Κεφάλαιο 12
Κρούσεις

1 Κρούσεις σε μία ή περισσότερες διαστάσεις

Όταν τα υλικά σωματίδια και γενικότερα τα εκτεταμένα σώματα αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους δίχως να υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις, διατηρείται, όπως έχουμε μάθει, η ολική ορμή του συστήματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κάνουν ιδιαίτερα αισθητή την παρουσία τους για μικρά χρονικά διαστήματα σε σχέση με τους χαρακτηριστικούς χρόνους της κίνησης των σωμάτων όπου αυτές οι δυνάμεις δεν εμφανίζονται. Οι αλληλεπιδράσεις αυτού του είδους ονομάζονται *κρούσεις* και σε αυτές συμπεριλαμβάνονται φαινόμενα κατά τα οποία ούτε επαφή των σωμάτων συμβαίνει (ακόμη και όταν συγκρούονται δύο αυτοκίνητα, δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι τα μόρια των δύο αυτοκινήτων έρχονται σε επαφή), ούτε η κρούση διαρκεί κλάσματα του δευτερολέπτου (όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα διαστημικό όχημα που υφίσταται εκτροπή από την τροχιά του όταν περάσει κοντά από ένα ουράνιο σώμα μεγάλης μάζας).

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με μια κρούση υλικών σημείων σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Η διατήρηση της ορμής επιβάλλει:

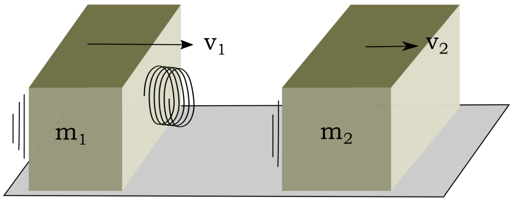
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = P \, . \tag{1}$$

Δίχως καμία άλλη γνώση του πώς γίνεται η αλληλεπίδραση των δυο σωματιδίων δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε πως ακριβώς θα μοιραστούν οι ταχύτητες v_1', v_2' αμέσως μετά την κρούση. Ας υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση των δύο σωματιδίων έχουν συνολικό έργο μηδέν, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα ελατήριο όταν αυτό συμπιέζεται και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται. Τότε η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για "ελαστικές" κρούσεις:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = E \, . \tag{2}$$

Ένα πολύ καλό μηχανιστικό μοντέλο για τις ελαστικές κρούσεις μπορούμε να έχουμε αν θεωρήσουμε ότι το ένα από τα δύο συγκρουόμενα σωματίδια φέρει στην πλευρά με την οποία προσεγγίζει το έτερο σωματίδιο ένα αβαρές ιδανικό γραμμικό ελατήριο. Κατά τη σύγκρουση το ελατήριο συμπιέζεται, ενόσω τα δύο σωματίδια προσεγγίζουν το ένα το άλλο, η συμπίεση σταματά όταν οι ταχύτητες τους γίνονται ίσες και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται μέχρι να αποκτήσει και πάλι το αρχικό φυσικό του μήκος. Επιλύοντας το σύστημα των (1) και (5)[1] καταλήγουμε

[1]Είναι αρκετά εύκολο να λύσουμε το σύστημα αν τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας τη γράψουμε ως διαφορές τετραγώνων $m_1(v_1^2 - {v'}_1^2) = m_2({v'}_2^2 - v_2^2)$ και στη συνέχεια τη διαιρέσουμε με τις αντίστοιχες διαφορές από τη διατήρηση της ορμής $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$.



Σχήμα 1: Μηχανιστικό μοντέλο για την ελαστική κρούση δύο σωμάτων.

ότι:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} , \tag{3}$$

όπου

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1+\lambda} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}, \tag{4}$$

και $\lambda = m_1/m_2$. Διαπιστώνουμε ότι ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων $(v_1, v_2) \rightarrow (v_1', v_2')$ είναι γραμμικός και προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα $\mathbf{M}$ που εξαρτάται μόνο από το λόγο των μαζών.

