δύναμης στα δύο ευθύγραμμα κομμάτια της διαδρομή είναι διαφορετική. Το έργο κατά μήκος των τόξων είναι μηδενικό λόγω κεντρικότητας της δύναμης.

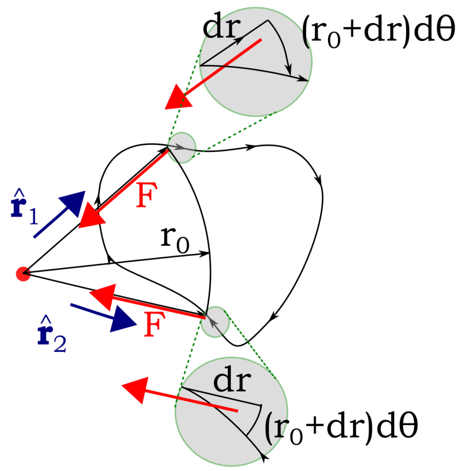
θετικό εφόσον $r_B > r_A$ (και αρνητικό αν $r_B < r_A$), ενώ το έργο πάνω στα κομμάτια της διαδρομής που βρίσκονται πάνω σε κάποια σφαιρική επιφάνεια είναι μηδενικό, αφού η δύναμη και η εκάστοτε στοιχειώδης μετατόπιση είναι κάθετες η μια στην άλλη. Έτσι το συνολικό έργο σε μια τέτοια κλειστή διαδρομή είναι καθαρά θετικό (ή αρνητικό). Η κεντρική αυτή δύναμη λοιπόν *δεν* είναι συντηρητική και επομένως δεν μπορεί να προέρχεται από κάποια δυναμική ενέργεια.

Από αυτό το παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης, μπορεί ίσως να φανταστεί κανείς ποια επιπλέον συνθήκη θα καθιστούσε μια κεντρική δύναμη συντηρητική. Αν η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου $|\mathbf{r}|$, $f(|\mathbf{r}|)$, στην παραπάνω κλειστή διαδρομή το έργο θα είναι μηδέν αφού το πέρασμα από το $r_0\hat{\mathbf{r}}_1$ στο $(r_0 + dr)\hat{\mathbf{r}}_1$ το έργο είναι $dW = f(r_0)dr$, το οποίο είναι ίσο και αντίθετο με το έργο κατά το πέρασμα από το $(r_0+dr)\hat{\mathbf{r}}_2$ στο $(r_0+dr-dr)\hat{\mathbf{r}}_2$. Όλα τα ζευγάρια στοιχειωδών έργων, κατά την ακτινική απομάκρυνση και την αντίστοιχη ακτινική προσέγγιση στην αρχή των αξόνων, αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα το συνολικό έργο να είναι μηδέν. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τη διαδρομή που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά για κάθε κλειστή διαδρομή. Τα μεν ακτινικά κομμάτια θα εμφανίζονται πάντα σε ζευγάρια απομάκρυνσης-προσέγγισης (μηδενικού συνολικά έργου), ενώ στα κάθετα στις ακτινικές κατευθύνσεις κομμάτια της διαδρομής δεν παράγεται έργο λόγω ακτινικής κατεύθυνσης της δύναμης. Η περίπτωση μιας τέτοιας συντηρητικής κεντρικής δύναμης

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \tag{2}$$

θα πρέπει να προκύπτει από κάποια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως ακολούθως:

$$f(r)\hat{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial V}{\partial r} + \dots \tag{3}$$



Σχήμα 2: Μια ελκτική κεντρική δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ είναι συντηρητική και μπορεί να προκύψει από μια βαθμωτή δυναμική ενέργεια $V(r)$ μέσω της σχέσης $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} V$.

όπου τα αποσιωπητικά αναφέρονται στις άλλες συνιστώσες του $\boldsymbol{\nabla}$ οι οποίες θα προκύπτουν από παραγωγίσεις της άγνωστης δυναμικής ενέργειας ως προς τις άλλες μη ακτινικές συντεταγμένες. Για να είναι ορθή η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει οι άλλες συνιστώσες του $\boldsymbol{\nabla} V$ να μηδενίζονται, Επομένως θα πρέπει η V να είναι συνάρτηση αποκλειστικά της ακτινικής συνιστώσας r του $\mathbf{r}$ και επιπλέον να είναι

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV(r)}{dr} \ ,$$

δηλαδή

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr' \ ,$$

με r_0 κάποια αυθαίρετη ακτίνα στην οποία προσδίδουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια. Για κεντρικές συντηρητικές δυνάμεις, σαν αυτή της βαρύτητας, που εξασθενίζουν με την απόσταση από το κέντρο, συνηθίζουμε να θέτουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια σε άπειρη απόσταση. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως

$$V_{\text{εξασθ}}(r) = \int_{r}^{\infty} f(r')\ dr' \ .$$

Το αρνητικό πρόσημο διαγράφηκε με παράλληλη εναλλαγή των ορίων του ολοκληρώματος.

Ανεξαρτήτως της συντηρητικότητας, ή μη, μιας κεντρικής δύναμης υπάρχει μια φυσική ποσότητα που αφορά στην κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο η οποία διατηρείται. Η ποσότητα αυτή είναι η στροφορμή του σωματιδίου. Θυμηθείτε ότι η μεταβολή της στροφορμής συνδέεται με τη ροπή της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,.$$

Η κεντρικότητα της δύναμης εξασφαλίζει ότι η ροπή είναι μηδενική ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$) και επομένως τη διατήρηση της στροφορμής. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι η στροφορμή ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται και όχι ως προς κάποιο άλλο σημείο, αφού ως προς ένα άλλο σημείο που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$, σε σχέση με το κέντρο, θα είναι

$$\frac{d\mathbf{L}^{(\mathbf{R})}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{(\mathbf{R})} = (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \mathbf{F} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F} = -\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \neq 0$$

εν γένει, εφόσον το $\mathbf{R}$ δεν είναι παράλληλο στο εκάστοτε $\hat{\mathbf{r}}$. Στη συνέχεια όταν θα γράφουμε τη στροφορμή ή θα αναφερόμαστε σε αυτή θα εννούμε τη στροφορμή ως προς το κέντρο του πεδίου.

Με τη σειρά της η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε δύο επί μέρους γεωμετρικές συνέπειες όσον αφορά στην κίνηση του σωματιδίου.
(1) Εξ’ ορισμού η στροφορμή είναι

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \,,$$

δηλαδή πρόκειται για ένα διανυσματικό μέγεθος κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν κάθε στιγμή τα διανύσματα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{v}$. Αν η στροφορμή είναι σταθερή, αυτό σημαίνει ότι είναι σταθερό και το επίπεδο των $\mathbf{r}$ και $\mathbf{v}$. Αυτόματα το συμπέρασμα αυτό εγγυάται επιπεδότητα της κίνησης του σωματιδίου:

$$\mathbf{r}(t) = a\mathbf{r}(0) + b\mathbf{v}(0) \tag{4}$$

με a, b κατάλληλες σταθερές. Στην ειδική περίπτωση που αρχικά τα διανύσματα $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ είναι παράλληλα το ένα στο άλλο, η στροφορμή είναι μηδέν και παραμένει για πάντα μηδέν. Επομένως τότε η θέση και η ταχύτητα είναι συνεχώς παράλληλες η μία στην άλλη. Αυτομάτως αυτό συνεπάγεται ευθύγραμμη κίνηση και μάλιστα κατά μήκος μιας ευθείας που διέρχεται από το κέντρο. Αν η κίνηση ήταν καμπυλόγραμμη τότε σε κάποια στιγμή θα υπήρχε συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη στη θέση σε αντίθεση με τα προηγούμενα περί παραλληλίας. Το ίδιο θα ίσχυε και αν η κίνηση ήταν ευθύγραμμη αλλά όχι διερχόμενη από το κέντρο: η ακτινίκη θέση θα άλλαζε διεύθυνση αλλά η ταχύτητα θα ήταν πάνω στην ευθεία της κίνησης, οπότε θα υπήρχε συνεχώς μη μηδενική γωνία μεταξύ της θέσης και της ταχύτητας.

Ίσχύει όμως και η αντίστροφη πρόταση; Η επιπεδότητα της τροχιάς συνεπάγεται και κεντρικότητα της δύναμης; Προφανώς όχι. Για παράδειγμα η τροχιά ενός σώματος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης (κοντά στην επιφάνεια αυτής) είναι μια παραβολή σε ένα κατακόρυφο πεδίο, δηλαδή διεξάγεται πάνω σε ένα επίπεδο. Η στροφορμή όμως δεν είναι σταθερή, αφού η δύναμη της βαρύτητας μετακινείται μαζί με το σώμα αλλάζοντας ταυτόχρονα και τη ροπή της. Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή αλλάζει κατά μέτρο αλλά παραμένει πάντα κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς (ως οφείλει, εκ του ορισμού της)[3]. Ένα δεύτερο παράδειγμα διατήρησης της διεύθυνσης της στροφορμής, αλλά όχι του μέτρου της, είναι η κίνηση σε ένα κεντρικό πεδίο με ταυτόχρονη δράση μιας δύναμης αντίστασης, παράλληλης στη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{κεντρ}} + \mathbf{F}_{\text{αντ}} = \hat{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}} g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) ,$$

όπου $\hat{\mathbf{v}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας και g είναι μια τυχαία συνάρτηση της ταχύτητας και της θέσης. Η μεταβολή της στροφορμής από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}} g(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \\ &= (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{v}}) g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ &= (m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|} \\ &= \mathbf{L} \, \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|} \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Μια τέτοια μεταβολή διατηρεί τη διεύθυνση της $\mathbf{L}$ αλλά όχι το μέτρο αυτής. Λόγω της σταθερότητας της διεύθυνσης της $\mathbf{L}$ η τροχιά παραμένει επίπεδη, μολονότι η στροφορμή μεταβάλλεται (κατά μέτρο).

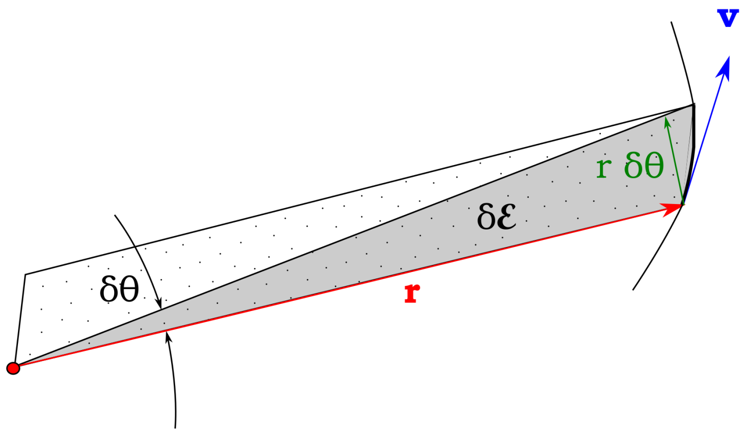
(2) Δεδομένης της επιπεδότητας της τροχιάς όταν ένα σώμα κινείται σε ένα κεντρικό πεδίο, η διατήρηση του μέτρου της στροφορμής συνεπάγεται και διατήρηση του ρυθμού σάρωσης εμβαδών από την επιβατική ακτίνα που συνδέει το κέντρο με την εκάστοτε θέση του σωματιδίου. Πρόκειται για το νόμο που διατύπωσε ο Κέπλερ παρατηρώντας την κίνηση των πλανητών. Μόνο που η διατήρηση αυτή δεν είναι αποκλειστικό προνόμιο της βαρύτητας· η διατήρηση του ρυθμού σάρωσης των εμβαδών είναι συνέπεια της κεντρικότητας των δυνάμεων, ακόμη και αν αυτές είναι μη συντηρητικές. Ας δούμε όμως γιατί η διατήρηση της στροφορμής σημαίνει σταθερό ρυθμό σάρωσης.

Από τη στιγμή που η τροχιά είναι επίπεδη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για την περιγραφή της τροχιάς. Σύμφωνα με τα όσα μάθαμε στο κεφάλαιο των διανυσμάτων

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = mrv_\theta \hat{\mathbf{k}} = mr^2 \dot{\theta} \ \mathbf{k}$$

όπου $\mathbf{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο της κίνησης με κατεύθυνση αυτή του αντίχειρα ενός δεξιού χεριού όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα είναι στραμμένα στην κατεύθυνση

[3] Ίσως ο αναγνώστης αμφισβητήσει τη μη διατήρηση της στροφορμής στις βολές, με το επιχείρημα ότι η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο της Γης είναι σταθερό, αφού η βαρυτική δύναμη είναι μια κεντρική δύναμη. Το παράδειγμα όμως που αναφέραμε –της κίνησης σε ένα ομογενές πεδίο– εξακολουθεί να μη διατηρεί τη στροφορμή, παρόλο που αυτό αποτελεί προσέγγιση ενός πεδίου που διατηρεί τη στροφορμή.



Σχήμα 3: Το εμβαδόν $\delta\mathcal{E}$ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt (γκρι εστιγμένη περιοχή) είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{2}r(r\delta\theta)$ ή το ήμισυ του παραλληλογράμμου (εστιγμένη περιοχή) που δίνεται από το $|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|\delta t$. Το λάθος στον υπολογισμό του εμβαδού από τις δύο αυτές εκφράσεις είναι τάξης δt^2.

που ακολουθεί την κίνηση του σωματιδίου ($\mathbf{k} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$). Η ποσότητα $r^2\dot{\theta}$ είναι κατ' ουσίαν ο ρυθμός σάρωσης του εμβαδού από την εμβατική ακτίνα $\mathbf{r}$ (για την ακρίβεια είναι το διπλάσιο αυτού του ρυθμού), όπως θα δείξουμε. Στο χρονικό διάστημα δt η επιβατική ακτίνα μεταβαίνει από την τιμή $r(t)$ στην $r(t+dt)$ και ταυτόχρονα στρέφεται κατά γωνία $\delta\theta$. Αν η γωνία αυτή είναι πολύ μικρή το "καμπύλο τρίγωνο" που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διαδοχικών ακτίνων και του τόξου της καμπύλης τροχιάς έχει εμβαδόν

$$\delta\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}r(t)[r(t)\delta\theta] + \mathcal{O}(\delta\theta\cdot\delta r)\ .$$

Ο πρώτος όρος είναι το εμβαδόν ενός τριγώνου με ύψος $r(t)$ και βάση $r(t)\delta\theta$ ενώ ο επόμενος όρος εμπεριέχει όλες τις διορθώσεις που οφείλονται στο γεγονός ότι η $\delta\theta$ είναι πεπερασμένη και στο ότι το τρίγωνο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν δεν είναι ακριβώς τρίγωνο... Το κλάσμα $\delta\mathcal{E}(t)/\delta t$, στο όριο που τοτ δt τείνει στο 0, δίνει $(1/2)r^2(d\theta/dt)$. Επομένως

$$\mathbf{L} = 2m\frac{d\mathcal{E}}{dt}\mathbf{k}\ . \tag{6}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της παραπάνω σχέσης θα μπορούσε να προκύψει και δίχως αναφορά σε πολικές συντεταγμένες, ως ακολούθως.

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\lim_{\delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}\times\delta\mathbf{r}}{\delta t} = m\frac{2\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\delta t} = 2m\frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dt}$$

Η ποσότητα $\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{r}$ και $\delta\mathbf{r}$ και μάλιστα υπό μορφή διανύσματος (θυμηθείτε τη σχέση των εξωτερικών γινομένων και των εμβαδών που είδαμε στο κεφάλαιο για τα διανύσματα). Προφανώς, αν η στροφορμή διατηρεί τη διεύθυνσή της, αλλά όχι το μέτρο της (όχι κεντρική δύναμη) ο ρυθμός σάρωσης εμβαδού δεν είναι σταθερός.

3 Στροφορμή συστήματος πολλών σωματιδίων

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων διατηρείται εξαιτίας της απαίτησης οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να σέβονται τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Βασισμένοι στη διατήρηση της ορμής μάλιστα, κατασκευάσαμε ένα σύστημα, το σύστημα ΚΜ στο οποίο η ολική ορμή είναι μηδέν. Το ιδιαίτερο αυτό σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαχωριστεί η ορμή και η ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων σε εσωτερική (ως προς το ΚΜ) και του ΚΜ[4].

Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε αν και η συνολική στροφορμή των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι σταθερή και πων αυτή διαχωρίζεται αντιστοίχως στο σύστημα ΚΜ. Η στροφορμή του εκάστοτε σωματιδίου ως προς κάποιο σημείο που θεωρούμε ως αρχή των $\mathbf{r}_i$ είναι

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

Επομένως η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι

$$\mathbf{L}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \tag{7}$$

και ο ρυθμός μεταβολής αυτής είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{\text{ολ}}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \cancel{(\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)} + (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{j\to i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j\to i} \ . \end{aligned}$$

Το άθροισμα αυτό δυστυχώς δεν μηδενίζεται αυτομάτως εξαιτίας του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, όπως συνέβαινε με το αντίστοιχο άθροισμα όλων των δυνάμων αλληλεπίδρασης όταν

[4] Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η εσωτερική ορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ είναι 0, ενώ η συνολική ενέργεια οφείλεται στις δυνάμεις αλληλεπίδρασεις και στις ταχύτητες των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ. Αντίστοιχα η ολική ορμή είναι η ορμή που μετράται σε ένα οποιοδήποτε σύστημα, ενώ η ενέργεια του ΚΜ είναι απλώς η κινητική ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα ίση με τη μάζα όλων των σωματιδίων και ταχύτητα αυτήν του ΚΜ.

υπολογίζαμε το ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός συστήματος. Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά γιατί. Το ζευγάρι

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j\to i} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i\to j} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j\to i} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{j\to i} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j\to i}$$

με $i \neq j$ δεν είναι οπωσδήποτε μηδέν αφού κανένας δεν μας διαβεβαίωσε ότι η δύναμη που ασκεί το j σωματίδιο στο i σωματίδιο θα είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ που συνδέει το j με το i. Αν ίσχυε κάτι τέτοιο, τότε και πάλι όλα τα ζευγάρια αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωματιδίων θα έδιναν μηδενική μεταβολή της συνολικής τους στροφορμής. Επομένως η συνθήκη για να διατηρείται η ολική στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων να έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια.

Θα μπορούσε να είναι διαφορετικά τα πράγματα για τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις; Αν οι δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις των σωμάτων και ο κόσμος είναι ισοτροπικός, όχι. Η μοναδική διεύθυνση στο χώρο μεταξύ δύο σημειακών σωματιδίων είναι αυτή της ευθείας που τα ενώνει. Δεν υπάρχει καμία άλλη προτιμητέα διεύθυνση στο χώρο για να υπάρχει πάνω σε αυτήν συνιστώσα της δύναμης αλληλεπίδρασής τους. Αν όμως η αλληλεπίδρασή εξαρτάται και από τη σχετική τους ταχύτητα τότε η διεύθυνση του $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ δεν είναι παράλληλη στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{r}_{12}$. Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση η ολική στροφορμή δεν θα διατηρούνταν. Οι δυνάμεις αυτού του τύπου θα μετέβαλαν συνεχώς τη στροφορμή. Για παράδειγμα αν είχαμε δύο σωματίδια και αυτά κινιόντουσαν αρχικά παράλληλα το ένα στο άλλο, μια τέτοιου είδους δύναμη θα τα έθετε σε στροβιλισμό αφού μια δύναμη της μορφής $\mathbf{F}_{2\to 1} \propto \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ θα ασκούσε ροπή ζεύγους στα δύο σωματίδια. Το μαγνητικό κομμάτι της δύναμης Lorentz μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων έχει μια τέτοια μορφή, αλλά στο σύστημα που το σωματίδιο #1 είναι ακίνητο, δεν υπάρχει μαγνητικό πεδιο να επηρεάσει το #2, ενώ στο σύστημα του σωματιδίου #2 το μαγνητικό πεδιο που δημιουργεί το σωματίδιο #1 δεν ασκεί δύναμη στο #2 αφού αυτό είναι ακίνητο. Συνεπώς και στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων απομένει μόνο η δύναμη Coulomb, που εξαρτάται μόνο από τη σχετική θέση, να ελέγχει τις κινήσεις[5]. Το τελικό συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι ο κόσμος μας, με τις θεμελιώδεις δυνάμεις που τον περιγράφουν, διατηρεί σταθερή τη στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Θα μπορούσε όμως ο κόσμος να είναι πιο περίπλοκος και η στροφορμή να μην διατηρείται!

Η απαίτηση για διατήρηση της στροφορμής ενός συστήματος είναι ισοδύναμη με την απαίτηση οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να είναι κεντρικές, δηλαδή η δύναμη που ασκεί το σωματίδιο #2 στο σωματίδιο #1 να είναι της μορφής

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f \ ,$$

[5]Ισως αναρωτηθείτε αν τα επιχειρήματα περί μη ύπαρξης μαγνητικών δυνάμεων στα δύο ειδικά αυτά συστήματα είναι αρκετά για να πειστεί κανείς ότι σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, που οι μαγνητικές δυνάμεις είναι παρούσες, η στροφορμή θα έχει την ίδια συμπεριφορά. Αυτό όμως είναι αναμενόμενο αφού όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα ως προς την περιγραφή όλων των φυσικών συστημάτων.

όπου f κάποια βαθμωτή συνάρτηση που μπορεί να εξαρτάται από τη σχετική θέση $\mathbf{r}_{12}$ και τη σχετική ταχύτητα $\mathbf{v}_{12}$ των δύο σωματιδίων ή ακόμη και του χρόνου. Έτσι οι κεντρικές δυνάμεις που μελετάμε στο παρόν κεφάλαιο οδηγούν αυτομάτως σε διατήρηση της στροφορμής.

Ας δούμε τώρα τι μορφή παίρνει η στροφορμή στο σύστημα ΚΜ.

$$\mathbf{L}^{(KM)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\mathbf{r}}_i \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i$$

όπου $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{KM}$ είναι η θέση του εκάστοτε σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ, με αρχή το ΚΜ. Αν αναπτύξουμε τη συνολική στροφορμή σε διανύσματα θέσης $\mathbf{r}, \mathbf{R}$, όπως αυτά μετρώνται σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{(KM)} &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{KM}) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}}_{KM}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} - \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} - \mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{r}}_i) \qquad (8)\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R}_{KM} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\dot{\mathbf{R}}_{KM}$$

οπότε η σχέση (8) λαμβάνει την ακόλουθη απλή μορφή

$$\mathbf{L}^{(KM)} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) - M\mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_{KM}\ . \qquad (9)$$

Η στροφορμή του ΚΜ, $\mathbf{L}_{KM}$, θα είναι μηδέν αν το σημείο ως προς το οποίο μετρηθεί αυτή βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση κίνησης του ΚΜ ($\mathbf{R}_{KM} \parallel \dot{\mathbf{R}}_{KM}$). Όπως ακριβώς είδαμε να συμβαίνει με την ολική ενέργεια, και η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων μπορεί να διαχωριστεί σε μια εσωτερική στροφορμή του συστήματος, όπως θα την κατέγραφε ένας παρατηρητής στο ΚΜ, και μια εξωτερική στροφορμή, ωσάν το σύστημα να ήταν ένα σωματίδιο μάζας M, όσο η συνολική μάζα των σωματιδίων, τοποθετημένο στο ΚΜ κινούμενο με την ταχύτητα του ΚΜ. Έτσι για παράδειγμα η στροφορμή του ηλιακού συστήματος στο Γαλαξία, μπορεί να χωρίσει στην ιδιοστροφορμή του ηλιακού συστήματος (εξαιτίας της περιστροφής των πλανητών) με φορά κάθετη στην εκλειπτική, συν τη στροφορμή του συστήματος ως ενιαίο σώμα επειδή αυτό περιφέρεται γύρω από το κέντρο του Γαλαξία.[6] Στα κβαντομηχανικά σωματίδια συνηθίζεται να περιγράφεται το σπιν τους ως κάποιου είδους ιδιοστροφρομή αυτών. Στην

[6]Στην πραγματικότητα ούτε ο Γαλαξίας είναι αδρανειακό σύστημα, ούτε το ΚΜ του ηλιακού συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα στο Γαλαξία, αλλά για χρονικά διαστήματα πολύ μικρά σε σχέση με την περίοδο περιστροφής του ηλιακού συστήματος μέσα στο Γαλαξία (μερικές εκατοντάδες εκατομμύρια έτη) οι επιδράσεις του Γαλαξία μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

παργαμτικότητα το σπιν των στοιχειωδών σωματιδίων αν και παρουσιάζει ομοιότητες με τη στροφορμή (και διαστατικά και από πλευράς αλληλεπιδράσεων) είναι καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο δίχως μηχανικό ανάλογο, αφού εμφανίζεται ακόμη και σε σωματίδια με μηδενικές διαστάσεις (όπως το ηλεκτρόνιο).

4 Ενεργός Δυναμική ενέργεια

Αν μια κεντρική δύναμη είναι παράλληλα και συντηρητική, όπως συμβαίνει με τις θεμελιώδεις δυνάμεις, τότε η διατηρούμενη ενέργεια του σωματιδίου που κινείται στο πεδίο μιας τέτοιας δύναμης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

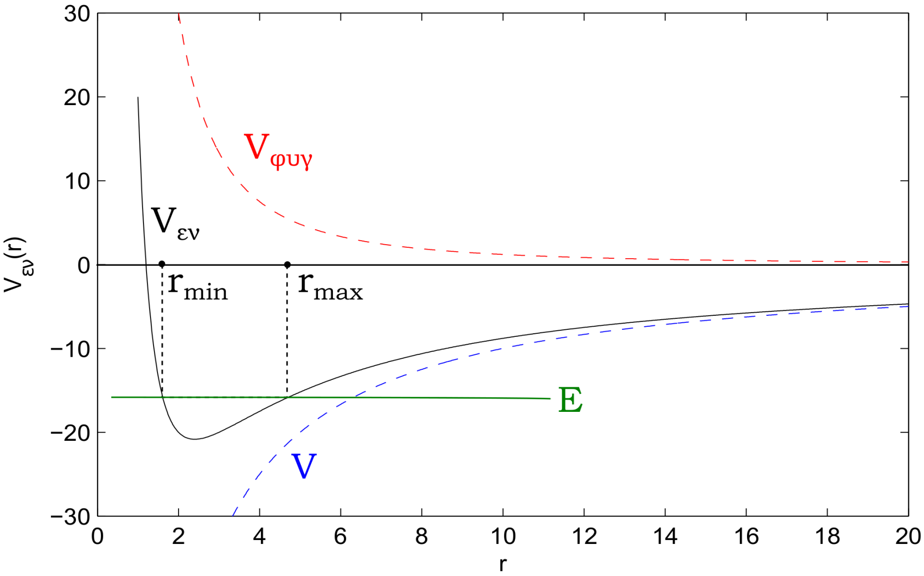
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r) \; . \end{aligned} \tag{10}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιήσαμε (1) την επιπεδότητα της τροχιάς για να γράψουμε το τετράγωνο της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες $v_r^2 + v_\theta^2$ και (2) τη γραφή της στροφορμής σε πολικές συντεταγμένες (βλ. προηγούμενο εδάφιο). Παρατηρήστε ότι οι τελευταίοι δύο όροι στην τελική έκφραση είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να επινοήσει μια νέα δυναμική ενέργεια για να συμπεριλάβει τους δύο τελευταίους όρους

$$V_{\text{ενερ}} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r) \; .$$

Η νέα αυτή δυναμική ενέργεια, καλούμενη ενεργή δυναμική ενέργεια, ελέγχει τη μεταβολή της ακτινικής ταχύτητας $\dot{r}$ με την απόσταση r.[7] Αφορά στην πραγματικότητα ένα σωματίδιο που κινείται επί μιας ευθείας η οποία συμπεριστρέφεται μαζί με το σωματίδιο. Η φύση αυτής της δυναμικής ενέργειας είναι ένας συνδυασμός της δυναμικής ενέργειας του πραγματικού πεδίου μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο και της δυναμικής ενέργειας εξαιτίας της φυγόκεντρης δύναμης που αναπτύσσεται στο σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο (ένας συμπεριστρεφόμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής είναι ένας μη αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος αισθάνεται την ψευδοδύναμη της φυγοκέντρου). Το ότι η φυγόκεντρος δύναμη είναι συντηρητική δύναμη και επομένως μπορεί να προέλθει από μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

[7] Γι΄αυτό θα μπορούσαμε να την αποκαλούμε και ακτινική δυναμική ενέργεια.



Σχήμα 4: Η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\varepsilon\nu}(r)$ ως άθροισμα της φυγόκεντρης δυναμικής ενέργειας (κόκκινη εστιγμένη καμπύλη) και της δυναμικής ενέργειας του ίδιου του πεδίου (μπλε εστιγμένη καμπύλη). Η ολική ενέργεια (πράσινη ευθεία) καθορίζει τα ακρότατα σημεία της ακτινικής ταλάντωσης $r_{\min}, r_{\max}$.

οφείλεται στη μορφή αυτής της δύναμης:

$$\mathbf{F}_{\varphi\upsilon\gamma} = m\omega^2 \mathbf{r}_\perp$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και $\mathbf{r}_\perp$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωσή μας, όπου το σωματίδιο κινείται σε ένα επίπεδο, $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}$ και $\omega = \dot{\theta} = |\mathbf{L}|/(mr^2)$. Συνολικά λοιπόν

$$\mathbf{F}_{\varphi\upsilon\gamma} = \frac{\mathbf{L}^2}{mr^4}\mathbf{r}$$

και

$$V_{\varphi\upsilon\gamma} = -\int_0^r \frac{\mathbf{L}^2}{mr^4}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^r \frac{\mathbf{L}^2}{mr^3}dr = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}\ .$$

Προσέξτε ότι θεωρήσαμε το κέντρο σαν σημείο με φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια μηδέν. Όταν προσθέτουμε δύο δυναμικές ενέργειες από δύο διαφορετικά πεδία, όπως εδώ προκειμένου να κατασκευάσουμε την ενεργό δυναμική ενέργεια, έχουμε την ελευθερία να θεωρούμε ότι η κάθε μία από αυτές μηδενίζεται σε διαφορετικό σημείο αφού η τιμή της δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο δεν επηρεάζει το φυσικό περιεχόμενο του αντίστοιχου πεδίου. Προφανώς η συνολική δυναμική ενέργεια δεν θα μηδενίζεται εν γένει σε κανένα από τα δύο αυθαίρετα αυτά σημεία.

Γνωρίζοντας τη μορφή της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι τώρα εξαιρετικά εύκολο να μελετήσει κανείς την κίνηση του σωματιδίου στο χώρο:

1. Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ καθορίζουν το επίπεδο της τροχιάς. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύστημα των συντεταγμένων μας ώστε το επίπεδο αυτό να είναι το $x - y$.

2. Από τις αρχικές συνθήκες μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το μέτρο της στρροφορμής

$$|\mathbf{L}| = |m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)|$$

   καθώς και την τιμή της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}m[\mathbf{v}(0)]^2 + V(|\mathbf{r}(0)|)\ .$$

3. Με βάση την έκφραση για τη διατήρηση της ενέργειας μπορούμε να μελετήσουμε την ακτινική κίνηση, όπως μάθαμε να μελετάμε τη μονοδιάστατη κίνηση μέσα σε κάποιο πεδίο που περιγράφεται από κάποια δυναμική ενέργεια· εδώ την ενεργό δυναμική ενέργεια. Πιο συγκεκριμένα το ακτινικό εύρος της κίνησης βρίσκεται εντός των περιοχών όπου $E \geq V_{\text{ενερ}}(r)$ και μάλιστα όσο πιο μεγάλη είναι η διαφορά $E - V_{\text{ενερ}}(r)$ τόσο πιο μεγάλη είναι η ακτινική ταχύτητα του σωματιδίου. Επιπλέον όταν το σωματίδιο διέρχεται από μια ακτίνα r, αυτό θα έχει την ίδια κατ' απόλυτη τιμή ακτινική ταχύτητα είτε απομακρυνόμενο από το κέντρο είτε προσεγγίζοντας το κέντρο. Αν η επιτρεπόμενη περιοχή της κίνησης είναι κάποιο συγκεκριμένο διάστημα $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$, αυτό σημαίνει ότι η τροχιά είναι περιορισμένη στο δίσκο με εσωτερική ακτίνα r_{min} και εξωτερική r_{max}. Μάλιστα το σωματίδιο εκτελεί μια ακτινική ταλάντωση, εν γένει όχι αρμονική, κατά την οποία ο χρόνος μετάβασης από την r_{min} στην r_{max} είναι ίσος με το χρόνο από την r_{max} στην r_{min}. Όπως θα δούμε στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται κάποια συμμετρία στη μορφή των τροχιών, ότι μορφή και αν έχει το κεντρικό πεδίο.

4. Ενώ το σωματίδιο κινείται ακτινικά, αλλάζει και γωνιακή θέση σύμφωνα με τη σχέση

$$\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}\ .$$

   Έτσι καθώς το σωματίδιο πλησιάζει στην ελάχιστη ακτίνα r_{min}, γνωστή και ως περίκεντρο[8], η γωνιακή του ταχύτητα μεγαλώνει, ενώ όταν πλησιάζει τη μέγιστη ακτίνα r_{max}, γνωστή ως απόκεντρο[9], η γωνιακή του ταχύτητα μειώνεται ώστε να διατηρηθεί σταθερός ο ρυθμός σάρωσης εμβαδών. Πάνω απ΄ όλα όμως η γωνιακή ταχύτητα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα κεντρικό δυναμικό δεν είναι δυνατή η αντιστροφή της φοράς περιστροφής ενός σώματος.

[8] Η περίγειο, αν αναφερόμαστε σε δορυφόρο της Γης, ή περιήλιο αν αναφερόμαστε σε πλανήτη ή άλλο σώμα του Ηλιακού συστήματος που κινείται στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή γενικότερα περίαστρο αν αναφερόμαστε σε κινήσεις ουρανίων σωμάτων γύρω από κάποιο άστρο.

[9] Η απόγειο, ή αφήλιο, ή άπαστρο.

5. Όταν η ενεργός δυναμική ενέργεια παρουσιάζει κάποιο τοπικό ελάχιστο και η ολική ενέργεια του είναι τέτοια ώστε το σωματίδιο να εκτελεί ακτινική ταλάντωση, η κίνηση είναι ένας συνδυασμός περιστροφής και παράλληλα μια περιοδική μεταβολή της ακτίνας μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Ποια είναι όμως η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα μεταξύ δύο διαδοχικών ακροτάτων της ακτίνας; Τι μορφή έχει συνολικά η τροχιά; Υπάρχει πιθανότητα η τροχιά να είναι κλειστή, δηλαδή να επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια μετά από μία περιστροφή; Αυτά είναι ερωτήματα που θα απαντήσουμε στη συνέχεια. Προς το παρόν θα αρκεστούμε να κάνουμε γενικές διαπιστώσεις που ισχύουν σε κάθε κεντρική, συντηρητική δύναμη.

   Αφού η ακτινική ταλάντωση διεξάγεται με ακτινική ταχύτητα που εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της ακτίνα, ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο να μεταβεί από το ελάχιστο (ή μέγιστο) της ακτίνας σε μια μεγαλύτερη (ή μικρότερη) ακτίνα $t_{\text{min}\to r}$ είναι ακριβώς ίσος με το χρόνο που χρειάζεται για να μεταβεί το σωματίδιο από την ακτίνα αυτή προς το ίδιο αυτό ακρότατο $t_{r\to\text{min}}$. Ταυτόχρονα η γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στα δύο αυτά χρονικά διαστήματα θα είναι

$$\Delta\theta_{r_{\text{min}}\to r} = \int d\theta = \int_0^{t_{r_{\text{min}}\to r}} \dot{\theta}\; dt = \int_{r_{\text{min}}}^{r} \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}} \tag{11}$$

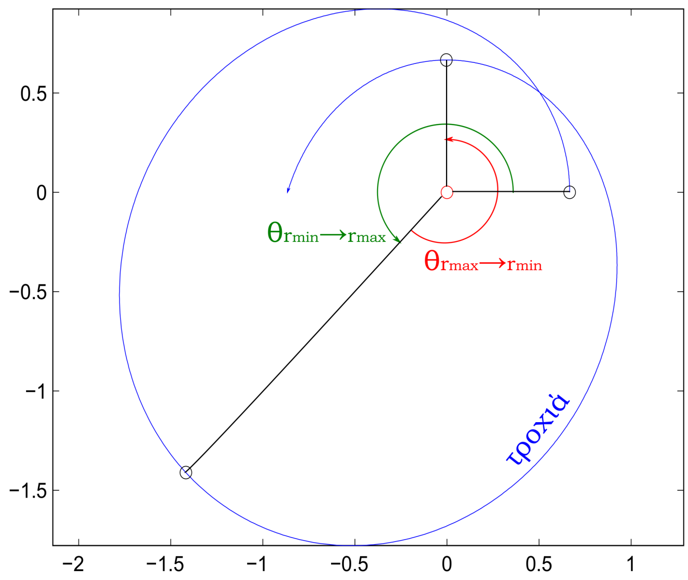
   και

$$\Delta\theta_{r\to r_{\text{min}}} = \int d\theta = \int_0^{t_{r\to r_{\text{min}}}} \dot{\theta}\; dt = \int_{r}^{r_{\text{min}}} \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}} \tag{12}$$

   αντίστοιχα. Οι δύο αυτές γωνίες είναι ακριβώς ίδιες, αν αναλογιστούμε ότι το $\dot{r}$ στην πρώτη και στη δεύτερη έκφραση είναι απλώς η ίδια κατ' απόλυτη τιμή συνάρτηση του r, την πρώτη φορά με $+$ πρόσημο και τη δεύτερη με $-$ πρόσημο. Με άλλα λόγια η αψίδα που διαγράφει η τροχιά γύρω από το περίκεντρο είναι συμμετρική (και προφανώς το ίδιο ισχύει και για την αψίδα που διαγράφει γύρω από το απόκεντρο.