Για την ακρίβεια, τα δύο ζεύγη των ταχυτήτων που ικανοποιούν τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας κατά τη κρούση και συνδέονται μέσω του πίνακα $\mathbf{M}$ ικανοποιούν και την αντίστροφη σχέση πάλι μέσω του πίνακα $\mathbf{M}$. Δηλαδή αν σύμφωνα με την (3) είναι $(v_1, v_2) \overset{\mathbf{M}}{\rightarrow} (v_1', v_2')$, ισχύει επίσης ότι $(v_1', v_2') \overset{\mathbf{M}}{\rightarrow} (v_1, v_2)$. Με άλλα λόγια είναι $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}$ και συνεπώς

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Η ιδιότητα αυτή είναι αναμενόμενη αφού αν αντιστρέψουμε τη φορά του χρόνου, περιμένουμε να μεταβούμε από τις τελικές στις αρχικές ταχύτητες (αντιστρεπτότητα των εξισώσεων του Νεύτωνα). Ως αποτέλεσμα, η ορίζουσα του πίνακα του μετασχηματισμού πρέπει να είναι

$$\det(\mathbf{M}) = \pm 1 ,$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί τον όγκο (εδώ επιφάνεια) στο χώρο των ταχυτήτων,

$$|\Delta v_1| \, |\Delta v_2| = |\Delta v_1'| \, |\Delta v_2'| ,$$

αλλά όχι αναγκαστικά και τον προσανατολισμό[2] στο χώρο των ταχυτήτων (ο προσανατολισμένος όγκος είναι το φυσικό νόημα της ορίζουσας ενός μετασχηματισμού). Επειδή όμως ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό στον χώρο των ταχυτήτων (βλ. σχήμα 2· αν

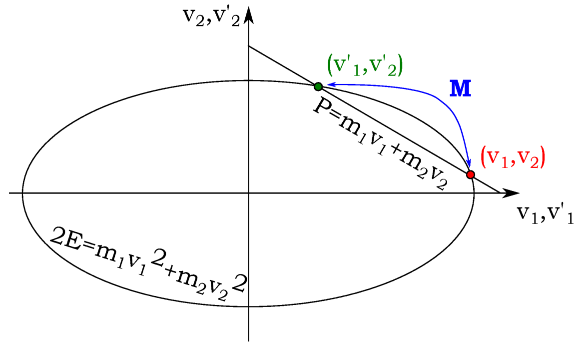
[2] Με τον όρο προσανατολισμό εννοούμε το εξής: Τα διανύσματα στο χώρο των ταχυτήτων $\mathbf{a} = (v_1, v_2)^\top$ και $\mathbf{b} = (v_3, v_4)$ θα μετατραπούν στα $\mathbf{a}' = \mathbf{M}\ \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{M}\ \mathbf{b}$. Η αλλαγή προσανατολισμού σημαίνει $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

οι κλίμακες των δύο αξόνων ήταν τέτοιες ώστε η καμπύλη σταθερής ενέργειας να έπαιρνε τη μορφή κύκλου, η μετακίνηση από το ένα άκρο της χορδής στο άλλο θα ισοδυναμούσε με κατοπτρισμό ως προς τη μεσοκάθετο της χορδής), η ορίζουσα του μετασχηματισμού λαμβάνει μόνο την τιμή

$$\det(\mathbf{M}) = -1 \ ,$$

αν υπάρξει αλληλεπίδραση.

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = E \ . \tag{5}$$



Σχήμα 2: Η διατήρηση της ενέργειας ως έλλειψη και η διατήρηση της ορμής ως ευθεία στο χώρο των ταχυτήτων. Ο μετασχηματισμός **M** των ταχυτήτων κατά την ελαστική κρούση ως αντιστοίχιση του ενός σημείου τομής των δύο γεωμετρικών σχημάτων στο άλλο.