   Η τιμή της γωνίας μεταξύ δύο διαδοχικών αψίδων $\Delta\theta_{r_{\text{min}}\to r_{\text{max}}}$ είναι σημαντική προκειμένου να γνωρίζουμε αν η τροχιά είναι κλειστή ή όχι. Για να είναι κλειστή πρέπει να είναι ίση με π/k, όπου k κάποιος φυσικός αριθμός. Μετά από k πλήρεις ακτινικές ταλαντώσεις το σωματίδιο θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη περιφορά 2π και η τροχιά θα επαναληφθεί απαράλλαχτη ξεκινώντας από το ίδιο σημείο. Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς η τροχιά κλείνει αν η παραπάνω γωνία είναι κάποιο ρητό πολλαπλάσιο του π: $p\pi/q$, με φυσικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά κλείνει μετά από q περιφορές. Σε αντίθετη περίπτωση το σωματίδιο, με την πάροδο του χρόνου, σαρώνει κάθε σημείο του δίσκου μεταξύ r_{min} και r_{max}.

6. Αν η ενεργός δυναμική ενέργεια έχει τέτοια μορφή ώστε η επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης να είναι είτε $r \in [0, r_{\text{max}}]$, είτε $r \in [r_{\text{min}}, +\infty)$, τότε το σωματίδιο με την πάροδο του χρόνου θα οδηγηθεί είτε στο κέντρο, είτε σε άπειρη απόσταση από το κέντρο. Μπορεί η



Σχήμα 5: Η τροχιά διαγράφει ίδια γωνία, καθώς το σωματίδιο κινείται από το περίκεντρο $r_{\min}$ προς το απόκεντρο $r_{\max}$ και στη συνέχεια από το απόκεντρο προς το περίκεντρο. Όταν οι γωνίες αυτές είναι ρητό πολλαπλάσιο του π η τροχιά είναι κλειστή.

τροχιά στην αρχή να απομακρυνθεί και μετά να καταλήξει στο κέντρο (1η περίπτωση), είτε αρχικά να πλησιάσει στο κέντρο και μετά να απομακρυνθεί για πάντα (2η περίπτωση). Η πρώτη περίπτωση, όντας καταδικασμένη να συγκρουστεί με το κέντρο (και ότι αυτό συνεπάγεται) δεν έχει ιδιαίτερη αξία αφού η κίνηση θα διαρκέσει κάποιο περιορισμένο χρόνο. Τουναντίον η δεύτερη περίπτωση, η σκέδαση, παρουσιάζει εξέχουσα σημασία στη φυσική: διαρκεί άπειρο (συνήθως) χρόνο μέχρις ώτου το σωματίδιο ξεφύγει από το πεδίο και οι λεπτομέρειες της τροχιάς, όπως για παράδειγμα η γωνία στροφής του σωματιδίου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παρατηρήσιμα μεγέθη προκειμένου να μάθουμε τις λεπτομέρειες του κεντρικού πεδίου. Η περίπτωση της σκέδασης θα μελετηθεί σε ξεχωριστό εδάφιο παρακάτω.

5 Υποψήφια πεδία για κλειστές τροχιές

Θα μελετήσουμε τώρα τη δυνατότητα να υπάρχουν κυκλικές τροχιές σε ένα κεντρικό συντηρητικό πεδίο. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς να αποτελεί σταθερή λύση της εξίσωσης της ενέργειας (10), δηλαδή θα πρέπει η ακτίνα r_c να αποτελεί τουλάχιστον διπλή ρίζα της σχέσης $E = V_{\text{ενερ}}(r)$. Γιατί διπλή ρίζα; Μα επειδή το εύρος ακτινικής κίνησης πρέπει να είναι μηδενικό. Αν η ρίζα είναι απλή, αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα αυτή είτε είναι άνω άκρο της ακτινικής κίνησης, είτε κάτω άκρο, αλλά τότε δεν μπορεί η ακτίνα να είναι σταθερή.

Με άλλα λόγια θα πρέπει η r_c να αποτελεί ακρότατο της ενεργού δυναμικής ενέργειας και η ακτινική ταχύτητα σε αυτή τη θέση να είναι μηδέν. Αν πρόκειται για ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας, η ακτίνα αυτή είναι όχι μόνο σταθερή, αλλά και ευσταθής και επομένως η κυκλική τροχιά είναι υλοποιήσιμη. Αν αντιθέτως αντιστοιχεί σε μέγιστο, ή σημείο καμπής της $V_{\text{ενερ}}(r)$, η ακτίνα αυτή είναι μεν σταθερή, αλλά παρουσιάζει αστάθεια και επομένως δεν είναι υλοποιήσιμη η κυκλική αυτή τροχιά· η παραμικρή διαταραχή των αρχικών συνθηκών θα απομακρύνει την τροχιά από την κυκλική της μορφή. Συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές του r στις οποίες

$$V'_{\text{ενερ}}(r_c) = 0 \quad \text{και} \quad V''_{\text{ενερ}}(r_c) > 0.$$

Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr_c^2} = \frac{\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}$$

όπου η αντικατάσταση της στροφορμής από την ποσότητα $\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}$ προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης $V'_{\text{ενερ}}(r_c) = 0$ ως προς $|\mathbf{L}|$.

Τι συμβαίνει όμως αν η ενέργεια είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή της ενεργού δυναμικής ενέργειας; Τότε η ακτινική κίνηση θα είναι μια ταλάντωση πολύ μικρού πλάτους και κατά προσέγγιση αρμονική, όπως μάθαμε στο κεφάλαιο 4 (η προσέγγιση αυτή θα είναι τόσο καλύτερη, όσο η διαφορά μεταξύ ολικής ενέργειας και ελαχίστου της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι μικρότερη. Ξαναγράφοντας τη διατήρηση της ενέργειας σε αυτή την περίπτωση με αντικατάσταση της ενεργού δυναμικής ενέργειας από το Taylor ανάπτυγμά της μέχρι δεύτερη τάξη γύρω από την τιμή r_c

$$\cancel{V_{\text{ενερ}}(r_c)} + \Delta E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \cancel{V_{\text{ενερ}}(r_c)} + \cancelto{0}{V'_{\text{ενερ}}(r_c)}(r - r_c) + \frac{1}{2}V''_{\text{ενερ}}(r_c)(r - r_c)^2\,,$$

παρατηρούμε μια έκφραση ακριβώς ίδια με εκείνη του αρμονικού ταλαντωτή με $V''_{\text{ενερ}}(r_c)$ στη θέση του k του ταλαντωτή. Επομένως η αντίστοιχη συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων είναι

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{\text{ενερ}}(r_c)}{m}} = \sqrt{\frac{3|\mathbf{L}|^2/(mr_c^4) + V''(r_c)}{m}}\,. \tag{13}$$

Παράλληλα ενώ το σωματίδιο εκτελει τις ακτινικές ταλαντώσεις περιστρέφεται γύρω από το κέντρο με συχνότητα

$$\omega_\theta = \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}\,. \tag{14}$$

Η σταθερή στροφορμή $\mathbf{L}$ στις σχέσεις (13,14) είναι ακριβώς η στροφορμή της ακριβούς κυκλικής τροχιάς $\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}$ που γράψαμε παραπάνω. Για να καταλάβετε γιατί ισχύει αυτό φανταστείτε ότι αρχικά το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_c και δίνετε στο σωματίδιο μια πολύ μικρή ακτινική στιγμιαία ώθηση. Με τον τρόπο αυτό η ενέργεια μεγαλώνει ακριβώς κατά την κινητική ενέργεια της ακτινικής ταχύτητας που αποκτά το σώμα μετά την ώθηση (πριν δεν είχε ακτινική ταχύτητα), ενώ η στροφορμή του δεν αλλάζει αφού η αζιμουθιακή ταχύτητα που είχε πριν παραμένει αμετάβλητη. Η ποσότητα ΔE που γράψαμε παραπάνω είναι ακριβώς η παραπανίσια ενέργεια που διαταράσσει το σωματίδιο από την κυκλική του τροχιά. Έτσι η μεν γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου αλλάζει με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{m r_c^3 V'(r_c)}}{m(r_c + \delta r(t))^2} \simeq \sqrt{\frac{V'(r_c)}{m r_c}} \left(1 - 2\frac{\delta r(t)}{r_c}\right) . \tag{15}$$

Ο δεύτερος όρος στο ανάπτυγμα είναι ο αρμονικός ταλαντωτικός όρος που συζητήσαμε παραπάνω. Επομένως για πολύ μικρές τιμές του ΔE η ω_θ είναι κατά μέσο όρο σταθερή και ίση με

$$\bar{\omega}_\theta \simeq \sqrt{\frac{V'(r_c)}{m r_c}} . \tag{16}$$

Η δε γωνιακή ταχύτητα των ακτινικών ταλαντώσεων παίρνει τη μορφή

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3V'(r_c)/r_c + V''(r_c)}{m}} . \tag{17}$$

Αν η συνάρτηση της ενεργού δυναμικής ενέργειας ήταν τέτοια, ώστε οι δύο αυτές συχνότητες να σχηματίζουν έναν ρητό λόγο, οι σχεδον κυκλικές τροχιές μέσης ακτίνας r_c θα ήταν κλειστές. Συγκεκριμένα αν

$$\frac{\omega_r}{\bar{\omega}_\theta} = \frac{T_\theta}{T_r} = \frac{p}{q} ,$$

με p, q φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους, τότε μετά από q περιστροφές το σωματίδιο θα είχε ολοκληρώσει p ακτινικές ταλαντώσεις και η τροχιά θα ξαναπεναλαμβανόταν ακριβώς η ίδια με περίοδο $T = qT_\theta = pT_r$.

Αν λοιπόν υπάρχει κάποιο πεδίο το οποίο έχει την ιδιότητα να οδηγεί σε κλειστές τροχιές τα σωματίδια που εγκλωβίζονται στο πεδίο, θα πρέπει οι σχεδόν κυκλικές τροχιές να είναι και αυτές κλειστές, επομένως θα πρέπει να υπάρχει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των παραγώγων της δυναμικής ενέργειας του πεδίου:

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{\frac{3V'(r_c) + r_c V''(r_c)}{m r_c}}}{\sqrt{\frac{V'(r_c)}{m r_c}}} = \sqrt{\frac{3V'(r_c) + r_c V''(r_c)}{V'(r_c)}} \tag{18}$$

για κάθε r_c. Λύνοντας αυτή τη σχέση καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{V''(r_c)}{V'(r_c)} = \frac{C}{r_c}$$

όπου C είναι ο ρητός $(p/q)^2 - 3$. Αν θυμηθούμε ότι $V'(r) = -|\mathbf{F}(r)| = -F(r)$ η απαίτηση είναι

$$\log F(r_c) = \log r_c^C + A$$

όπου A η σταθερά ολοκλήρωσης.[10] Δηλαδή η δύναμη του πεδίου θα πρέπει να είναι της μορφής

$$F(r_c) = Br_c^C$$

με B κάποια τυχαία αρνητική σταθερά, ώστε η δύναμη του πεδίου να είναι ελκτική (ειδάλως δεν θα είχε νόημα να αναζητούμε κλειστές τροχιές).

(1) Για παράδειγμα για $p/q = 1$, βρίσκουμε $C = -2$, δηλαδή αντιστρόφου τετραγώνου σαν τη βαρυτική, ή τη δύναμη Coulomb από ετερόσημα φορτία. (2) Για $p/q = 2$, βρίσκουμε $C = +1$, δηλαδή μια δύναμη αρμονικού ταλαντωτή. Θα δείξουμε παρακάτω ότι μόνο αυτά τα δύο είδη κεντρικών πεδίων οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών και ανεξαρτήτως από το αν η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική (αρκεί να είναι φραγμένη). Όλα τα άλλα κεντρικά πεδία, τα υποψήφια για κλειστές τροχιές (π.χ. αυτό με $p/q = 1/2$, και $C = -2.75$) δεν καταφέρνουν να οδηγήσουν σε κλειστές τροχιές όταν αυτές αρχίζουν να αποκλίνουν από την κυκλική τροχιά.

Το γεγονός ότι η χαρακτηριστική δύναμη C στη συνάρτηση της δύναμης θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του -3 οφείλεται στο ότι δυνάμεις αντιστρόφου κύβου και ακόμη πιο απότομες $(1/r^{3+})$ δεν θα μπορούσαν καν να έχουν κυκλικές τροχιές, αφού δεν θα μπορούσαν να ικανοποιούν τη βασική απαίτηση $V'_{\text{ενερ}}(r_c) = 0$ και $V''_{\text{ενερ}}(r_c) > 0$. Ας δούμε γιατί. Έστω ότι η δυναμική ενέργεια του πεδίου είναι της μορφής $V(r) = -Br^{C+1}$ με $C \leq -3$ και $B > 0$ ώστε το πεδίο να είναι ελκτικό. Η δύναμη από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι της μορφής $F(r) = -V'(r) = B(C+1)/r^C$ δηλαδή ελκτική $(C+1 < 0)$ και αντιστρόφου κύβου και πάνω $C \leq -3$. Η ενεργός δυναμική ενέργεια θα είναι

$$V_{\text{ενερ}}(r) = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{B}{r^{-1-C}}.$$

Ο εκθέτης $-1 - C$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2, δηλαδή ξεπερνά τον εκθέτη της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας, ή στην ακραία περίπτωση είναι ίσος. Στην περίπτωση $C = -3$ η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση του r (έχει είτε τη μορφή $+1/r^2$, είτε την $-1/r^2$, ανάλογα με το ποιος από τους συντελεστές των δύο όρων της $V_{\text{ενερ}}$ είναι μεγαλύτερος), οπότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο (στην πρώτη περίπτωση η δυναμική ενέργεια είναι απωστική και το σωματίδιο μπορεί να περάσει το πολύ μια φορά κοντά στο κέντρο και στη συνέχεια θα απομακρυνθεί για πάντα στο άπειρο· στη δεύτερη περίπτωση το σωματίδιο είναι καταδικασμένο να συντριβεί στο κέντρο). Αν $C > -3$ θα υπάρχει σημείο όπου η ενεργός δυναμική ενέργεια θα παρουσιάζει ακρότατο, μόνο που αυτό θα είναι μέγιστο. Η κυκλική τροχιά (στη θέση του μεγίστου) θα είναι τότε ασταθής και η παραμικρή διαταραχή αυτής θα την έστελνε ανεπιστρεπτί είτε στο άπειρο είτε στο κέντρο.

[10] Η μορφή του πεδίου που θα οδηγούσε σε κλειστές σχεδόν κυκλικές τροχιές με ακτίνα μια συγκεκριμένη r_c, αλλά όχι για κάθε τιμή της r_c θα είχε μια σταθερά ολοκλήρωσης A που θα εξαρτώνταν από το r_c. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε ένα τεράστιο πλούτο πιθανών πεδίων που θα χαρακτηριζόταν από κλειστές τροχιές σε κτίνα r_c.

6 * Το θεώρημα του Bertrand

Το θεώρημα: Μεταξύ όλων των κεντρικών συντηρητικών πεδίων που διαθέτουν φραγμένες τροχιές, μόνο στα πεδία που χαρακτηρίζονται από δυναμική ενέργεια της μορφής $V(r) = -k/r$ και $V(r) = kr^2$ (με $k > 0$) όλες οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές.

Απόδειξη (στο πνεύμα της απόδειξης του Arnol'd): Θα υπολογίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περίκεντρων της τροχιάς. Σύμφωνα με τις σχέσεις (11,12) η γωνία αυτή είναι

$$\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = \frac{2|\mathbf{L}|}{m} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2}\right)}} \tag{19}$$

όπου $r_{\text{min}}, r_{\text{max}}$ είναι οι ακτίνες του περίκεντρου και του απόκεντρου που μηδενίζεται η υπόρριζη ποσότητα στον παρονομαστή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Με την αντικατάσταση $\xi = |\mathbf{L}|/(mr)$

$$\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = 2\int_{\xi_{\text{min}}}^{\xi_{\text{max}}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - \frac{2V[|\mathbf{L}|/(m\xi)]}{m} + \frac{2E}{m}}} \,. \tag{20}$$

Στη σχέση αυτή έχουν εναλλαχθεί οι ρόλοι των $\xi_{\text{min}}, \xi_{\text{max}}$ σε σχέση με τα $r_{\text{min}}, r_{\text{max}}$· δηλαδή $\xi_{\text{min}} = |\mathbf{L}|/(mr_{\text{max}})$ και $\xi_{\text{max}} = |\mathbf{L}|/(mr_{\text{min}})$.

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (1) Όταν η δυναμική ενέργεια του πεδίου είναι της μορφής $V(x) = \Gamma x^k$ με $k > 0$ και $\Gamma > 0$ και (2) όταν η δυναμική ενέργεια είναι της μορφής $V(x) = \Gamma x^k$ με $k < 0$ και $\Gamma < 0$.[11]

• Στην περίπτωση (1) η υπόρριζη ποσότητα μηδενίζεται για $E \to \infty$ στα σημεία

$$\xi_{\text{max}} \simeq 2E/m$$

και

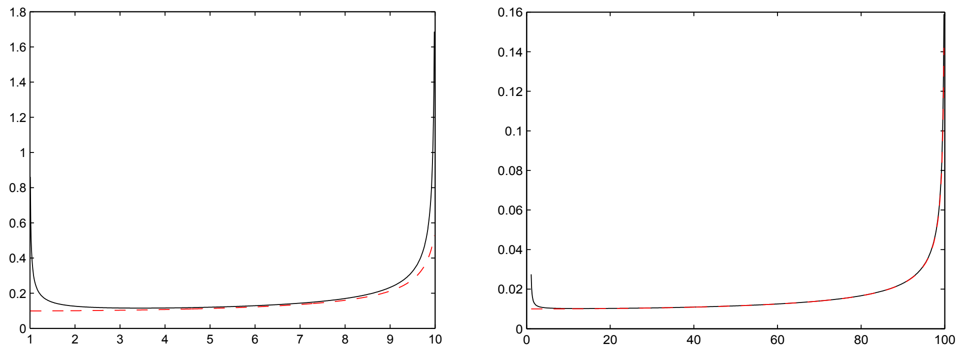
$$\xi_{\text{min}} \simeq (|\mathbf{L}|/m)\sqrt[k]{\Gamma/E}\,,$$

αφού καθώς το $E \to \infty$ (βλ. σχήμα 6) ο δεύτερος όρος γίνεται ασήμαντος για μεγάλα ξ, ενώ συγκριτικά με τον δεύτερο όρο, ο πρώτος όρος γίνεται ασήμαντος για πολύ μικρά ξ.[12] Παράλληλα στο σημείο

$$\xi_0 = \sqrt[k+2]{\Gamma k|\mathbf{L}|^k/m^{1+k}}\,,$$

[11] Η σχέση μεταξύ του συντελεστή k της δυναμικής ενέργειας και του συντελεστή C της δύναμης που συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο είναι $C = k - 1$ λόγω της σχέσης δύναμης - δυναμικής ενέργειας· συνεπώς στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε δυνάμεις της μορφής $F = Br^C$ με $C > -1$ και στη δεύτερη σε ίδιας μορφής δυνάμεις με $-3 < C < -1$. Θυμηθείτε ότι δυνάμεις με $C \leq -3$ δεν μπορούν καν να έχουν ευσταθή κυκλική τροχιά· πόσω μάλλον κλειστές τροχιές.

[12] Έτσι για να βρούμε το ξ_{max} λύνουμε την $(2E/m) - \xi^2 = 0$, ενώ για να βρούμε το ξ_{min} λύνουμε την $(2E/m) - (2\Gamma/m)[|\mathbf{L}|/(m\xi)]^k = 0$.



Σχήμα 6: Η μορφή της συνάρτησης $1/\sqrt{-\xi^2 - \frac{2V[|\mathbf{L}|/(m\xi)]}{m} + \frac{2E}{m}}$ (μαύρη καμπύλη) και $1/\sqrt{-\xi^2 + \frac{2E}{m}}$ (κόκκινη εστιγμένη καμπύλη) για δύο διαφορετικές τιμές του $2E/m$· (i) για $2E/m \simeq 10$ (αριστερό διάγραμμα) και (ii) για $2E/m \simeq 100$ (δεξιό διάγραμμα). Και στις δύο περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι ο εκθέτης της δυναμικής ενέργειας είναι $k = 1.5$. Είναι φανερό ότι καθώς $E \to \infty$ το ζητούμενο ολοκλήρωμα (20) τείνει στο πολύ απλούστερο (21).

ανεξαρτήτως από την E, η υπόρριζη ποσότητα εμφανίζει μέγιστο. Το ολοκλήρωμα λοιπόν της σχέσης (20) τείνει προσεγγιστικά στο

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ . \tag{21}$$

Το υπόλοιπο μέρος του ολοκληρώματος, στο όριο που $E \to \infty$ είναι αμελητέο συγκριτικά με το προσεγγιστικό που βρήκαμε παραπάνω. Επομένως μονάχα εκείνη η δυναμική ενέργεια που δίνει γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων $2 \times (\pi/2)$ στην περίπτωση των σχεδόν κυκλικών τροχιών έχει κάποια πιθανότητα να δίνει αυτή την τιμή για οποιαδήποτε τιμή της ενέργειας και επομένως να οδηγεί σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα $\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = \pi$ αντιστοιχεί σε $p/q = 2$ δηλαδή σε $C = 1$ στη συζήτηση που αναπτύξαμε για τις σχεδόν κυκλικές τροχιές, αφού μια τέτοια στροφή για μια πλήρη ακτινική ταλάντωση σημαίνει ότι η συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων είναι διπλάσια από τη συχνότητα περιστροφής. Βρίσκουμε λοιπόν ότι μοναδικό υποψήφιο για κλειστές τροχιές πεδίο της μορφής $V(r) = \Gamma r^k$ με $k > 0$ είναι το Γr^2 το οποίο οδηγεί σε δύναμη γραμμική με την απόσταση (ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής).

Αν επανέλθουμε τώρα στο ολοκλήρωμα (20) και ας αντικαταστήσουμε την συγκεκριμένη μορφή της δυναμικής ενέργειας· θα καταλήξουμε στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\Delta\theta^{C=1}_{\Pi\to\Pi} &= 2\int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2-\frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3\xi^2}+\frac{2E}{m}}} \\
&= 2\int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{-\xi^4+\frac{2E}{m}\xi^2-\frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3}}} \\
&= \int_{\xi^2_{\min}}^{\xi^2_{\max}} \frac{du}{\sqrt{-u^2+\frac{2E}{m}u-\frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3}}}\,, \qquad (22)
\end{aligned}$$

όπου $\xi^2_{\min}, \xi^2_{\max}$ είναι οι ρίζες της υπόρριζης ποσότητας του παρονομαστή. Όμως το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x_+-x)(x-x_-)}} \qquad (23)$$

για $x_+ > x_-$ είναι ίσο με π, ανεξαρτήτως των x_-, x_+. [13] Επομένως η γωνία από περιήλιο σε περιήλιο στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή ($C = 1$) είναι ακριβώς π για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες (θα το εξηγήσουμε καλύτερα αυτό στο επόμενο εδάφιο).

• Στην περίπτωση (2) ($k < 0, \Gamma < 0$) η υπόρριζη ποσότητα του ολοκληρώματος (20) λαμβάνει τη μορφή

$$-\xi^2-\frac{2\Gamma}{m}\left(\frac{m\xi}{|\mathbf{L}|}\right)^{|k|}+\frac{2E}{m}$$

με $\Gamma < 0$ και $0 < |k| < 2$ (αφού αναγκαστικά $C > -3$· βλ. υποσημείωση 7). Στο όριο που $E \to 0$ οι ρίζες της υπόρριζης ποσότητας είναι

$$\xi_{\min} = 0$$

και

$$\xi_{\max} = \sqrt[2-|k|]{\frac{2|\Gamma|}{m}\left(\frac{m}{|\mathbf{L}|}\right)^{|k|}}\,.$$

Μέσω των παραπάνω ορίων η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων στην περίπτωση αυτή είναι

$$\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = 2\int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2+\xi_{\max}^{2-|k|}\,\xi^{|k|}}}\,. \qquad (24)$$

[13] Είναι εύκολο να δείτε γιατί ισχύει αυτό μέσω της αντικατάστασης

$$x = \frac{x_+ + x_-}{2} + \frac{x_+ - x_-}{2}\sin\phi\,.$$

Με την αντικατάσταση $\chi = \xi/\xi_{\max}$ το προηγούμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int_0^1 \frac{d\chi}{\sqrt{\chi^{|k|} - \chi^2}}$$

και με μια δεύτερη αντικατάσταση $\chi = (\sin\phi)^{\frac{2}{2-|k|}}$ βρίσκουμε εύκολα ότι $\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = 2\pi/(2 - |k|)$.

Ένα πεδίο αυτής της μορφής για να παρουσιάζει ίδια στροφή του περικέντρου και σε τροχιές σχεδόν κυκλικές και σε τροχιές με $E \to 0$ (δηλαδή τροχιές που είναι οριακά φραγμένες) θα πρέπει να είναι

$$\frac{2\pi}{2-|k|} = \frac{2\pi}{p/q} = \frac{2\pi}{\sqrt{C+3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k+2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2-|k|}} \ .$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση την $|k| = 1$, δηλαδή την $k = -1$. Αυτό είναι ένα πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου ($C = k - 1$), σαν το βαρυτικό πεδίο ή το πεδίο Coulomb από ετερόσημο φορτίο (προκειμένου να είναι ελκτική η δύναμη).

Ας ελέγξουμε αν πράγματι ένα τέτοιο πεδίο οδηγεί σε κλειστές τροχιές για κάθε αρχική συνθήκη και όχι μόνο για σχεδόν κυκλικές, ή οριακά φραγμένες τροχιές (τα δύο όρια που εξασφάλισαν την κλειστότητα των τροχιών και μάλιστα με ίδιο ρητό λόγ p/q). Για $k = -1$

$$\Delta\theta_{\Pi\to\Pi}^{k=-1} = 2\int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - 2\Gamma\frac{\xi}{|\mathbf{L}|} + \frac{2E}{m}}} \ . \tag{25}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ακριβώς το (23), επομένως $\Delta\theta_{\Pi\to\Pi}^{k=-1} = 2\pi$.

Με το αποτέλεσμα αυτό ολοκληρώθηκε η διερεύνηση των πεδίων με κλειστές τροχιές. Τέτοια πεδία είναι μονάχα αυτό με δύναμη $\mathbf{F} \propto -\mathbf{r}$ (ή $V(r) \propto r^2$), όπου η τροχιά επαναλαμβάνεται μετά από περιστροφή π ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών και αυτό με δυναμική ενέργεια $V(r) \propto -1/r$ (δηλαδή δύναμη $\mathbf{F} \propto -\hat{\mathbf{r}}/r^2$), όπου η τροχιά επαναλαμβάνεται μετά από μια πλήρη περιστροφή 2π (για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε αρνητικές μόνο ενέργειες, ώστε η τροχιά να είναι φραγμένη).

7 Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε ειδικά την περίπτωση του ισότροπου αρμονικού ταλανωτή όπου η ελκτική δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και μάλιστα με ίδιο συντελεστή αναλογίας σε κάθε κατεύθυνση:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \ .$$

Αν ο συντελεστής αναλογίας k άλλαζε με την κατεύθυνση (ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής) δεν θα είχαμε συντηρητική δύναμη όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 2 του παρόντος κεφαλαίου. Παρά το γεγονός ότι η δύναμη αυτή είναι κεντρική και επομένως η ανάλυση της κίνησης σε γωνία περιστροφής και ακτινική θέση μοιάζει πιο ταιριαστή, η κίνηση αποκαλύπτει όλη της την απλότητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx\ , \\ m\ddot{y} &= -ky\ , \\ m\ddot{z} &= -kz\ . \end{aligned} \tag{26}$$

Η λύση και των τριών είναι αρμονικές ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$. Αν οι σταθερές αναλογίας δεν είναι όλες ίδιες τότε η δύναμη δεν είναι καν κεντρική, οπότε δεν διατηρείται η στροφορμή. Στην περίπτωση αυτή η γενική κίνηση δεν είναι επίπεδη[14] αλλά μπορεί να γεμίζει πυκνά[15] ένα ολόκληρο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις διπλάσιες των πλατών των τριών ταλαντωτών στους 3 άξονες.

Στον ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή που το πεδίο είναι κεντρικό και συντηρητικό με δυναμική ενέργεια[16]

$$V(r) = -\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} (-k\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} k r^2$$

η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε επίπεδες τροχιές. Έτσι αν ορίσει κανείς τους καρτεσιανούς άξονες έτσι ώστε $\mathbf{r}(0) = (x_0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, 0)$ η τροχιά θα εξελίσσεται στο επίπεδο $x - y$ (ο αρμονικός ταλαντωτής στον άξονα z θα μένει αδιέγερτος με μηδενικό πλάτος). Η κίνηση λοιπόν θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega} \sin(\omega t)\ , \\ y(t) &= \frac{v_{y0}}{\omega} \sin(\omega t)\ , \\ z(t) &= 0\ . \end{aligned} \tag{27}$$

Αναδιατάσσοντας αυτές τις σχέσεις μέχρι να καταλήξουμε στην τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ παίρνουμε την τροχιά

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{x_0}\frac{v_{x0}}{v_{y0}}\right)^2 + \left(y\frac{\omega}{v_{y0}}\right)^2 = 1 \text{ και } z = 0\ .$$

Η σχέση αυτή είναι μια δευτεροβάθμια έκφραση ως προς x και y, και δεδομένου ότι περιγράφει μια κλειστή καμπύλη (η κίνηση επαναλαμβάνεται μετά από $T = 2\pi/\omega$) η τροχιά δεν μπορεί να

[14] Θα μπορούσε να είναι επίπεδη διαλέγοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ η κίνηση θα διεξάγεται στο επίπεδο $x - y$. Παρόλ' αυτά η βασική ιδιότητα των κεντρικών δυνάμεων να μην αντιστρέφουν τη φορά της κίνησης δεν ισχύει σε ένα τέτοιο πεδίο. Φανταστείτε μια γρήγορη ταλάντωση στο x και μια αργή στο y. Μέχρι το y να φτάσει στην τιμή $y = 0$ μειούμενο, το x μπορεί να κινείται προς τα θετικά (αριστερόστροφη κίνηση) και αργότερα να κινείται προς τα αρνητικά (δεξιόστροφη κίνηση).

[15] Για να ισχύει αυτό θα πρέπει οι 3 συχνότητες να βρίσκονται σε άρρητη σχέση μεταξύ τους.

[16] Στο πεδίο αυτό που η δύναμη είναι άπειρης εμβέλειας προτιμάμε να θέσουμε το 0 της δυναμικής ενέργειας στο κέντρο.

είναι τίποτε άλλο από μια έλλειψη. Επειδή μάλιστα οι αντικαταστάσεις $x \to -x$ και ταυτόχρονα $y \to -y$ αποτελούν συμμετρία της παραπάνω εξίσωσης η έλλειψη έχει ως κέντρο το κέντρο της δύναμης (το σημείο $(0,0,0)$).

Ας βρούμε τώρα τους άξονες συμμετρίας αυτής της έλλειψης. Για το λόγο αυτό θα επιστρατεύσουμε το τέχνασμα των Kibble και Berkshire (από το βιβλίο *Classical Mechanics* των T.W.B. Kibble και F.H.Berkshire - *Imperial College Press*): Θα γράψουμε την κίνηση ως

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{28}$$

αλλά επειδή τα $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ (και τα δύο με διαστάσεις μήκους) είναι εν γένει λοξά το ένα σε σχέση με το άλλο, θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση αντί των $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ δύο καινούργια διανύσματα-μήκη: $\mathbf{C}, \mathbf{S}$, τα οποία θα απαιτήσουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο ($\mathbf{C} \perp \mathbf{S}$):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi)\ . \tag{29}$$

Ο λόγος που η θέση του σωματιδίου μπορεί να λάβει αυτή τη μορφή είναι ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου που μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ μπορεί να γραφεί και ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων διανυσμάτων του επιπέδου τα οποία μπορούμε εμείς να τα διαλέξουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο. Οι συντελεστές των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ θα είναι και αυτά αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου με συχνότητα ω και θα έχουν ακριβώς τη μορφή της (29) αν

$$\mathbf{C} \cos\phi + \mathbf{S} \sin\phi = \mathbf{r}_0 \quad \text{και} \quad -\mathbf{C} \sin\phi + \mathbf{S} \cos\phi = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\ .$$

Λύνοντας αντίστροφα αυτές τις σχέσεις θα έχουμε

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \cos\phi - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin\phi \quad \text{και} \quad \mathbf{S} = \mathbf{r}_0 \sin\phi + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \cos\phi\ . \tag{30}$$

Η επιπλέον απαίτηση ορθογωνιότητας των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ οδηγεί στη σχέση

$$0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} = \left[(\mathbf{r}_0)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \right)^2 \right] \frac{\sin 2\phi}{2} + \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$$

δηλαδή

$$\sin 2\phi = \frac{2\mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}}{\left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\right)^2 - (\mathbf{r}_0)^2}\ . \tag{31}$$

Επομένως με βάση τις (30,31) μπορούμε να κατασκευάσουμε τα $\mathbf{C}, \mathbf{S}, \phi$ και να γράψουμε τη θέση του ταλαντωτή στη μορφή (28). Η μορφή αυτή δείχνει πολύ πιο καθαρά την ελλειπτική κίνηση του σωματιδίου αφού τα διανύσματα $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ δεν είναι άλλα από τους ημιάξονες της έλλειψεις (ορθογώνιοι μεταξύ τους), ενώ η γωνία ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $\mathbf{C}$ με τον άξονα x (του διανύσματος $\mathbf{r}_0$), επομένως είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η έλλειψη.

Μια κατασκευαστική τεχνική παραγωγής των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ είναι η ακόλουθη. Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}k\mathbf{r}_0^2 \\
&= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}_0^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2[(\mathbf{v}_0/\omega)^2 + \mathbf{r}_0^2] \\
&= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2[-\mathbf{C}\sin(\omega t+\phi) + \mathbf{S}\cos(\omega t+\phi)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[\mathbf{C}\cos(\omega t+\phi) + \mathbf{S}\sin(\omega t+\phi)]^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2(\mathbf{C}^2 + \mathbf{S}^2) \ . \qquad (32)
\end{aligned}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας λοιπόν είναι

$$(\mathbf{v}_0/\omega)^2 + (\mathbf{r}_0)^2 = \mathbf{C}^2 + \mathbf{S}^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

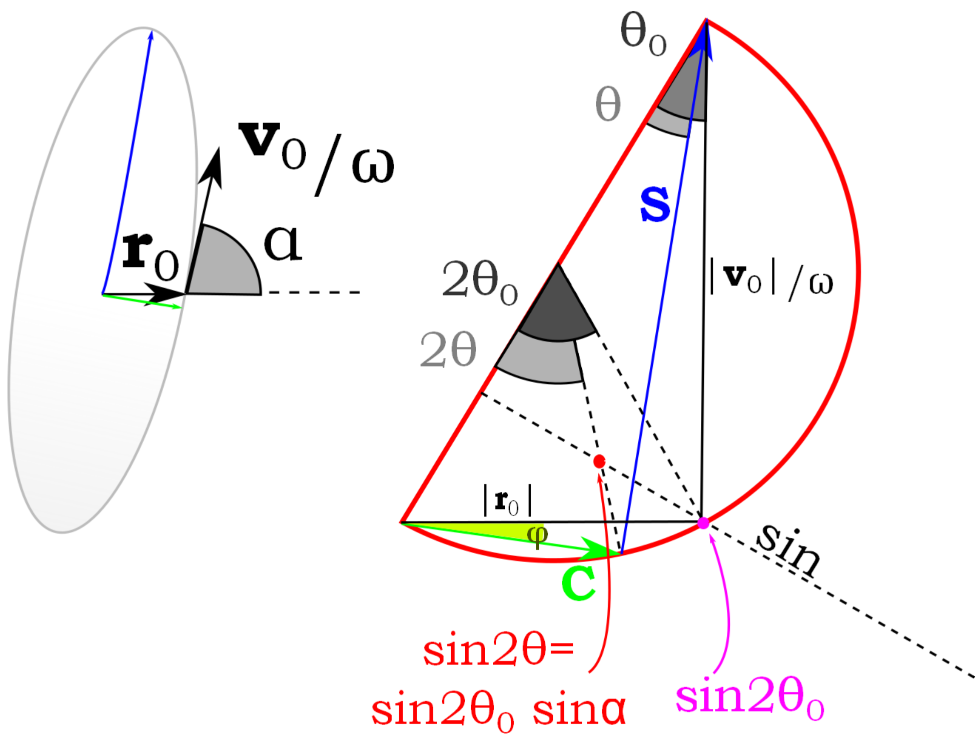
Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$, η αντίστοιχη υποτείνουσα είναι και υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζουν τα $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ (βλ. σχήμα 7). Ποια όμως ειναι η σωστή επιλογή των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ αφού όλα τα σημεία του κόκκινου ημικυκλίου έχουν την ιδιότητα να βλέπουν την υποτείνουσα των $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ υπό ορθή γωνία; Ο αρμονικός ταλαντωτής, όντας κεντρική δύναμη, διατηρεί και τη στροφορμή του:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \\
&= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= m\omega[\mathbf{C}\cos(\omega t+\phi) + \mathbf{S}\sin(\omega t+\phi)] \times [-\mathbf{C}\sin(\omega t+\phi) + \mathbf{S}\cos(\omega t+\phi)] \\
&= m\omega\, \mathbf{C} \times \mathbf{S} \ . \qquad (33)
\end{aligned}$$

Δεδομένου μάλιστα ότι τα $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ είναι ορθογώνια θα πρέπει να είναι

$$|\mathbf{C}|\ |\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0/\omega| = |\mathbf{r}_0|\ |\mathbf{v}_0/\omega|\ \sin\alpha = \frac{|\mathbf{L}|}{m\omega} \ , \qquad (34)$$

όπου α είναι η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ με τη θέση $\mathbf{r}_0$. Η δε κατεύθυνση των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} \times \mathbf{S}$ να έχει την ίδια φορά με το $\mathbf{L}$ (αν το $\mathbf{r}_0$ πρέπει να στραφεί ωρολογιακά –ή αντιωρολογιακά– για να συμπέσει με το $\mathbf{v}_0$, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το $\mathbf{C}$ προκειμένου να συμπέσει με το $\mathbf{S}$).