Η διατηρούμενη ενέργεια E και η διατηρούμενη ορμή P, οδηγούν στην εξής γραφική λύση: την τομή της έλλειψης που περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας με την ευθεία που περιγράφει τη διατήρηση της ορμής. Οι αρχικές τιμές των ταχυτήτων προ της κρούσης αναπαρίστανται με το ένα σημείο τομής, ενώ οι τιμές μετά την κρούση με το άλλο. Οι λύσεις εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη, όπως και τα σημεία τομής ευθείας-έλλειψης. Η ειδική περίπτωση όπου το σημείο τομής είναι ένα (διπλή ρίζα) αντιστοιχεί στην περίπτωση της μη κρούσης αφού η λύση πριν και και η λύση μετά την κρούση συμπίπτουν, δηλαδή $v_1 = v_1'$ και $v_2 = v_2'$· ακριβώς καμία αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων. Τέλος η περίπτωση της απουσίας τομής δεν είναι δυνατό να υφίσταται αφού αρχικά υπάρχει σημείο στο χώρο v_1, v_2 που λύνει και της εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Αν αλλάξει κανείς την κλίμακα των αξόνων και θέσει τον ένα άξονα $x = \sqrt{m_1}v_1$ και τον άλλο $y = \sqrt{m_2}v_2$ η εξίσωση της έλλειψης μετατρέπεται σε εξίσωση κύκλου $x^2 + y^2 = 2E$, ενώ η εξίσωση της ευθείας παραμένει εξίσωση ευθείας: $\sqrt{m_1}x + \sqrt{m_2}y = P$. Η τομή τους ορίζει μια χορδή του κύκλου, οπότε η αντιστοίχιση των x, y προ της κρούσης με τα x', y' μετά την κρούση είναι από γεωμετρικής άποψης ένας κατοπτρισμός ως προς τη μεσοκάθετο της χορδής, η οποία ως μεσοκάθετος περνά από το κέντρο του κύκλου. Επειδή μάλιστα η κλίση της ευθείας είναι $-\sqrt{m_1/m_2} = \sqrt{\lambda}$ η διάμετρος του κύκλου ως προς την οποία γίνεται ο κατοπτρισμός του μετασχηματισμού είναι αυτή με κλίση $\sqrt{m_2/m_1} = 1/\sqrt{\lambda}$.

Στην περίπτωση που η κρούση δεν είναι ελαστική και ένα μέρος της αρχικής ενέργειας χάνεται κατά τη διαδιακασία της κρούσης, η έλειψη[3] στον χώρο των ταχυτήτων που αντιπροσωπεύει την τελική τιμή της ενέργειας είναι συρρικνωμένη σε σχέση με την αρχική. Παρόλα αυτά η τελική ενέργεια δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρή αφού πρέπει να εξακολουθήσει να υπάρχει τομή της ευθείας των ορμών με την τελική έλλειψη. Η ελάχιστη τελική ενέργεια θα αντιπροσωπεύεται από εκείνη την έλλειψη που εφάπτεται στην ευθεία των ορμών[4]. Έτσι απαιτώντας η ευθεία να είναι εφαπτομένη στην έλλειψη, δηλαδή να είναι:

$$\left.\frac{dv_2'}{dv_1'}\right|_{P=\sigma\tau\alpha\theta} = \left.\frac{dv_2'}{dv_1'}\right|_{E=\sigma\tau\alpha\theta} ,$$

ή

$$-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{m_1 v_1'}{m_2 v_2'} ,$$

καταλήγουμε ότι πρέπει:

$$v_1' = v_2' . \tag{6}$$

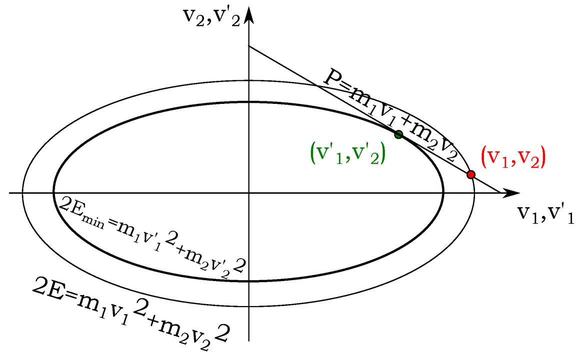
Αν συμβεί αυτό (μέγιστη δυνατή απώλεια ενέργειας) και οι ταχύτητες εξισωθούν μετά την κρούση τότε η κρούση ονομάζεται *πλαστική* και τα δύο σώματα κινούνται μετά την κρούση μαζί ως ένα συσσωμάτωμα. Η πλαστική κρούση αποτελεί την πλέον ανελαστική κρούση και το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση είναι, αν εκτελέσει κανείς τις πράξεις:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} , \tag{7}$$

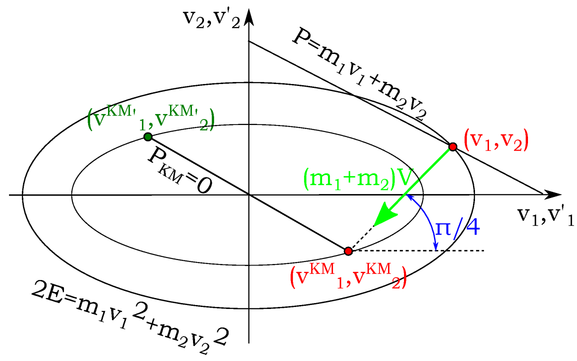
όπου $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μαζα των δυο σωματιδίων. Η μεταβολή της ενέργειας ΔE που συμβαίνει κατά την πλαστική κρούση είναι και η μέγιστη παροδική μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την ελαστική κρούση δύο σωματιδίων (θυμηθείτε το μηχανικό ανάλογο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο). Αν, όπως συμβαίνει με τις συγκρούσεις των στοιχειωδών σωματιδίων, θέλουμε να εκμεταλλευτούμε αυτή τη μεταβολή της ενέργειας προκειμένου να φτιάξουμε για παράδειγμα νέα σωματίδια από συγκρούσεις θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο παραπάνω λόγος να είναι μονάδα (αν θέλουμε να έχουμε τη μέγιστη απόδοση της επένδυσής μας για την κατασκευή του επιταχυντή - συγκρουστήρα). Όπως θα δούμε αμέσως στη συνέχεια στο σύστημα κέντρου μάζας αυτό συμβαίνει αυτόματα.

[3] Επανερχόμαστε στα αρχικά σχήματα έλλειψη και ευθεία. Όλη η ανάλυση θα μπορούσε φυσικά να γίνει στο χώρο των $x - y$ με τον κύκλο και την ευθεία.

[4] Όλες οι άλλες ομόλογες ελλείψεις (με ίδιο λόγο ημιαξόνων) μεταξύ της αρχικής και της μικρότερης δυνατής έχουμε μερική απώλεια ενέργειας και η κρούση είναι ημιελαστική.



Σχήμα 3: Στις μη ελαστικές κρούσεις η ενέργεια παρουσιάζει απώλειες και η αντίστοιχη έλλειψη συρρικνώνεται. Η μικρότερη δυνατή έλλειψη αντιστοιχεί στην πλαστική κρούση δηλαδή σε συσσωμάτωμα (κοινή ταχύτητα) μετά την κρούση.



Σχήμα 4: Η αλλαγή συστήματος αναφοράς μεταφράζεται σε μεταφορά του αρχικού σημείου πάνω σε μια ευθεία κλίσης 1 κατά $(-V,-V)$. Έτσι η αντίστοιχη ευθεία της ορμής μεταφέρεται παράλληλα και η έλλειψη συρρικνώνεται. Όταν η ταχύτητα γίνει ίση με V_{KM} η ευθεία της ορμής γίνεται διάμετρος της συρρικνωμένης έλλειψης και το αρχικό σημείο (στο νέο σύστημα) μεταφέρεται στο αντιδιαμετρικό του ($v_1 \to -v_1'$ και $v_2 \to -v_2'$).

Αν εξετάζαμε την κρούση σε ένα άλλο σύστημα που κινείται σε σχέση με το αρχικό σύστημα με ταχύτητα V, το αρχικό σημείο στο χώρο των ταχυτήτων θα μετατοπιζόταν πάνω σε μία ευθεία με κλίση 1 αφού η ταχύτητα V θα αφαιρούνταν από κοινού και από την v_1 και από την v_2 κατά ένα διάστημα ανάλογο με την V. Η ευθεία που αντιστοιχεί στη συνολική ορμή του συστήματος θα μετακινούνταν παράλληλα στον εαυτό της ανάλογα με την τιμή του V. Η αντίστοιχη έλλειψη θα άλλαζε σε μια ομόλογη έλλειψη που θα περνούσε από το νέο σημείο των ταχυτήτων. Όταν η ταχύτητα αυτή πάρει την κατάλληλη τιμή:

$$V_{KM} = \frac{P}{m_1 + m_2} \ ,$$

η ορμή του συστήματος μηδενίζεται. Η V_{KM} είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Στο σύστημα κέντρου μάζας η ολική ορμή είναι μηδέν, η ευθεία των ορμών περνά από την αρχή των αξόνων και εξαιτίας της συμμετρικότητας της έλλειψης οι ταχύτητες μετά από μια ελαστική κρούση στο σύστημα κέντρου μάζας δίνονται από το αντιδιαμετρικό σημείο του αρχικού επί της νέας συρρικνωμένης έλλειψης:

$$v_2' = -v_2 \ , \ \ v_1' = -v_1 \ .$$

(Ο **M** έχει ορίζουσα 1 τότε, γιατί ο κατοπτρισμός σε αυτή την περίπτωση είναι κατοπτρισμός ως προς το κέντρο που ισοδυναμεί με στροφή). Ο δε λόγος $\Delta E/E$ στην περίπτωση της πλαστικής κρούσης στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ίσος με τη μονάδα.

Άσκηση

Χρησιμοποιήστε ως μηχανιστικό μοντέλο μίας ανελαστικής κρούσης το μοντέλο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο του σχήματος 1 με τη διαφορά ότι (α) το ελατήριο όταν φτάνει στη μέγιστη συσπείρωση παγώνει και δεν αποσυσπειρώνεται στη συνέχεια και (β) το ελατήριο επανέρχεται σε μηδενική συσπείρωση (στο φυσικό του μήκος), αλλά η κίνηση του παρουσιάζει και τριβές με παράγοντα απόσβεσης, $\gamma < \omega_0$. Να υπολογιστεί το ποσοστό ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση στην κάθε περίπτωση.

2 Κρούσεις σε τρεις διαστάσεις

Γνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητες του συστήματος κέντρου μάζας ας μελετήσουμε την κρούση δύο σωματιδίων στις τρεις διαστάσεις, στο εργαστήριο και ταυτόχρονα στο σύστημα κέντρου μάζας (βλ. σχήμα 5). Η διατήρηση της ορμής παίρνει τη μορφή:

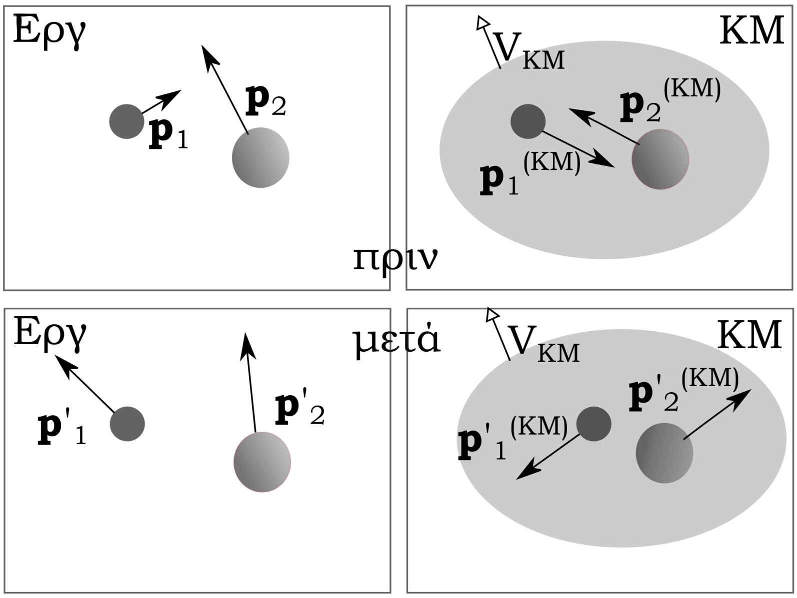
$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_1 \mathbf{v}_2' \ , \tag{8}$$

ενώ στο σύστημα κέντρου μάζας είναι:

$$m_1 \mathbf{v}_1^{(KM)} + m_2 \mathbf{v}_2^{(KM)} = m_1 \mathbf{v}_1'^{(KM)} + m_1 \mathbf{v}_2'^{(KM)} \ . \tag{9}$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, στο σύστημα του κέντρου μάζας οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι συγγραμικές και αντίρροπες, και πριν και μετά την κρούση αφού η ολική ορμή στο ΚΜ είναι μηδενική. Οι δε ορμές είναι απλώς ίσες και αντίθετες η μία της άλλης:

$$\mathbf{p}_1^{(KM)} = -\mathbf{p}_2^{(KM)} = \mathbf{p} \ \ , \ \ \mathbf{p}_1'^{(KM)} = -\mathbf{p}_2'^{(KM)} = \mathbf{p}' \ \ .$$



Σχήμα 5: Δύο σωματίδια όπως φαίνονται στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα ΚΜ. Το σύστημα ΚΜ (γκρι οβάλ) ταξιδεύει με ταχύτητα V_{KM} σε σχέση με το σύστημα εργαστηρίου. Μετά την κρούση, τα σωματίδια αλλάζουν κατεύθυνση (κρατώντας όμως ίδιο το μέτρο της ορμής τους) στο σύστημα ΚΜ, το οποίο ερμηνεύεται σε αντίστοιχη αλλαγή ορμών στο σύστημα του εργαστηρίου.