Σχήμα 7: Γεωμετρική κατασκευή των ορθογωνίων διανυσμάτων $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$ με βάση τα $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0/\omega$ και $\sin\alpha = v_{y0}/|\mathbf{v}_0|$. Καταρχάς κατασκευάζουμε το ημικύκλιο που δημιουργούν τα $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ τοποθετημένα ορθογώνια το ένα στο άλλο, αλλά με το $\mathbf{r}_0$ στην πραγματική του κατεύθυνση. Η διάμετρος αυτού του κύκλου είναι σύμφωνα με την (31), $2E/(m\omega^2)$. Το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο ορίζει τη γωνία θ_0. Στη συνέχεια, στον άξονα των ημιτόνων (εστιγμένη γραμμή κάθετα στη διάμετρο που διέρχεται από το μωβ σημείο συνάντησης των $|\mathbf{r}_0|, |\mathbf{v}_0|/\omega$) βρίσκουμε το κόκκινο σημείο που αντιστοιχεί σε ημίτονο ίσο με το $\sin\alpha$ φορές το ημίτονο του μωβ σημείου. Το σημείο αυτό ορίζει την επίκεντρη γωνία 2θ που υπακούει στη σχέση (35) και μέσω αυτής το σημείο του κύκλου απ' όπου διέρχονται τα διανύσματα $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$. Τα διανύσματα αυτά ορίζουν (βλ. αριστερή εικόνα) τους ημιάξονες της ελλειπτικής τροχιάς του σωματιδίου. Η στροφή της έλλειψης δίνεται από τη γωνία ϕ που σχηματίζει το $\mathbf{C}$ με το $\mathbf{r}_0$ που φαίνεται στο σχήμα.

Αν ονομάσουμε θ_0 τη γωνία του ορθογωνίου τριγώνου των $|\mathbf{r}_0|, |\mathbf{v}_0|/\omega$ που σχηματίζεται μεταξύ της υποτείνουσας και του $|\mathbf{v}_0|/\omega$ και θ τη γωνία του ορθογωνίου τριγώνου των $\mathbf{C}, \mathbf{S}$ που σχηματίζεται μεταξύ της υποτείνουσας και του $\mathbf{S}$ θα έχουμε

$$\tan\theta_0 = \frac{|\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{v}_0|/\omega}$$

και

$$\tan\theta = \frac{|\mathbf{C}|}{|\mathbf{S}|}$$

όποτε οι σχέσεις (31,33) μπορούν να ξαναγραφούν ως ακολούθως

$$|\mathbf{C}|^2(1+\tan^2\theta) = |\mathbf{r}_0|^2(1+\tan^2\theta_0)$$

και
$$|\mathbf{C}|^2 \tan\theta = |\mathbf{r}_0|^2 \tan\theta_0 \sin\alpha \ .$$
Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε
$$\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta_0}{1+\tan^2\theta_0}\sin\alpha \Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\theta_0 \ \sin\alpha \ . \tag{35}$$
Στο σχήμα 7 χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να κατασκευάσουμε το $\sin 2\theta$ στον άξονα των ημιτόνων των διπλασίων γωνιών (δηλαδή των επίκεντρων γωνιών). Με βάση αυτή τη γωνία βρίσκουμε τη θέση των $\mathbf{C}$ και $\mathbf{S}$ και η ελλειπτική τροχιά θα έχει τους άξονες συμμετρίας της κατά μήκος των $\mathbf{C}$ και $\mathbf{S}$. Το $\max\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης και το $\min\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Αν η στροφορμή έχει αντίθετη κατεύθυνση θα πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά του (μπλε) διανύσματος $\mathbf{S}$.

Από τη γεωμετρική αυτή κατασκευή μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

1. Για να είναι κυκλική η τροχιά θα πρέπει $|\mathbf{C}| = |\mathbf{S}|$, δηλαδή $\theta = \pi/4$. Αυτόματα λοιπόν σύμφωνα με τη σχέση(35) θα πρέπει και $\theta_0 = \pi/4$ και $\alpha = \pi/2$, δηλαδή τα $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{v}_0/\omega$ θα πρέπει να έχουν ίδια μέτρα και να είναι και ορθογώνια.

2. Για να είναι η τροχιά ευθύγραμμη θα πρέπει είτε $\theta = 0$ είτε $\theta = \pi/2$, οπότε είτε $\sin\alpha = 0$ ή $= \pi$, είτε $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi/2$. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{v}_0$ συγγραμικά, ενώ η δεύτερη περίπτωση σε $\mathbf{r}_0 = 0$ ή $\mathbf{v}_0 = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις η στροφορμή είναι μηδενική και όπως έχουμε επισημάνει αυτό σημαίνει ότι η κίνηση διενεργείται πάνω σε μια ευθεία που περνά από το κέντρο της δύναμης και καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες (το $\mathbf{r}_0$, το $\mathbf{v}_0$, ή και τα δύο εφόσον ειναι συγγραμμικά).

Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής, όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, είναι ένα από τα δύο μοναδικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές, με γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περίκεντρων ίση με π. Πράγματι οι δύο μικροί ημιάξονες της έλλειψης βρίσκονται ο ένας απέναντι από τον άλλο σχηματίζοντας γωνία π. Το $2\pi/\omega$ του ταλαντωτή είναι η περίοδος διαγραφής της έλλειψης, αλλά η περίοδος των ακτινικών ταλαντώσεων (από το απώτερο στο απώτερο σημείο, ή από το εγγύτερο στο εγγύτερο σημείο) είναι το ήμισυ αυτής (π/ω).

8 Η βαρυτική δύναμη

Το δεύτερο παράδειγμα κεντρικής δύναμης με κλειστές τροχιές είναι αυτό της βαρυτικής δύναμης, δηλαδή μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. Όχι μόνο παρουσιάζει αυτή τη γεωμετρική ιδιαιτερότητα η δύναμη αυτή, αλλά έχει και κεντρικό ρόλο στη λειτουργία του κόσμου, εφόσον οι βαρυτικές δυνάμεις αποτελούν την κυρίαρχη αλληλεπίδραση σε κοσμικό επίπεδο.

Από την εποχή του Νεύτωνα, που πρώτος μελέτησε την κίνηση σωμάτων στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων αντιστρόφου τετραγώνου και έδειξε ότι οι ελλειπτικές κινήσεις των πλανητών που ανακάλυψε ο Κέπλερ είναι απόρροια μιας τέτοιας δύναμης, έχουν κατασκευαστεί πολλοί τρόποι λύσης του προβλήματος αυτού. Η λύση που θα γράψουμε ακολουθεί το πνεύμα της γεωμετρικής απόδειξης του Νεύτωνα, αλλά σε μια πιο μοντέρνα γλώσσα με αναλυτική αντί γεωμετρική έκφραση.

Η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου σε ελκτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου παίρνει την εξής μορφή:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ . \tag{36}$$

Παρακινημένοι από την ανάλυση του δεξιού μέλους σε ακτινικό και (μηδενικό) αζιμουθιακό μέρος και δεδομένου ότι λόγω της κεντρικότητας της δύναμης η τροχιά θα είναι επίπεδη, θα φροντίσουμε να αναλύσουμε και το αριστερό μέλος σε πολικές συντεταγμένες (επί του επιπέδου της κίνησης).

$$m\frac{d(v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt} = -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ . \tag{37}$$

Η παραγώγιση ως προς t έχει δυσκολίες να ολοκληρωθεί[17], οπότε θα ξαναγράψουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγώγιση ως προς τη γωνία θ:

$$\begin{aligned} m\frac{d(v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta}\dot{\theta} &= -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{συνεπώς...} \\ m\frac{d(v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta}\frac{|\mathbf{L}|}{mr^2} &= -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ , \end{aligned} \tag{38}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μορφή της στροφορμής σε πολικές συντεταγμένες που είδαμε στο εδάφιο 2 του παρόντος κεφαλαίου. Η κοινή εξάρτηση από το $1/r^2$ και στα δύο μέλη καθιστά την εξίσωση πολύ πιο απλή (γεγονός που καθιστά την περίπτωση δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου εξαιρετική).

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις που ικανοποιούν τα μοναδιαία διανύσματα $d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$ (βλ. Κεφάλαιο 7) η εξίσωση κίνησης θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{d\theta}\hat{\mathbf{r}} + v_r\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dv_\theta}{d\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - v_\theta\hat{\mathbf{r}} &= -\frac{K}{|\mathbf{L}|}\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \\ \frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\frac{K}{|\mathbf{L}|} \quad &\text{και} \quad \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0\ . \end{aligned} \tag{39}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι δύο πεπλεγμένες γραμμικές εξισώσεις με 2 άγνωστες συναρτήσεις και έχουν μια πολύ απλή λύση. Όπως μάθαμε στην ανάλυση των ταλαντωτών η λύση του ομογενούς μέρους (αφού πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων) πρέπει να είναι μια εκθετική

[17] Το πρόβλημα αυτό το συναντήσαμε στις μονοδιάστατες δυνάμεις (Κεφάλαιο 3) που εξαρτώνται από τη θέση και το ξεπεράσαμε χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγώγιση ως προς τη θέση.

λύση της μορφής $e^{\lambda\theta}$ κοινή και για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις. Όσο για το μη ομογενές μέρος της πρώτης, αυτό καλύπτεται από την προφανή ειδική λύση $v_\theta^{(S)} = K/|\mathbf{L}|$. Έτσι δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής

$$v_r = Re^{\lambda\theta} \text{ και } v_\theta = \frac{K}{|\mathbf{L}|} + \Theta e^{\lambda\theta}$$

καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό γραμμικό σύστημα:

$$R\lambda - \Theta = 0 \text{ και } \Theta\lambda + R = 0$$

με λύση

$$\lambda = \pm i \text{ και } R = \mp i\Theta \ ,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} v_\theta(\theta) &= \frac{K}{|\mathbf{L}|} + \Theta_+ e^{i\theta} + \Theta_- e^{-i\theta} \ , && (40) \\ v_r(\theta) &= -i\Theta_+ e^{i\theta} + i\Theta_- e^{-i\theta} \ . && (41) \end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτές για να είναι πραγματικές πρέπει $\Theta_+ = \Theta_-^\star = (V_0/2)e^{i\theta_0}$ (μιγαδικά συζυγείς), οπότε

$$\begin{aligned} v_\theta(\theta) &= \frac{K}{|\mathbf{L}|} + V_0 \cos(\theta + \theta_0) && (42) \\ v_r(\theta) &= V_0 \sin(\theta + \theta_0) \ . && (43) \end{aligned}$$

Αν ξανασυνθέσουμε την ταχύτητα από τις πολικές της συνιστώσες βρίσκουμε

$$\mathbf{v}(\theta) = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{K}{|\mathbf{L}|}\hat{\boldsymbol{\theta}} + V_0 \hat{\mathbf{n}}(\theta_0) = \frac{K}{|\mathbf{L}|}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{V}_0 \ , \qquad (44)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}(\theta_0) = \sin\theta_0 \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_0 \hat{\mathbf{y}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία θ_0 με τον y-άξονα και $\pi/2 - \theta_0$ με τον x-άξονα ($\mathbf{V}_0$ είναι το διάνυσμα $V_0\hat{\mathbf{n}}(\theta_0)$). Με άλλα λόγια το διάνυσμα της ταχύτητας διαγράφει έναν κύκλο ακτίνας $K/|\mathbf{L}|$ γύρω από το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{V}_0$, δηλαδή η τροχιά της ταχύτητας (η επονομαζόμενη οδογράφος) είναι ένας κύκλος. Αυτό είναι το ενδιάμεσο βήμα του Νεύτωνα προκειμένου να καταλήξει στην ελλειπτική τροχιά των πλανητών.

Προφανώς οι παραπάνω λύσεις πρέπει να προσαρμοστούν ως προς τις παραμέτρους τους V_0 και θ_0, στις εκάστοτε αρχικές συνθήκες.

Στο σημείο αυτό θα έλεγε κανείς ότι αν και μέχρις εδώ τα πράγματα υπήρξαν εύκολα, η μετάβαση από τις συνιστώσες της ταχύτητας στις πολικές συντεταγμένες που θα καθορίσουν την τροχιά, με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων, ίσως να μην είναι τόσο απλή. Ευτυχώς όμως και το επόμενο βήμαείναι απλό, εξαιτίας της σχέσης που έχει η v_θ μέσω της διατήρησης της στροφορμής με την στιγμιαία ακτίνα:

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr} \ .$$

Έτσι η σχέση (42) δίνει αυτόματα την τροχιά σε πολική μορφή:

$$r(\theta) = \frac{|\mathbf{L}|/m}{\frac{K}{|\mathbf{L}|} + V_0 \cos(\theta + \theta_0)} = \frac{\mathbf{L}^2/(mK)}{1 + \frac{V_0|\mathbf{L}|}{K}\cos(\theta + \theta_0)} \; . \tag{45}$$

Το ότι υπήρξε διέξοδος στο να καταλήξουμε γρήγορα στη μορφή της τροχιάς, σημαίνει ότι και οι εξισώσεις θα μπορούσαν να ολοκληρωθούν με επιτυχία ακόμη και αν δεν καταφεύγαμε στη σχέση $v_\theta - r$. Δοκιμάστε μόνοι σας να σχηματίσετε το λόγο των εξισώσεων, γράφοντας $v_r/v_\theta = dr/(rd\theta)$ και να ολοκληρώσετε άμεσα τη σχέση που προκύπτει.

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη της πολικής εξίσωσης που προέκυψε, ας δούμε τι θα συνέβαινε αν η δύναμή μας δεν ήταν της μορφής $1/r^2$ και ακολουθούσαμε αυτή τη συλλογιστική. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι το κεντρικό πεδιο περιγράφεται από την ακόλουθη γενική συντηρητική δύναμη:

$$\mathbf{F} = -f(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

Το αντίστοιχο ζευγάρι εξισώσεων που θα λαμβάναμε στη θέση των (39) θα ήταν

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\frac{f(r)r^2}{|\mathbf{L}|} \text{ και } \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0 \; . \tag{46}$$

Ο μη σταθερός όρος $f(r)r^2$ θα δημιουργούσε σίγουρα προβλήματα, αλλά αν χρησιμοποιούσε κανείς τη δεύτερη διαφορική εξίσωση για να ξαναγράψει την πρώτη ως μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ως προς v_θ θα κσλούνταν να λύσει την

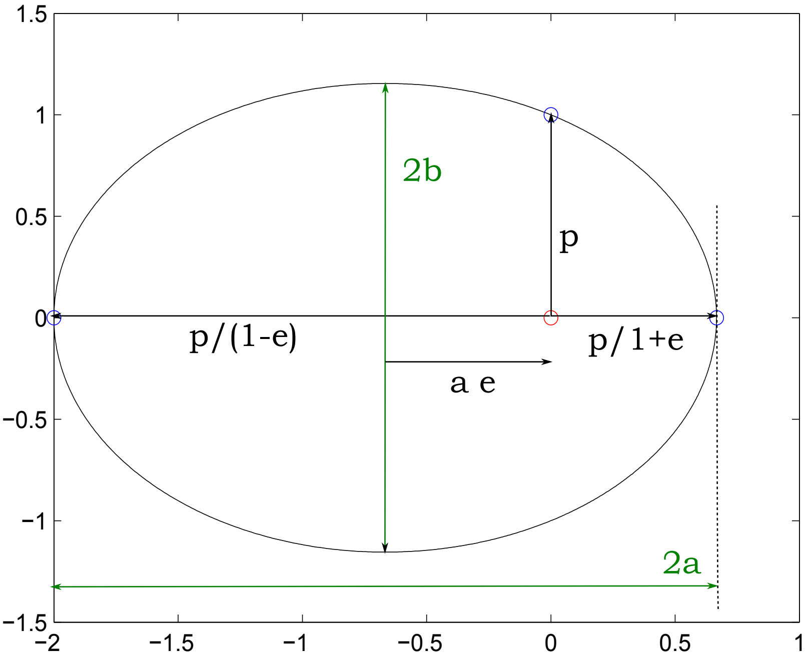
$$\frac{d^2 v_\theta}{d\theta^2} + v_\theta = \frac{f(\frac{|\mathbf{L}|}{m v_\theta})|\mathbf{L}|}{m^2 v_\theta^2}. \tag{47}$$

Αυτή είναι μια εν γένει μη γραμμική διαφορική εξίσωση, εκτός αν $f(x) = a/x^2$ ή $f(x) = a/x^3$, και επομένως πρέπει να αναζητήσει κανείς λύση σε στριφνές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης, για πολύ λίγες από τις οποίες υπάρχει γνωστή λύση (που μάλιστα φέρουν και το όνομα αυτού που τη σκαρφίστηκε). Αν πάντως βρει κανείς την $v_\theta(\theta)$ είναι εύκολο να λάβει και την άλλη συνιστώσα $v_r(\theta)$ με μια απλή παραγώγιση (από την άλλη εξίσωση κίνησης).

Η εξίσωση (47) προβάλλεται συνήθως στα βιβλία με τη μορφή μιας αγνώστου προέλευσης και αιτιολογίας νέας μεταβλητής $u = 1/r$, που οδηγεί στην τροχιά των πλανητών αλλά αφήνεται να εννοηθεί ότι οδηγεί αβίαστα και στην τροχιά κάθε άλλης κεντρικής συντηρητικής δύναμης. Η αλήθεια είναι ότι η εξίσωση αυτή είναι περιορισμένης ισχύος και η αξία της περιορίζεται δυστυχώς μόνο στη βαρυτική δύναμη (ή τη δύναμη Coulomb), η δράση της οποίας όμως στον πραγματικό κόσμο τυχαίνει να είναι σημαντική.

9 Τροχιές πλανητών - Νόμοι Κέπλερ

Εφοδιασμένοι με την πολική εξίσωση (45) στην περίπτωση δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου είμαστε έτοιμοι να μελετήσουμε τα γεωμετρικά της χαρακτηριστικά. Καταρχάς πρόκειται για την εξίσωση μιας έλλειψης[18] με τη μία της εστία της στην αρχή των αξόνων. Η ποσότητα $p = \mathbf{L}^2/(mK)$ καλείται *semi-latus rectum* (ορθό ημιπλάτος) της έλλειψης το οποίο δίνει μια κλίμακα μεγέθους της έλλειψης. Η ποσότητα $e = V_0|\mathbf{L}|/K$ καλείται εκκεντρότητα της έλλειψης και μετράει το πόσο στενόμακρη είναι η έλλειψη. Η εκκεντρότητα οφείλει να είναι $0 \leq e < 1$ προκειμένου να περιγράφει η (45) μια έλλειψη. Ειδάλλως η τροχιά είναι ανοικτή (παραβολή: $e = 1$ ή υπερβολή: $e > 1$). Η περίπτωση $e = 0$ περιγράφει έναν κύκλο ($r = p =$ σταθ). Τέλος η γωνία θ_0 είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η έλλειψη. Έτσι για $\theta = -\theta_0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο εγγύτερο στο κέντρο σημείο.[19]



Σχήμα 8: Μια ελλειπτική τροχιά με όλα της τα γεωμετρικά στοιχεία. Το κέντρο της δύναμης είναι η κόκκινη βούλα στην εστία της έλλειψης. Οι άλλοι τρεις μπλε κύκλοι είναι το περίκεντρο, η απόσταση p που αντιστοιχεί στο ορθό ημιπλάτος και το απόκεντρο.

Εναλλακτικά μια έλλειψη χαρακτηρίζεται από τους δύο της ημιάξονες. Ο μεγάλος ημιάξονας a είναι το μισό της μέγιστης διαμέτρου της, ενώ ο μικρός ημιάξονας της b, σχετίζεται με το a και την e ως $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Η απόσταση των δύο εστιών της είναι ae, ενώ το ορθο ημιπλάτος της είναι $p = a(1-e^2)$. Όλες αυτές οι σχέσεις προκύπτουν από τη βασική κατασκευαστική ιδιότητα

[18] Στην πραγματικότητα αυτή είναι η πολική εξίσωση μιας κωνικής τομής (έλλειψης, παραβολής, ή υπερβολής). Στο σημείο αυτό όμως επειδή το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε κλειστές τροχιές θα ασχοληθούμε μόνο με τις ελλείψεις.

[19] Αν $V_0 < 0$ μπορούμε να απορροφήσουμε το προσημό του στο $\cos(\theta + \theta_0)$ προσθέτοντας μια επιπλέον γωνία π στο cos.

της έλλειψης: Το άθροισμα των αποστάσεων όλων των σημείων της από τις δύο εστίες είναι σταθερό και ίσο με $2a$. Τέλος από την πολική εξίσωση της έλλειψης έχουμε για το περίκεντρο και το απόκεντρο

$$r_\Pi = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad \text{και} \quad r_A = \frac{p}{1-e} = a(1+e)\;. \tag{48}$$

Προκειμένου να συνδέσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης (a, b, p, e) με τα φυσικά χαρακτηριστικά του προβλήματος της κίνησης ενός σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο μιας σταθερής σημειακής μάζας (π.χ. τον Ήλιο[20]) θα υποθέσουμε ότι έχουμε στήσει τους άξονές μας βολικά, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι ο άξονας x από τον οποίο μετράμε τις γωνίες κατευθύνεται προς το περίκεντρο της τροχιάς (έτσι ώστε $\theta_0 = 0$). Θα έχουμε λοιπόν

$$r(\theta = 0) = r(0) = \frac{p}{1+e} = a(1-e). \tag{49}$$

Η δε αρχική ταχύτητα του σωματιδίου θα είναι $\mathbf{v}(0) = v(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}$, οπότε

$$v(0) = r(0)\dot{\theta}(0) = r(0)\frac{|\mathbf{L}|}{mr(0)^2} = \frac{|\mathbf{L}|/m}{a(1-e)}, \tag{50}$$

οπότε $r(0)v(0) = |\mathbf{L}|/m$ όπως είναι προφανές από την ορθογωνιότητα των $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ αρχικά. Διαιρώντας τη σχέση $a(1-e^2) = p = \mathbf{L}^2/(mK) = m[v(0)\, r(0)]^2/K$ με την (49) βρίσκουμε

$$e = \frac{mr(0)v(0)^2}{K} - 1 \tag{51}$$

και λύνοντας ως προς a

$$a = \frac{mv(0)^2 r(0)^2/K}{1-e^2} = \frac{mv(0)^2 r(0)^2/K}{1-\left(\frac{mr(0)v(0)^2}{K} - 1\right)^2} = \ldots = \frac{r(0)}{2 - \frac{mr(0)v(0)^2}{K}}\;. \tag{52}$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις συνδέουν τα κινηματικά στοιχεία της τροχιάς στο περίκεντρο με τα γεωμετρικά στοιχεία της έλλειψης. Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής των a, e βασιζόμενος στις διατηρούμενες ποσότητες της στροφορμής και της ενέργειας (οι οποίες θα μπορούσαν να υπολογιστούν σε κάθε σημείο της τροχιάς):

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2}mv(0)^2 - \frac{K}{r(0)}$$

δίνει μετά από κάποιες πράξεις

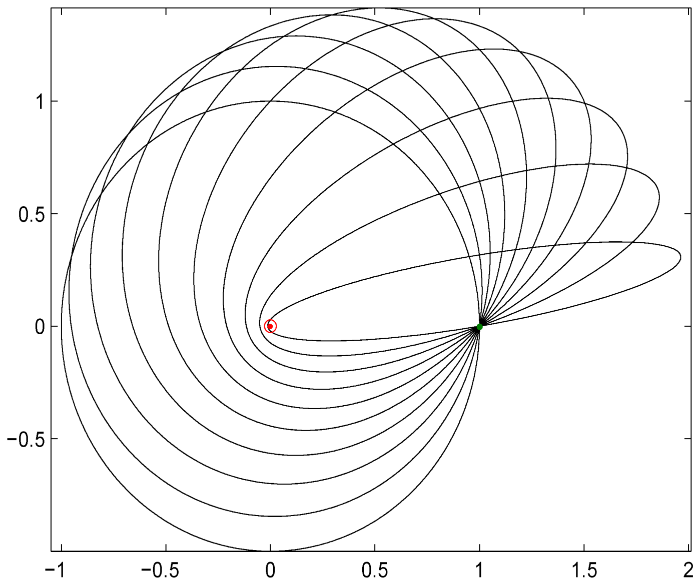
$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\mathbf{L}^2}{mK^2}} \tag{53}$$

[20]Αν και δεν ειναι σημείο ο Ήλιος, αλλά σφαίρα, συμπεριφέρεται όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 13 ως σημείο.

και

$$a = \frac{K}{-2E}\ . \tag{54}$$

Παρατηρούμε ότι ενώ η εκκεντρότητα εξαρτάται και από τις δύο σταθερές $E, |\mathbf{L}|$ ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης εξαρτάται αποκλειστικά από την ενέργεια. Προσέξτε ότι η 2η σχέση έχει νόημα μόνο για αρνητικές ενέργειες οι οποίες εξασφαλίζουν φραγμένες τροχιές. Εξάλλου μόνο για τέτοιες ενέργειες, η έκφραση για την εκκεντρότητα λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Έτσι αν βληθεί ένα σωματίδιο από μια θέση θέση $\mathbf{r}(0)$ μακριά από το βαρυτικό κέντρο με ταχύτητα $\mathbf{v}(0)$ που σχηματίζει γωνία ϕ με το διάνυσμα $\mathbf{r}(0)$, η μεν ενέργεια E δεν θα εξαρτάται από τη γωνία ϕ, αφού η ενέργεια συνδέεται μόνο με την τιμή $|\mathbf{v}_0|$ και $|\mathbf{r}(0)|$ και όχι με τη μεταξύ τους διάταξη, ενώ η στροφορμή $|\mathbf{L}|$ θα εξαρτάται άμεσα από τη γωνία ϕ. Το σύνολο λοιπόν των σωματιδίων που βάλλονται με ίδια $r(0), v(0)$ αλλά διαφορετικές ϕ θα εκτελέσουν διαφορετικές ελλείψεις γύρω από το κέντρο. Όλες οι ελλείψεις θα έχουν ίδιο μεγάλο ημιάξονα, αλλά διαφορετική εκκεντρότητα και προσανατολισμό (βλ. σχήμα 9).



Σχήμα 9: Ελλειπτικές τροχιές με κέντρο το κόκκινο σημείο. Όλες διαγράφονται από σωματίδια που βάλλονται από το πράσινο σημείο με ίδια ταχύτητα αλλά διαφορετική γωνία βολής. Το αποτέλεσμα είναι ελλείψεις διαφορετικής εκκεντρότητας αλλά ίδιου μεγάλου ημιάξονα.

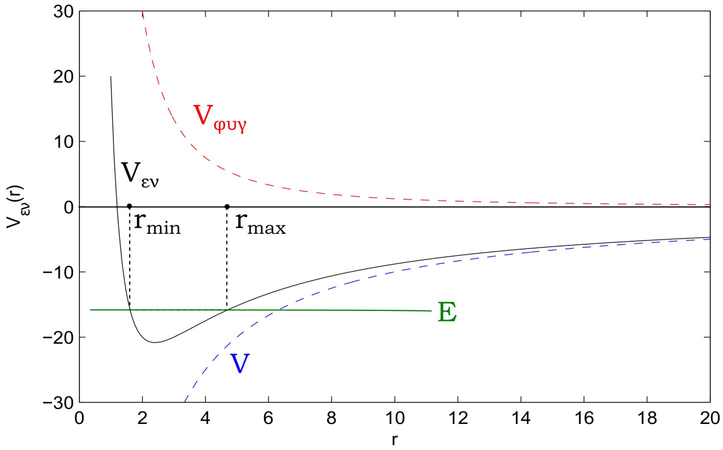
Η μονοπαραμετρικότητα αυτή του a σχετίζεται με μια ιδιαίτερη συμμετρία που κρύβει το εν λόγω κεντρικό δυναμικό και οφείλεται ακριβώς στο νόμο αντιστρόφου τετραγώνου. Πρόκειται ακριβώς για το ίδιο αίτιο που καθιστά το άτομο του υδρογόνου, που βασίζεται στη δύναμη

Coulomb η οποία είναι και αυτή αντιστρόφου τετραγώνου, να έχει ενεργειακό φάσμα ανεξάρτητο της στροφορμής του ηλεκτρονίου. Η ενεργειακή στάθμη του καθορίζεται από ένα μόνο κβαντικό αριθμό.[21]

Ας ξαναδούμε τώρα την ελλειπτική λύση που βρήκαμε παραπάνω, υπό το πρίσμα της γενικής αντιμετώπισης των κεντρικών συντηρητικών δυνάμεων που εξετάσαμε στο εδάφιο 3 του παρόντος κεφαλαίου. Η ενεργός δυναμική ενέργεια για μια ελκτική, κεντρική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου έχει τη μορφή

$$V_{\text{ενερ}} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} \,. \tag{55}$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια στις μεν πολύ μικρές ακτίνες r συμπεριφέρεται όπως η φυγοκεντρική



Σχήμα 10: Το διάγραμμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας για τη βαρυτική δύναμη, πάνω στο οποίο είναι σημειωμένη η ολική ενέργεια και οι ακραίες ακτίνες της κίνησης r_{min} (περίκεντρο) και r_{max} (απόκεντρο).

δυναμική ενέργεια αφού $1/r^2 >> 1/r$ για r πολύ μικρό (μικρό σε σύγκριση με τι;), ενώ για r πολύ μεγάλο συμπεριφέρεται όπως η δυναμική ενέργεια του πεδίου ($1/r >> 1/r^2$). Έτσι ο φυγοκεντρικός όρος δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να προσκρούσει στο κέντρο (το κρατάει πάντα σε ασφαλή απόσταση[22]). Παράλληλα η ελκτική δύναμη δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να φτάσει σε άπειρη απόσταση και το επαναφέρει και πάλι κοντά στην περιοχή του κέντρου (περίπτωση κομητών), αρκεί η ολική ενέργεια να είναι χαμηλότερη από το 0 ώστε το σωματίδιο

[21] Στην κβαντομηχανική που διέπει τη "μηχανική λειτουργία" των ατόμων η μονοπαραμετρικότητα αυτή ονομάζεται *εκφυλισμός*, αφού δύο διαφορετικές καταστάσεις καθοριζόμενες από διαφορετικά σύνολα κβαντικών αριθμών, έχουν ίδια τιμή σε κάποιο από τα μετρούμενα μεγέθη τους.

[22] Στην κβαντομηχανική συμπεριφορά των σωματιδίων υπάρχει άλλος ένας επιπλέον φυσικός νόμος –η αρχή της αβεβαιότητας– που αποτρέπει να "φτάσει" το σωματίδιο στο κέντρο ακόμη και όταν η στροφορμή είναι 0 οπότε λείπει η φυγοκεντρική απώθηση.

να μένει εγκλωβισμένο στο πηγάδι της ενεργού δυναμικής ενέργειας που σχηματίζεται (βλ. σχήμα 10). Η μηδενική αυτή ενέργεια αντιστοιχεί στην ταχύτητα διαφυγής που θα πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταφέρει να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο, ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης της ταχύτητας αυτής:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_{0(\text{διαφ})}^2 - \frac{K}{r_0} = 0\,. \tag{56}$$

Ανάλογα με το ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας διαφυγής $\mathbf{v}_{0(\text{διαφ})}$ σε σχέση με το $\mathbf{r}_0$ το σωματίδιο θα ακολουθήσει μια διαφορετική (οριακή) έλλειψη που δεν θα κλείσει ποτέ[23] και θα φτάσει σε άπειρη απόσταση σε άπειρο χρόνο. Η μοναδική, κάπως ανώμαλη, περίπτωση είναι αυτή που το σωματίδιο βάλλεται με την ταχύτητα διαφυγής προς το κέντρο. Η στροφορμή τότε θα είναι μηδενική, όπως και η φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια, οπότε επιτρέπεται στο σωματίδιο να φυάσει στο κέντρο με άπειρη μάλιστα ταχύτητα. Κανονικά όμως αν αναλύσουμε αυτή την περίπτωση ως το όριο των περιπτώσεων με $|\mathbf{L}| \neq 0$ καθώς το $|\mathbf{L}| \to 0$ το σωματίδιο φτάνοντας στη σχεδόν μηδενική απόστασή του από το κέντρο "ανακρούει πρύμναν" και επιστρέφει στο ταξίδι της διαφυγής περνώντας από το σημείο εκκίνησης. Προφανώς όλη αυτή ανάλυση αναφέρεται σε ένα κέντρο με μάζα αλλά χωρίς διαστάσεις! Κάτι τέτοιο είναι μη υλοποιήσιμο πρακτικά, οπότε ένα σύνολο τροχιών που ξεκινούν με ταχύτητα διαφυγής θα καταλήξουν να προσκρούσουν στο κεντρικό βαρυτικό σώμα και δεν θα καταφέρουν να ξεφύγουν από τα βαρυτικά δεσμά παρόλο που ξεκίνησαν με τις κατάλληλες κινηματικές προϋποθέσεις.

Η τιμή $E = 0$, που συνδέεται με την ταχύτητα διαφυγής, διαχωρίζει τις τροχιές σε ανοικτές ($E > 0$) και κλειστές ($E < 0$) αφού για $r \to \infty$ η ενεργός δυναμική ενέργεια τείνει στο 0. Αν η ολική ενέργεια ξεπεράσει αυτή την τιμή το σωματίδιο θα φύγει για πάντα στο άπειρο.[24] Αν η ολική ενέργεια πέσει κάτω από την τιμή αυτή κατωφλίου, το σωματίδιο θα κινείται σε μια έλλειψη μεταξύ δύο ακραίων ακτινικών θέσεων

$$r_\Pi \leq r \leq r_A.$$

Είδαμε στο εδάφιο σχετικά με το θεώρημα του Bertrand ότι η συχνότητα της ακτινικής ταλάντωσης σε ένα τέτοιο πεδίο συμπίπτει με τη συχνότητα περιστροφής με αποτέλεσμα η τροχιά να είναι πάντα[25] κλειστή ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Η μορφή της τροχιάς καθιστά το γεγονός αυτό προφανές. Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε γωνία $\theta = 0$ στο περίκεντρο δηλαδή σε $r_{\text{min}} = p/(1+e) = a(1-e)$, όταν στραφεί κατά γωνία $\theta = \pi$ θα βρεθεί στο απόκεντρο $r_{\text{max}} = p/(1-e) = a(1+e)$, δηλαδή θα ολοκληρώσει μισή ακτινική ταλάντωση[26] έχοντας στραφεί κατά π. Επομένως σε μια πλήρη στροφή θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ακτινική ταλάντωση και η τροχιά θα κλείσει. Οι αρχικές συνθήκες επηρρεάζουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης, όπως είδαμε παραπάνω, αλλά η έλλειψη θα είναι πάντα έλλειψη.

[23] Η καμπύλη αυτή ονομάζεται παραβολή.

[24] Όπως είπαμε παραπάνω η περίπτωση $E = 0$ είναι η οριακή περίπτωση που διαχωρίζει τα δύο είδη τροχιών, η οποία και αυτή οδηγεί το σωματίδιο σε άπειρη απόσταση.

[25] Για $E < 0$ ώστε να είναι σίγουρα φραγμένη.

[26] Η συνάρτηση $r(\theta)$ με $\theta_0 = 0$ στην (45) είναι μονοτόνως αύξουσα στο διάστημα $\theta \in [0, \pi]$.

Το μόνο στοιχείο που μέχρι τώρα έχουμε παραλείψει να αναφέρουμε είναι πως συνδέονται όλα τα παραπάνω με την παράμετρο χρόνος. Το πέρασμα από την εξίσωση κίνησης ως διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο, σε διαφορική εξίωση ως προς το θ μας οδήγησε στο σχήμα της τροχιάς αλλά όχι και στην εξέλιξη αυτής. Θα επαναφέρουμε τώρα αυτή την παράμετρο η οποία αποκτά και ιδιαίτερη σημασία όταν θα πρέπει να σχεδιάσουμε διαστημικά ταξίδια στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή της Γης, ή κάποιου άλλου πλανήτη. Θα έχουμε λοιπόν ότι ο χρόνος μετάβασης από το περίκεντρο ($\theta = 0$) σε μια οποιαδήποτε θέση στην τροχιά που αντιστοιχεί σε γωνία περιστροφής θ είναι

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t dt' = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\dot{\theta}} = \frac{m}{|\mathbf{L}|}\int_0^\theta r(\theta')^2\, d\theta' = \frac{mp^2}{|\mathbf{L}|}\int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+e\cos\theta')^2} \\ &= \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2}\int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+e\cos\theta')^2} \end{aligned} \tag{57}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ένα από τα δύσκολα ολοκληρώματα για τα οποία δεν υπάρχει μια απλή αναλυτική έκφραση. Αυτό εξηγεί την αποφυγή της απευθείας ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης ως προς το χρόνο. Οι αστρονόμοι (με πρώτο τον ίδιο τον Κέπλερ που προσπάθησε να υπολογίσει προσεγγιστικά αυτό το ολοκλήρωμα με επαναληπτικές μεθόδους) για να αποφύγουν αυτή τη δυσκολία επινόησαν μια αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta} = 1 - e\cos\xi\ . \tag{58}$$

Η νέα αυτή μεταβλητή ξ έχει παρόμοια μονότονη εξέλιξη με τη θ και μάλιστα για $\theta = 0$ δίνει $\xi = 0$, για $\theta = \pi$ δίνει $\xi = \pi$, για $\theta = 2\pi$ δίνει $\xi = 2\pi$. Στις ενδιάμεσες γωνίες όμως δεν είναι $\theta = \xi$, αλλά είναι $\theta > \xi$ για $0 < \theta < \pi$ (η $\xi(\theta)$ έχει θετική 2η παράγωγο) και $\theta < \xi$ για $\pi < \theta < 2\pi$ (η $\xi(\theta)$ έχει αρνητική 2η παράγωγο). Με αυτή την αλλαγή το ολοκλήρωμα της (57) μετασχηματίζεται (μετά από αρκετές πράξεις) στο

$$\int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+e\cos\theta')^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\int_0^{\xi(\theta)} d\xi'(1-e\cos\xi')$$

το οποίο υπολογίζεται πολύ εύκολα. Μέσω αυτού λοιπόν βρίσκουμε

$$t = \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1-e^2)^{3/2}}\left[\xi(\theta) - e\sin\xi(\theta)\right]\ , \tag{59}$$

ενώ η ακτινική θέση του σωματιδίου είναι

$$r(\theta(\xi)) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = a\left[1 - e\cos\xi(\theta)\right]\ . \tag{60}$$

Η νέα αυτή μεταβλητή $\xi(\theta)$, μέσω της οποίας μπορεί να γράψει κανείς σε παραμετρική μορφή τη σχέση θέσης (r, θ) και χρόνου t, είναι γνωστή ως *mean anomaly* (μέση ανωμαλία).[27]

[27]Είναι μια ψεύτικη γωνία που εξελίσσεται κατά μέσο όρο όπως και η ίδια η γωνία θ.