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, από τη διατήρηση της ενέργειας συμπεραίνουμε ότι:

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \,. \tag{10}$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας, λοιπόν, οι ορμές των δύο σωματιδίων θα είναι κατά μέτρο ίσες μεταξύ τους και ίσες πριν και μετά την κρούση. Αυτή η ξεχωριστή ιδιότητα του συστήματος του κέντρου μάζας μας επιτρέπει να γράψουμε τον γενικό μετασχηματισμό των ταχυτήτων στις τρεις διαστάσεις. Η παραπάνω ανάλυση μας δείχνει πως τα μέτρα των δύο ορμών (πριν και μετά) παραμένουν ίδια αλλά δεν μπορεί να μας παράσχει καμία πληροφορία για την αλλαγή κατεύθυνσης του άξονα των ορμών. Η στροφή του άξονα αυτού σχετίζεται, όπως έχουμε συζητήσει στο Κεφάλαιο 11, με τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δυο σωματιδίων κατά τη διάρκεια της κρούσης. Αυτή την έξτρα πληροφορία, θα την κωδικοποιήσουμε στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ της διεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{p}'$. Έτσι λοιπόν θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1'^{(KM)} = -\mathbf{p}_2'^{(KM)} &= \mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|\hat{\mathbf{n}} = |\mathbf{p}|\hat{\mathbf{n}} \\
&= |\mathbf{p}_1^{(KM)}|\hat{\mathbf{n}} = m_1|\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{KM}|\hat{\mathbf{n}} \\
&= m_1\left|\mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}\right|\hat{\mathbf{n}} \\
&= \mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}} \,,
\end{aligned} \tag{11}$$

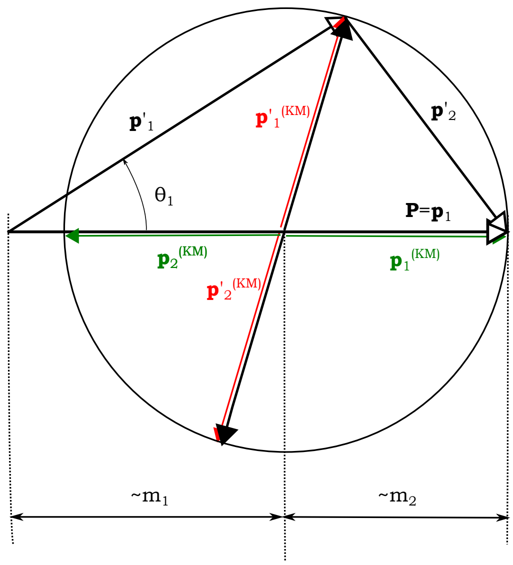
όπου μ η ανηγμένη μάζα των δύο σωματιδίων. Γνωρίζοντας την ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας μετά την κρούση, μπορούμε να γράψουμε και την ορμή κάθε σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}'_1 &= \mathbf{p}_1'^{(KM)} + m_1\mathbf{V}_{KM} = \mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}} + m_1\mathbf{V}_{KM}\ ,\\
\mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}_2'^{(KM)} + m_2\mathbf{V}_{KM} = -\mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}} + m_2\mathbf{V}_{KM}\ ,
\end{aligned} \tag{12}$$

όπου

$$\mathbf{V}_{KM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}\ .$$

και $M = m_1 + m_2$.