Τώρα πλέον έχουμε όλες τις εκφράσεις προκειμένου να συσχετίσουμε την περίοδο της τροχιάς με τα φυσικά της χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα αν θέσουμε $\xi = 2\pi$, τότε $\theta = 2\pi$ (η τροχιά έχει ολοκληρώσει μια πλήρη έλλειψη) και

$$T = \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1-e^2)^{3/2}}\left[2\pi - e\sin(2\pi)\right] = 2\pi\frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1-e^2)^{3/2}}\ .$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή της εκκεντρότητας που βρήκαμε προηγουμένως, (53), και στη συνέχεια την έκφραση για τον μεγάλο ημιάξονα, (54), καταλήγουμε στη σχέση

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{K}}\ . \tag{61}$$

Αυτή η σχέση είναι ακριβώς η έκφραση του 3ου νόμου του Κέπλερ, στην οποία κατέληξε ο Κέπλερ κατόπιν επισταμένων αστρονομικών παρατηρήσεων των γνωστών τότε πλανητών. Ο Κέπλερ βέβαια κατέληξε σε αυτή τη σχέση περιόδου-μεγάλου ημιάξονα εμπειρικά μετά από προσπάθειες δέκα ετών να βρει την «αρμονική» σχέση που συνδέει όλους τους πλανήτες, παρακινημένος μάλλον από την ιδεοληψία-διαίσθηση ότι υπάρχει κάποιος αριθμητικός νόμος που διέπει τα ουράνια σώματα.

Η αναλυτική εξαγωγή του 3ου νόμου του Κέπλερ που παρουσιάσαμε είναι αρκετά τεχνική. Γι' αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε και έναν άλλο τρόπο που είναι πιο φυσικός (και ακολουθεί και το γεωμετρικό πνεύμα των Νευτώνειων επιχειρημάτων): Σύμφωνα με τη σχέση που χρησιμοποιήσαμε για να εξηγήσουμε το 2ο νόμο του Κέπλερ είναι

$$|\mathbf{L}| = 2m\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2m\frac{\mathcal{E}_{\text{έλλειψης}}}{T} = 2m\frac{\pi ab}{T}\ . \tag{62}$$

Παράλληλα

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) = ma(1-e)\left[V_0 + \frac{K}{|\mathbf{L}|}\right]\ .$$

Η αντικατάσταση της αρχικής ταχύτητας με $V_0 + /|\mathbf{L}|$ στηρίζεται στη σχέση (44) αν αναζητήσουμε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας (αυτής που αντιστοιχεί στο περίκεντρο). Τέλος αν συνδέσουμε την παράμετρο V_0 (την ακτίνα της οδογράφου) με την εκκεντρότητα (βλ. σχέση (45)) θα έχουμε

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) = ma(1-e)\left[e\frac{K}{|\mathbf{L}|} + \frac{K}{|\mathbf{L}|}\right] = ma(1-e^2)\frac{K}{|\mathbf{L}|}$$

δηλαδή

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{maK(1-e^2)}.$$

Εισάγωντας την έκφραση αυτή στην (62) λαμβάνουμε την

$$\sqrt{maK\cancel{(1-e^2)}} = 2\pi ma^2\cancel{\sqrt{1-e^2}}/T \tag{63}$$

η οποία καταλήγει και πάλι στον 3ο νόμο του Κέπλερ που εξαγάγαμε προηγουμένως αναλυτικά. Ο συντελεστής K στις παραπάνω σχέσεις είναι για τη βαρυτική δύναμη (βλ. Κεφάλαιο Βαρύτητα) GMm, όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M η μάζα του βαρυτικού κέντρου (του Ήλιου αν μελετάμε τις κινήσεις των πλανητών γύρω του, ή του εκάστοτε πλανήτη αν ενδιαφερόμαστε για τις τροχιές των δορυφόρων του πλανήτη αυτού), και m η μάζα του σωματιδίου που κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από το βαρυτικό κέντρο.

10 Σκέδαση

Σκέδαση συμβαίνει όταν σωματίδια προσπίπτουν σε εμπόδια και αλλάζουν πορεία. Ο τρόπος που αλλάζουν πορεία μπορεί να μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για το είδος και τη μορφή της αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα μεταξύ των σωματιδίων και των εμποδίων.

Το παράδειγμα σκέδασης που θα αναλύσουμε θα είναι εξαιρετικά απλό και θα μας δώσει τη δυνατότητα να καταλάβουμε διαισθητικά τις νέες φυσικές ποσότητες μέτρησης που θα εισαγάγουμε.

Θα υποθέσουμε ότι σημειακά σωματίδια κινούμενα στον άξονα x με ταχύτητα v_0 προσπίπτουν πάνω σε μια σκληρή αδιαπέραστη και ακλόνητη σφαίρα ακτίνας R με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Η δυναμική ενέργεια του "πεδίου" της σφαίρας έχει τη μορφή

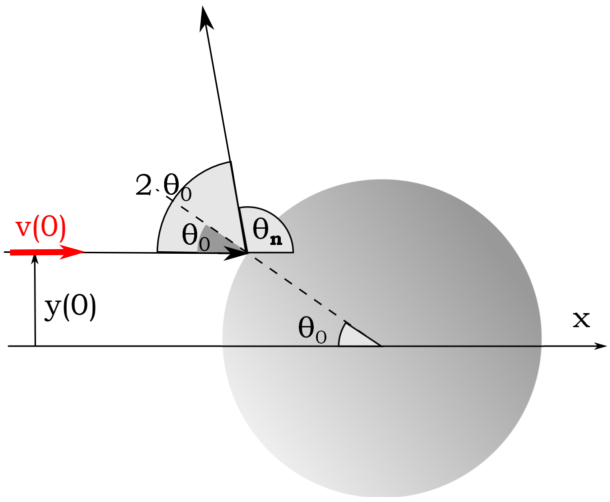
$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{για } r > R \\ +\infty, & \text{για } r \leq R \, . \end{cases}$$

Η φορμαλιστική αυτή έκφραση του πεδίου μας περιγράφει έναν χώρο (εκτός της σφαίρας) που το σωματίδιο είναι ελεύθερο, και έναν απαγορευμένο χώρο (εντός της σφαίρας). Το πεδίο αυτό είναι κεντρικό παρόλο που δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση από το r και το πεδίο είναι ουσιαστικά απών. Αν το κεντρικό σώμα δεν ήταν μια σκληρή σφαίρα, αλλά ένα σκληρό ελλειψοειδές, το αντίστοιχο πεδίο δεν θα ήταν κεντρικό, αφού το σύνορο που θα άλλαζε τιμή θα ήταν μια συνάρτηση $r(\theta)$.

Τα κεντρικά πεδία όπως μάθαμε διατηρούν τη στροφορμή. Αυτό σημαίνει ότι η στροφορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου θα διατηρείται όχι μόνο προ της κρούσης στη σφαίρα, αλλά και κατά τη διάρκεια αυτής. Λόγω αξονικής συμμετρίας του προβλήματος γύρω από τον άξονα x, θα υποθέσουμε ότι το σωματίδιο του οποίου θα μελετήσουμε την κίνηση, κινείται επί του επιπέδου $x - y$ και εξαιτίας της διατήρησης της στροφορμής θα παραμείνει σε αυτό το επίπεδο για πάντα. Το σωματίδιο θα συγκρουστεί με τη σκληρή σφαίρα αν $|y(0)| < R$, το δε σημείο πρόσκρουσής του στη σφαίρα θα χαρακτηρίζεται από τη γωνία $\theta_0 = \pi - \sin^{-1}(\mathbf{y}(0)/R)$. Η δε στροφορμή του θα είναι

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0) = m(x(0), y(0), 0) \times (v(0), 0, 0) = my(0)v(0) = mR\sin\theta_0 v(0) \, .$$

Μετά την κρούση, το σωματίδιο θα κινείται κατά μήκος κάποιας ευθείας που διέρχεται από το σημείο της κρούσης και έχει κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta_n + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta_n$. Δεδομένου μάλιστα της



Σχήμα 11: Σκέδαση σωματίου σε σκληρή σφαίρα.

περιγραφής του πεδίου μέσω μιας δυναμικής ενέργειας υπονοείται ότι το πεδίο είναι συντηρητικό, δηλαδή η κρούση είναι ελαστική. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι ίδιου μέτρου με την ταχύτητα πριν. Η στροφορμή λοιπόν του σωματιδίου αμέσως μετά την κρούση (και έκτοτε) θα είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0, 0)\times\hat{\mathbf{n}}\, v(0)\\ &= mRv(0)(\cos\theta_0,\sin\theta_0,0)\times(\cos\theta_n,\sin\theta_n,0)\\ &= mRv(0)(\cos\theta_0\sin\theta_n-\sin\theta_0\cos\theta_n)\\ &= mRv(0)\sin(\theta_n-\theta_0)\ . \end{aligned} \tag{64}$$

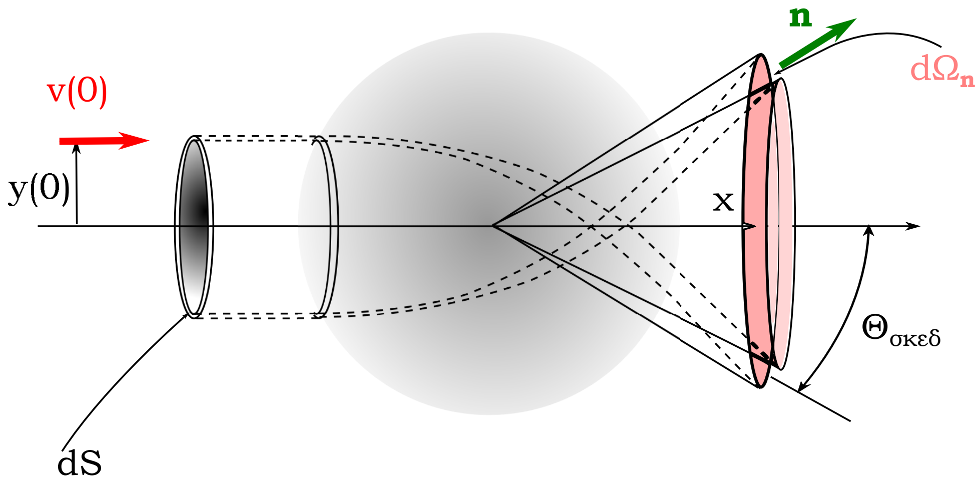
Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\sin\theta_0 = \sin(\theta_n - \theta_0)$, δηλαδή $\theta_n = 2\theta_0$ ή $\theta_n = \pi - 2\theta_0$. Αφού για θ_0 το σωματίδιο αναστρέφει την κίνησή του $\theta_n = \pi$ (οπισθοσκέδαση) και για $\theta_0 = \pi/2$, το σωματίδιο μόλις που ακουμπά τη σφαίρα οπότε δεν αισθάνεται καμία ώθηση εκτροπής οπότε $\theta_n = 0$, θα πρέπει να επιλέξουμε τη δεύτερη λύση $\theta_n = \pi - 2\theta_0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι προφανές γεωμετρικά αφού η ακτίνα που βλέπει το σημείο κρούσης θα πρέπει να παίζει το ρόλο διχοτόμου στη γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης πριν και μετά την κρούση (βλ. σχήμα).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πολλοί παρατηρητές βρίσκονται μακριά από το κέντρο, τόσο ώστε να μην βλέπουν τη σφαίρα, και παρατηρούν τα εκτρεπόμενα από αυτήν σωματίδια. Σκοπός τους είναι από τις παρατηρήσεις των εκτρεπομένων σωματιδίων να συνάγουν χρήσιμες πληροφορίες για τη σφαίρα-σκεδαστή. Οι παρατηρητές διαθέτουν ανιχνευτικές συσκευές που συλλέγουν τα σωματίδια με κάποιο συγκεκριμένο άνοιγμα επιφάνειας S και καταμετρούν το ρυθμό τους. Ανάλογα με τη γωνιακή θέση του εκάστοτε ανιχνευτή (σε σχέση με τον άξονα x) θα μετρούνται περισσότερα ή λιγότερα σωματίδια. Τα σωματίδια προσκρούουν στο πίσω μέρος της σφαίρας (δεν μπορούν να δουν καν τη μπροστινή της πλευρά) και εκτρέπονται σε κάποια διεύθυνση που σχετίζεται με το σημείο πρόσκρουσης.

Ας υποθέσουμε ότι η ροή των σωματιδίων αρχικά είναι I_0 πλήθος σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας (κάθετης στη διεύθυνση κίνησης) και ανά μονάδα χρόνου. Μετά την κρούση με το σκεδαστή, τα σωματίδια που θα προσκρούσουν σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS του σκεδαστή με ρυθμό $I_0\ dS$ σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, θα σκεδαστούν σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ που δείχνει στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ η οποία σχετίζεται με τη συσγκεκριμένη στοιχειώδη επιφάνεια που προσέκρουσαν. Έτσι ο ίδιος ρυθμός σωματιδίων στη μονάδα του χρόνου, $I_0\ dS$, θα διαπερνά και τον ανιχνευτή που βρίσκεται στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ και φαίνεται από το κέντρο να αποκόπτει στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$. Το πλήθος σωματιδίων που θα καταμετρά ο συγκεκριμένος ανιχνευτής στη μονάδα του χρόνου θα είναι ανάλογος με την επιφάνειά του, η οποία είναι με τη σειρά της ανάλογη με την $d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$. Εξισώνοντας τους δύο ρυθμούς (πρόσπτωσης και ανίχνευσης) βρίσκουμε

$$I_0\ dS = K_{\hat{\mathbf{n}}}\ d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}.$$

Η ποσότητα $K_{\hat{\mathbf{n}}} = I_0 dS/d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ δίνει μια εκτίμηση του ρυθμού μετρούμενων σκεδασμένων σωματιδίων στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ ανά στερεά γωνία σκεδαζόμενης δέσμης που αποκόπτει ο ανιχνευτής. Αν διαθέτουμε μετρήσεις γι' αυτή την ποσότητα $K_{\hat{\mathbf{n}}}$ σε διάφορες κατευθύνσεις $\hat{\mathbf{n}}$ μπορούμε να τη συσχετίσουμε με το πεδίο που προκαλεί τη σκέδαση.



Σχήμα 12: Σκέδαση από κάποιο ελκτικό πεδίο. Διακρίνονται οι στοιχειώδης επιφάνεια dS και η αντίστοιχη στοιχειώδης στερεά γωνία όπου σκεδάζονται τα σωμάτια τα οποία προσπίπτουν στην dS.

Για παράδειγμα στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας

$$\frac{dS}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{2\pi y(0)dy(0)}{2\pi \sin\theta_{\hat{\mathbf{n}}} d\theta_{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{R\sin\theta_0\ d(R\sin\theta_0)}{\sin(\pi-2\theta_0)\ d(\pi-2\theta_0)} = -\frac{R^2}{4}\ . \tag{65}$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό· δεν παρουσιάζει καμία εξάρτηση από την κατεύθυνση της σκέδασης. Οι ανιχνευτές μας θα μετρήσουν ίδιο ρυθμό είτε τοποθετηθούν σχεδόν μπροστά από το σκεδαστή, είτε στην πίσω πλευρά αυτού! Μια τέτοια ισοτροπική παρατήρηση θα μπορούσε να μας υποδείξει[28] ένα μοντέλο σκληρής σφαίρας για το πεδίο που οδήγησε στην εν λόγω καταμέτρηση.

Το αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και απλώς δηλώνει ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος κρούσης γύρω από την ευθεία μετωπικής κρούσης με τη σκληρή σφαίρα, τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του κώνου που αντιστοιχεί σε αυτή τη σκέδαση[29].

Η ποσότητα $dS/d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ ονομάζεται *διαφορική ενεργός διατομή* (differential cross section) και αποτελεί κεντρικό ζητούμενο στα πειράματα συγκρούσεων υποατομικών και στοιχειωδών σωματιδίων[30].

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε όλες τις δυνατές στερεές γωνίες εκτροπής βρίσκουμε την ολική ενεργό διατομή:

$$\int \left| \frac{dS}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}} \right| d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} = \frac{R^2}{4} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} = \pi R^2 \ .$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε σημαίνει την επιφάνεια που αναγκάζει τα σωματίδια να σκεδαστούν και δεν είναι άλλη από την προβολή της σκληρής σφαίρας στο επίπεδο το οποίο τα σωματίδια διαπερνούν κάθετα προτού σκεδαστούν.

10.1 Βαρυτική σκέδαση

Μια παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος είναι η πρόσπτωση σωματιδίων (μετεώρων) στο βαρυτικό πεδίο μιας ακλόνητης σφαίρας μάζας M. Για να κάνουμε λίγο πιο απλή την ανάλυσή μας θα αγνοήσουμε τις διαστάσεις της σφαίρας και θα υποθέσουμε ότι αυτή είναι σημειακή, ώστε να μελετήσουμε τη σκέδαση που προκαλεί αμιγώς το βαρυτικό πεδίο και όχι η ίδια η επιφάνεια της σφαίρας.

Η κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο μελετήθηκε διεξοδικά στα εδάφια 7 και 8 του παρόντος κεφαλαίου, παρότι η έμφαση δόθηκε στις κλειστές ελλειπτικές τροχιές. Η μαθηματική ανάλυση και τα αποτελέσματα που βγάλαμε θα ισχύουν και στην περιπτωσή μας, αλλά θα πρέπει να προσέξουμε ότι οι τροχιές που αναζητούμε θα είναι ανοικτές: αφού ξεκινούν σε άπειρη απόσταση από το κέντρο θα ξαναπειστρέψουν σε άπειρη απόσταση. Η ενέργεια των τροχιών αυτών θα είναι θετική (μη δέσμιες κινήσεις), θα πλησιάσουν το βαρυτικό κέντρο μέχρι μια ελάχιστη απόσταση η οποία θα καθοριστεί από τη φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια (δηλαδή από τη στροφορμή) και στη συνέχεια θα ξαναεπιστρέψουν στο άπειρο.[31]

[28] Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι τόσο απλό. Από τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ δεν συνεπάγεται μονοσήμαντα ένα συγκεκριμένο κεντρικό πεδίο.

[29] Το αρνητικό αυτό πρόσημο θα ξαναεμφανιστεί και στη βαρυτική σκέδαση παρακάτω. Συνήθως στις σκεδάσεις, οι μεγάλες παράμετροι κρούσεις οδηγούν σε μικρές εκτροπές οπότε η ποσότητα $dS/\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ είναι αρνητική. Στην πειραματική φυσική στοιχειωδών σωματιδίων μετράμε την απόλυτη τιμή αυτού του μεγέθους και αμελούμε το πρόσημο.

[30] Η ενεργός διατομή συμβολίζεται συνήθως με το ελληνικό γράμμα σ.

[31] Η περίπτωση των δέσμιων και μη δέσμιων τροχιών που εμφανίζεται στη βαρύτητα, ανάλογα με το πρόσημο

Ακολουθώντας το γεωμετρικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε και στη σκληρή σφαίρα, θα θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια έρχονται από την κατεύθυνση του $-x$ άξονα κινούμενα με ταχύτητα $v_0\hat{\mathbf{x}}$. Αν βασιστούμε στη γενική εξίσωση[32] της κίνησης μέσα σε βαρυτικό πεδίο, την

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \theta_0)} \ ,$$

παρατηρούμε ότι οι γωνιακές θέσεις στις οποίες το σωματίδιο βρίσκεται σε άπειρη απόσταση (είτε προσεγγίζοντας το βαρυτικό κέντρο, είτε απομακρυνόμενο από αυτό) είναι εκείνες οι γωνίες στις οποίες ο παρονομαστής μηδενίζεται:

$$\cos(\theta_{\text{εισ/εξ}} + \theta_0) = -\frac{1}{e} \overset{\text{εξ.(53)}}{=} -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E\mathbf{L}^2}{mK^2}}} \ . \tag{66}$$

Η ενέργεια E στην παραπάνω σχέση υπολογίζεται εύκολα όταν τα σωματίδια βρίσκονται ακόμη πολύ μακριά από το κέντρο οπότε η δυναμική τους ενέργεια είναι μηδενική:

$$E = \frac{1}{2}mv(0)^2 \ .$$

Η δε στροφορμή τους είναι

$$\mathbf{L} = m(x(0), y(0), 0) \times \hat{\mathbf{x}}v(0) = -\hat{\mathbf{z}}\, m\, y(0)\, v(0) \ ,$$

όπου $y(0)$ –όπως και στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας– είναι η $y-$συντεταγμένη των σωματιδίων όταν αυτά βρίσκονται ακόμη σε άπειρη απόσταση και κινούνται παράλληλα με τον x άξονα. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *παράμετρος κρούσης* (impact parameter) και σχετίζεται άμεσα με τη γωνία σκέδασης. Με αυτά τα κινηματικά δεδομένα οι γωνίες εισόδου/εξόδου των σωματιδίων από το βαρυτικό πεδίο είναι

$$\cos(\theta_{\text{εισ/εξ}} + \theta_0) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \ . \tag{67}$$

της ενέργειας, δεν έχει το ανάλογό της στον αρμονικό ταλαντωτή. Στην περίπτωση του ταλαντωτή όλες οι τροχιές είναι δέσμιες. Το γεγονός αυτό αποκλείει τον αρμονικό ταλαντωτή από τα σκεδαστικά πεδία.

[32]Αφού δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη γωνιακή θέση του εγγύτερου σημείου της τροχιάς θα θεωρήσουμε ότι $\theta_0 \neq 0$.

Η γωνία των εισερχομένων σωματιδίων είναι $\theta_{\varepsilon\iota\sigma} = \pi$, οπότε ως λύση της (67) είναι

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right) - \pi \\ &= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right) - \pi \\ &= -\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι το εγγύτερο σημείο της τροχιάς, καθώς το σωματίδιο έλκεται από το βαρυτικό κέντρο, θα βρίσκεται (για $y(0) > 0$) σε κάποια γωνία στο διάστημα $(0, \pi/2)$, ενώ από την πολική εξίσωση της τροχιάς (45) η γωνία του εγγύτερου σημείου είναι η $\theta = -\theta_0$ (μέγιστη τιμή του παρονομαστή). Συνεπώς το τόξο του συνημιτόνου στην παραπάνω σχέση θα είναι μια γωνία στο ίδιο διάστημα.

Ας προσδιορίσουμε τώρα και τη γωνία εξόδου που θα σχετίζεται με την εκτροπή-σκέδαση του σωματιδίου:

$$\theta_{\varepsilon\xi} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right) - \theta_0 = -\pi + 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right). \quad (69)$$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση επιλέξαμε ως λύση του $\cos^{-1}(-\Theta)$, με $\Theta > 0$, την $-\pi + \cos^{-1}\Theta$ (με $0 < \cos^{-1}\Theta < \pi/2$), αφού η άλλη λύση $\pi - \cos^{-1}\Theta$ θα μας έδινε την ήδη μελετηθείσα γωνία εισόδου $\theta_{\varepsilon\iota\sigma} = \pi$.

Η γωνία $|\theta_{\varepsilon\xi}|$ είναι η γωνία εκτροπής του σωματιδίου $\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}$ εξαιτίας του βαρυτικού πεδίου και δεν έχει σημασία το πρόσημό της $\theta_{\varepsilon\xi}$, αφού θα πρέπει κανείς να θεωρήσει όλες τις δυνατές διευθύνσεις κίνησης των εισερχομένων σωματιδίων σε απόσταση $|y(0)|$ γύρω από τον άξονα x που θα οδηγήσουν σε μια στοιχειώδη στερεά γωνία που περιέχεται μεταξύ δύο κώνων με κορυφή το βαρυτικό κέντρο και με άνοιγμα μεταξύ $\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}$ και $\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta} + d\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}$.

Για να διευκολύνουμε τις πράξεις ας ονομάσουμε την ποσότητα

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}\right) = \beta.$$

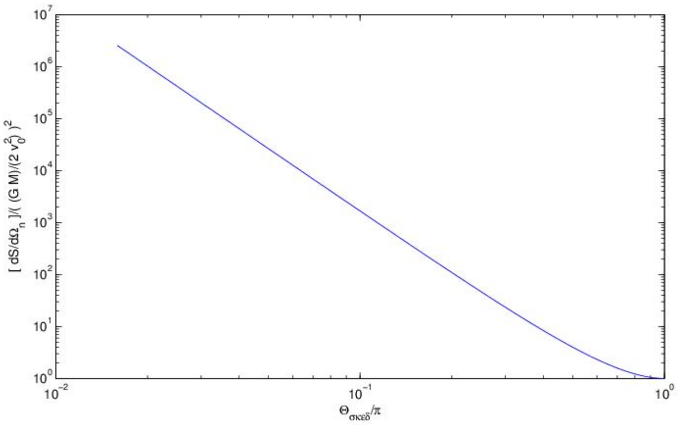
Θα έχουμε τότε τις εξής σχέσεις

$$y(0)^2 = \left(\frac{GM}{v(0)^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\cos^2\beta} - 1\right) \qquad \text{και} \qquad \cos\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta} = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos(2\beta)\ .$$

Από αυτά τα στοιχεία που συνδέουν τη γωνία σκέδασης με την παράμετρο κρούσης $y(0)$ υπολογίζουμε τη διαφορική ενεργό διατομή για το βαρυτικό πεδίο

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}} &= \frac{2\pi y(0) dy(0)}{2\pi \sin\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}\ d\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}} \\ &= \frac{d[y(0)^2]}{-2d[\cos\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}]} \\ \ldots &= -\left(\frac{GM}{2v(0)^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\beta}\ . \end{aligned} \tag{70}$$

Οι μεγαλύτερες τιμές της διαφορικής ενεργού διατομής αντιστοιχούν σε πολύ μικρές γωνίες εκτροπής (πολύ μεγάλες παραμέτρους κρούσης). Αυτό σημαίνει ότι τα περισσοτερα σωματίδια καταγράφονται στους ανιχνευτές που βρίσκονται μπροστά από το σκεδαστή και πολύ λίγα πίσω από αυτόν. Η σχέση για παράδειγμα του πλήθος των καταγραφόμενων σωματιδίων σε γωνίες σκέδασης 1° και 179° είναι περίπου 170 εκατομμύρια προς 1! (βλ. διάγραμμα 13).



Σχήμα 13: Η διαφορική ενεργός διατομή ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης σε λογαριθμική κλίμακα.

Αν παρατηρηθεί λοιπόν μια τέτοια εξάρτηση, $1/\sin^4(\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}/2)$, από τη γωνία σκέδασης στο ρυθμό ανίχνευσης σωματιδίων, μπορούμε με αρκετή ασφάλεια να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το βαρυτικό πεδίο είναι αντιστρόφου τετραγώνου. Παράλληλα η εξάρτηση αυτή της ενεργού διαφορικής διατομής από τη γωνία σκέδασης σημαίνει πως η ολοκλήρωσή της σε όλες τις σκεδαζόμενες στερεές γωνίες οδηγεί σε άπειρη ολική ενεργό διατομή

$$S_{o\lambda} = \int_\epsilon^\pi \frac{1}{\sin^4(\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}/2)} \sin(\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta}) d\Theta_{\sigma\kappa\varepsilon\delta} \underset{\epsilon\to 0}{\to} \frac{1}{\epsilon^2} \underset{\epsilon\to 0}{\to} \infty\ .$$

Το αποτέλεσμα αυτό μεταφράζεται συνήθως (κατ' αντιπαραβολή με αυτό της σκληρής σφαίρας) ως ένδειξη άπειρης εμβέλειας της βαρυτικής δύναμης. Αυτή η συσχέτιση όμως είναι λανθασμένη. Αν το πεδίο έφθινε πολύ πιο γρήγορα (π.χ. εκθετικά) από αυτό της βαρυτικής δύναμης, παρόλο που μαθηματικά η εμβέλεια του θα παρέμενε άπειρη η ενεργός του διατομή θα μπορούσε να είναι πεπερασμένη.

Αν μάλιστα κανείς αναζητήσει και τη μέγιστη δυνατή γωνία εκτροπής κάποιου σωματιδίου, μπορεί να συναγάγει και τις διαστάσεις του βαρυτικού κέντρου, αφού οι πεπερασμένες διαστάσεις του βαρυτικού κέντρου θα έχουν ως συνέπεια ένα σωματίδιο που κινείται με τόσο μικρή παράμετρο κρούσης, ώστε να προσκρούσει στο βαρυτικό σώμα, να εξαφανιστεί από το σύνολο των σκεδαζόμενων σωματιδίων. Για να βρούμε τη γωνία αυτή αποκοπής, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ της παραμέτρου κρούσης και της εγγύτερης απόστασης του σωματιδίου στο βαρυτικό κέντρο: Από διατήρηση του μέτρου της στροφορμής έχουμε

$$m|y(0)|v(0) = mr_{\text{min}}V_{\text{max}} \Rightarrow V_{\text{max}} = v(0)\frac{|y(0)|}{r_{\text{min}}} \tag{71}$$

όπου r_{min} είναι η ελάχιστη απόσταση στην οποία προσεγγίζει το σωματίδιο το βαρυτικό κέντρο και V_{max} η ταχύτητα που έχει το σωματίδιο τότε[33]. Παράλληλα η διατήρηση της ενέργειας δίνει άλλη μια σχέση μεταξύ των αρχικών συνθηκών και των κινηματικών στοιχείων στο εγύτερο σημείο:

$$\frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}mV_{\text{max}}^2 - \frac{GMm}{r_{\text{min}}} \Rightarrow V_{\text{max}}^2 - v(0)^2 = \frac{2GM}{r_{\text{min}}} \tag{72}$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς r_{min} βρίσκουμε

$$r_{\text{min}} = -\left(\frac{GM}{v(0)^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{GM}{v(0)^2}\right)^2 + y(0)^2}\,. \tag{73}$$

Η άλλη λύση του τριωνύμου που προκύπτει είναι αρνητική και απορρίπτεται. Η γεωμετρική σημασία αυτής είναι η εγγύτερη απόσταση από την 2η εστία της υπερβολικής τροχιάς.

Αν θέσουμε $r_{\text{min}} = R$, όπου R η ακτίνα του βαρυτικού σκεδαστή, και λύσουμε ως προς $y(0)$ βρίσκουμε

$$y(0)|_{\text{min}} = \sqrt{R\left(R + \frac{2GM}{v(0)^2}\right)}$$

καταλήγουμε μετά από πράξεις ότι

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1 + \frac{Rv(0)^2}{GM}}$$

[33]Στο εγγύτερο σημείο η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτινική θέση οπότε η στροφορμή είναι απλά το γινόμενο της ακτίνας επί την ορμή. Λόγω του ότι η απόσταση από το κέντρο είναι η ελάχιστη δυνατή, η βαρυτική δυναμική ενέργεια λαμβάνει τη μέγιστη αρνητική τιμή, οπότε η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται· αυτός είναι ο λόγος που ονομάσαμε την ταχύτητα στο σημείο αυτό V_{max}.

οπότε

$$\cos\Theta^{\rm max}_{\rm σκεδ} = 1 - 2\cos^2\beta = 1 - \frac{2}{1+\frac{Rv(0)^2}{GM}}\ .$$

Παρατηρώντας λοιπόν τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}$ και καταγράφοντας την ελάχιστη τιμή αυτού (ή τη γωνία στην οποία καταγράφεται το τελευταίο σκεδαζόμενο σωματίδιο) μπορούμε να συναγάγουμε και το είδος του σκεδαστη (βαρυτικός) και τις διαστάσεις αυτού.

Ο Rutherford ακολουθώντας αυτή τη συλλογιστική[34] προσδιόρισε με πειράματα βομβαρδισμού πολύ λεπτών φύλλων χρυσού με σωματίδια άλφα (πυρήνες ηλίου) τις διαστάσεις του πυρήνα του ατόμου και έδειξε ότι ο πυρήνας καταλαμβάνει ένα εκπληκτικά μικροσκοπικό χώρο εντός του ατόμου, καταρρίπτωντας το πρότυπο του σταφιδόψωμου της εποχής του που ήθελε το άτομο να είναι γεμάτο από τα θετικά φορτία του πυρήνα με τα ηλεκτρόνια σφηνωμένα σα σταφίδες μέσα σε αυτό.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 13

- Η ισοτροπία του Σύμπαντος συνεπάγεται την κεντρικότητα των θεμελιωδών δυνάμεων αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων.
- Μια κεντρική δύναμη είναι συντηρητική μόνο αν είναι ισοτροπική (με μέτρο ανεξάρτητο του προσανατολισμού της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια). Στην περίπτωση ισοτροπικής κεντρικής δύναμης η δύναμη μπορεί να προκύψει ως

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(r)$$

με

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} |\mathbf{F}(\mathbf{r})|\, dr\ .$$

- Μια κεντρική δύναμη οδηγεί πάντα σε διατήρηση της στροφορμής

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

του σωματιδίου που κινείται στο κεντρικό αυτό πεδίο. Η διατήρηση αυτή συνεπάγεται την επιπεδότητα της κίνησης. Δεν ισχύει όμως και η αντίθετη πρόταση. Η επιπεδότητα της κίνησης δεν συνεπάγεται και κεντρικότητα της δύναμης.

[34] Τα πειράματα σκέδασης του Rutherford βασίζονται στο πεδίο Coulomb αμοιβαία απωθούμενων θετικών φορτίων. Σε όλα τα προηγούμενα λοιπόν αποτελέσματα που αναφέρονται στα βαρυτικά πεδία θα πρέπει να αντικατασταθεί ο όρος $-GM$, από τον

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\mu}\ ,$$

όπου Q_1, Q_2 τα εμπλεκόμενα φορτία και μ η ανηγμένη μάζα των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.

- Ο 2ος νόμος του Κέπλερ, είναι η γεωμετρική ερμηνεία διατήρησης της στροφορμής:

$$|\mathbf{L}| = mr^2\dot{\theta} = 2m\frac{d\mathcal{E}}{dt} \ .$$

- Η στροφορμή πλήθους σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με ισοτροπικές κεντρικές δυνάμεις διατηρείται και μπορεί να γραφεί ως η στροφορμή ενός σώματος στη θέση του ΚΜ με μάζα όση όλα τα σωματίδια και τη στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ. Και τα δύο αυτά κομμάτια της συνολικής στροφορμής διατηρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.
- Η διατήρηση της στροφορμής ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο, εκτός της επιπεδότητας της κίνησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί η κίνηση σε ακτινική και περιστροφική. Το ακτινικό κομμάτι της κίνησης μπορεί τότε να περιγραφεί ως ένα μονοδιάστατο πρόβλημα με μια τροποποιημένη δυναμική ενέργεια (την ενεργό δυναμική ενέργεια) που περιλαμβάνει εκτός της πραγματικής δυναμικής ενέργειας και έναν φυγοκεντρικό όρο ο οποίος εμποδίζει το σωματίδιο να πλησιάσει το ελκτικό κέντρο. Αφού λυθεί το μονοδιάστατο αυτό πρόβλημα και βρεθεί $r(t)$, στη συνέχεια μπορεί να υπολογίσει κανείς την $\theta(t)$ μέσω της διατηρούμενης στροφορμής. Έτσι ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων στις 3 διαστάσεις υποβιβάζεται σε ένα πρόβλημα μιας διάστασης (διαφορική 2ας τάξης) και μέσω της διατήρησης της ενέργειας σε ένα πρωτοτάξιο εντέλει πρόβλημα!
- Η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται σταθερή φορά περιστροφής του σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο.
- Αν η ολική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι λίγο μεγαλύτερη από το ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική.
- Οι τροχιές είναι πάντα συμμετρικές ως προς την ευθεία που διέρχεται από το εγγύτερο (περίκεντρο) ή το απώτερο (απόκεντρο) σημείο της τροχιάς.
- Τα μοναδικά κεντρικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών είναι αυτό του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή και αυτό μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. (Στη δεύτερη περίπτωση οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να οδηγούν σε αρνητική ενέργεια ώστε η τροχιά να είναι φραγμένη). Τυχαίνει και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά να είναι ελλειπτική (η πρώτη με κέντρο της έλλειψης το ελκτικό κέντρο και η δεύτερη με το ελκτικό κέντρο να καταλαμβάνει τη μία εστία της έλλειψης).
- Μελετώντας τις λεπτομέρειες μιας σκέδασης μπορούμε να συμπεράνουμε τη φύση των κεντρικών δυνάμεων που οδηγούν στην παρατηρούμενη εικόνα της σκέδασης.
- Η σκέδαση από μια βαρυτική δύναμη ή μια δύναμη Coulomb (αντιστρόφου τετραγώνου) οδηγεί σε υπερβολικές τροχιές.