Σχήμα 6: Ένα σωματίδιο-βλήμα ορμής $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}$ προσκρούει ελαστικά σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο. Η ορμή του σωματιδίου 1 στο σύστημα ΚΜ είναι $\mathbf{p}_1'^{(KM)} = \mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{V}_{KM} = \mathbf{p}_1(1 - m_1/M)$, δηλαδή είναι ίσο με το κλάσμα m_2/M της ολικής ορμής. Με βάση αυτή την ορμή κατασκευάζουμε έναν κύκλο με ακτίνα $|\mathbf{p}_1'^{(KM)}|$ και κέντρο το $\mathbf{P} - \mathbf{p}_1'^{(KM)}$. Στον κύκλο αυτόν βρίσκονται οι ορμές και των δύο σωματιδίων, πριν (κόκκινα βέλη) και μετά (πράσινα βέλη) την κρούση, στο σύστημα ΚΜ. Η γωνία στροφής των ορμών κατά την κρούση στο σύστημα ΚΜ είναι η μοναδική παράμετρος που σχετίζεται με τις λεπτομέρειες της κρούσης. Στη συνέχεια οι ορμές των σωματιδίων στο εργαστήριο μετά την κρούση μπορούν να επανακατασκευαστούν από τις ορμές στο σύστημα ΚΜ ως εξής: $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1'^{(KM)} + m_1\mathbf{V}_{KM} = \mathbf{p}_1'^{(KM)} + (m_1/M)\mathbf{P}$ και από τη διατήρηση της ορμής θα είναι $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{P} - \mathbf{p}'_1$.

Όπως είπαμε και παραπάνω, αν και φαινομενικά έχουμε πλήρεις εκφράσεις για τις ορμές των σωματιδίων μετά την κρούση, το μοναδιαίο διανυσμα $\mathbf{n}$ περιέχει όλες τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων. Ο πλήρης καθορισμός του $\mathbf{n}$ απαιτεί δυο γωνίες την πολική και αζιμουθιακή γωνία θ και ϕ. Επιπλέον, εφόσον η αλληλεπίδραση υπακούει στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και η δύναμη αλληλεπίδρασης έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια, η συνολική ροπή των δυνάμεων αλληλεπίδρασης είναι μηδενική με αποτέλεσμα η στροφορμή του συστήματος να διατηρείται και επομένως το επίπεδο της κίνησης να είναι πλήρως καθορισμένο από την κίνηση των δύο σωματιδίων προ της κρούσης, και ανεξάρτητο των λεπτομερειών της αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα θα πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ (που καθορίζει το επίπεδο της κίνησης στο ΚΜ) προ της κρούσης να παραμένει το ίδιο και μετά την κρούση (βλ. σχετικά στο Κεφάλαιο 12). Συνεπώς απομένει μόνο μία γωνία για τον πλήρη καθορισμό της κρούσης.

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα διαγραμματικό εργαλείο για να απεικονίσουμε την σκέδαση ενός σωματιδίου-βλήματος μάζας m_1 που προσπίπτει σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο μάζας m_2. Το διάγραμμα αυτό μπορεί να κατασεκυαστεί και για τη γενικώτερη περίπτωση κινούμενου στόχου. Έστω $\mathbf{P}$ η συνολική ορμή του συστήματος. Θα είναι

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \ . \tag{13}$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας

$$\mathbf{p}_1^{(KM)} = \frac{m_2}{M}\mathbf{P} \ ,$$

δηλαδή θα είναι το m_2/M κλάσμα του $\mathbf{P}$. Αντίστοιχα

$$\mathbf{p}_2^{(KM)} = -\mathbf{p}_1^{(KM)} \ .$$

Μετά την κρούση οι δύο αυτές ορμές θα στραφούν σε σχέση με την αρχική τους κατεύθυνση, δίχως να αλλάξουν όμως μέτρο, παραμένοντας πάντα αντίθετες η μία στην άλλη (βλ. σχήμα 6). Έτσι οι νέες ορμές μετά την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου θα είναι οι δυο πλευρές ενός τριγώνου με βάση την $\mathbf{P}$ και τρίτη κορυφή επί του κύκλου που έχει ως κέντρο το σημείο $\mathbf{P} - \mathbf{p}_{1,KM}$ και περνά από το άκρο του $\mathbf{P}$. Ο κύκλος υποδηλώνει όλες τις δυνατές διευθύνσεις που μπορεί να έχουν οι ορμές των δυο σωματιδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις δυνατών καταστάσεων κρούσης ανάλογα με το λόγο των μαζών:

(i.) Αν $m_1 = m_2$ ο κύκλος περνά και από τα δύο άκρα του $\mathbf{P}$, οπότε οι ορμές των δυο σωματιδίων μετά την κρούση είναι πάντα κάθετες η μία στην άλλη (το εγγεγραμένο σε κύκλο τρίγωνο με μία εκ των πλευρών να είναι διάμετρος του κύκλου είναι ορθογώνιο).

(ii.) Αν $m_1 > m_2$ η αρχή του $\mathbf{P}$ θα βρίσκεται εκτός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο σωματίδια θα έχουν φορά κίνησης πάντα προς τα "εμπρός" (προς την ίδια πλευρά που κινούταν αρχικά το βλήμα). Επίσης τη μεγαλύτερη γωνία σκέδασης που θα μπορούσε να παρουσιάζει το σωματίδιο 1 θα έχουμε όταν η $\mathbf{p}_1$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου δηλαδή θα είναι:

$$\sin\theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \tag{14}$$

(iii.) Αν $m_1 < m_2$ η αρχή του $\mathbf{P}$ θα βρίσκεται εντός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο 1 μπορεί να σκεδαστεί είτε προς τα "εμπρός" είτε προς τα "πίσω" (αλλά το σωματίδιο 2 θα κατευθύνεται πάντα προς τα “εμπρός”). Αν όλες οι διευθύνσεις εκτροπής της ορμής στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ισοπίθανες η πιθανότητα οπισθοσκέδασης του σωματιδίου 1 είναι

$$\mathcal{P}_{1(\longleftarrow)} = 1 - \frac{\cos^{-1}(m_1/m_2)}{\pi} \; . \tag{15}$$

Αν θέλουμε να μελετήσουμε τη σκέδαση δύο σωματιδίων που αρχικά κινούνται και τα δύο με κάποιο αντίστοιχο διάγραμμα, τότε ο κύκλος των δυνατών τελικών ορμών που θα σχεδιάσουμε δεν θα περνά κατά ανάγκη από κανένα άκρο του **P**.

Άσκηση

Ο κύκλος των δυνατών ορμών έχει ακτίνα ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της διαθέσιμης ενέργειας κρούσης (βλ. σχέση (11)). Εφόσον η ενέργεια αυτή μειώνεται, ο κύκλος των τελικών ορμών είναι μικρότερος. Στην περίπτωση ακίνητου στόχου (α) δείξτε ότι όταν απορροφάται κατά την κρούση όλη η διαθέσιμη ενέργεια, τα σωματίδια κινούνται με τέτοιες ορμές που αντιστοιχούν σε ίσες ταχύτητες (πλαστική κρούση), (β) αν $m_1 > m_2$ πόσο μικραίνει η γωνία μέγιστης σκέδασης του 1 αν η διαθέσιμη ενέργεια μειωθεί κατά ποσοστό q; (γ) αν $m_1 < m_2$ πόσο μπορεί να μειωθεί η διαθέσιμη ενέργεια ώστε τα δύο σωματίδια να κινούνται μετά την κρούση υπό γωνία $\pi/2$ το ένα σε σχέση με το άλλο;

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 12

- Κρούση έχουμε όταν δύο (ή περισσότερα σωματίδια) αλληλεπιδρούν έντονα για χρονικό διάστημα τόσο μικρό ώστε οι ωθήσεις των αλληλεπιδράσεων να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ωθήσεις των άλλων εξωτερικών δυνάμεων σε αυτά. Έτσι κατά τη διάρκεια μιας κρούσης μπορούμε να θεωρούμε το σύστημα των συγκρουόμενων σωματιδίων απομωνομένο.
- Ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων σε μια κρούση έχει ορίζουσα -1 αν η κρούση είναι ελαστική και $0 > \det(\mathbf{M}) > -1$ αν η κρούση είναι ανελαστική.
- Στο σύστημα ΚΜ η κινητική ενέργεια του συστήματος διατείθεται εξ ολοκλήρου στη διαδικασία της κρούσης. Επομένως για δεδομένη συνολική ενέργεια σωματιδίων, στο σύστημα ΚΜ πετυχαίνουμε μέγιστη αξιοποίηση της ενέργειας στη σύγκρουση.
- Στην ελαστική κρούση η ορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ είναι ίδια για τα δύο σωματίδια και ίδια κατά μέτρο πριν και μετά την κρούση.