

Κεφάλαιο 11

Κέντρο μάζας

1 Κέντρο μάζας – Κρούσεις

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα – τον οποίο μέχρι στιγμής δεν έχουμε καθόλου χρησιμοποιήσει μιας και ενδιαφερόμασταν για την κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο πεδίο δυνάμεων το οποίο προερχόταν από το περιβάλλον του, και όχι για την κίνηση σωματιδίων εξαιτίας της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης – μας επιτρέπει, όπως θα δούμε, να αντιμετωπίσουμε ένα σύνολο από σωματίδια ως ένα αντικείμενο, και πιο συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για στερεά σώματα, μπορούμε να μελετάμε την κίνηση τους (όχι τις περιστροφές τους) ως αν ήταν σωματίδια και όχι σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Μάλιστα ο ίδιος ο Νεύτωνας αναγκάστηκε να εισάγει το νόμο αυτό προκειμένου να εξετάσει την κίνηση σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις όπως για παράδειγμα τις κινήσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

Αν και η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα μπορούσε κάλλιστα να πραγματοποιηθεί σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, θα προτιμήσουμε να εργαστούμε σε μία διάσταση έτσι ώστε (i) να είναι πιο απλή η γραφή, (ii) τα επιχειρήματα συμμετρίας που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω να είναι πιο καθαρά και (iii) να γίνει κατανοητό ότι η έννοια της δατήρησης της ορμής και του κέντρου μάζας δεν είναι αποκλειστικά χαρακτηριστικά του τρισδιάστατου χώρου. Έτσι, θα ασχοληθούμε με ένα σύνολο σωματιδίων τα οποία κινούνται σε ένα μονοδιάστατο κόσμο και τα οποία αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους με δυνάμεις νευτώνειου τύπου,¹ δίχως να υπάρχει κάποιο εξωτερικό πεδίο δυνάμεων το οποίο να επηρεάζει την κίνησή τους. Καταγράφοντας την εξίσωση κίνησης για κάθε ένα από τα N σωματίδια θα έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_{2 \rightarrow 1} + F_{3 \rightarrow 1} + F_{4 \rightarrow 1} + \dots F_{N \rightarrow 1} , \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_{1 \rightarrow 2} + F_{3 \rightarrow 2} + F_{4 \rightarrow 2} + \dots F_{N \rightarrow 2} , \\ m_3 \ddot{x}_3 &= F_{1 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 3} + F_{4 \rightarrow 3} + \dots F_{N \rightarrow 3} , \\ &\dots \\ m_N \ddot{x}_N &= F_{1 \rightarrow N} + F_{2 \rightarrow N} + F_{3 \rightarrow N} + \dots F_{N-1 \rightarrow N} , \end{aligned} \tag{1}$$

όπου m_i , $\ddot{x}_i$, η μάζα και η επιτάχυνση του i -στού σωματιδίου και $F_{i \rightarrow j}$ η δύναμη που ασκείται στο j -στό σωματίδιο από το i -στό σωματίδιο. Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις N εξισώσεις

¹Είθισται ο όρος δυνάμεις νευτώνειου τύπου να χρησιμοποιείται με δύο εντελώς διαφορετικά νοήματα: Είτε σε δυνάμεις που υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή ζεύγη δυνάμεων της μορφής δράση-αντίδραση, είτε σε δυνάμεις παγκοσμίου έλξεως, τον σχετικό νόμο για τις οποίες διατύπωσε και πάλι ο Νεύτων. Στις διαλέξεις θα χρησιμοποιούμε τον όρο με το πρώτο του νόημα.

καταλήγουμε στο εντυπωσιακό αποτέλεσμα:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i = 0, \quad (2)$$

αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη με αντιμετατεθιμένους δείκτες και επομένως, με αντίστοιχο άθροισμα για κάθε ζεύγος μηδέν (εξαιτίας του 3ου νόμου του Νεύτωνα). Αν ορίσουμε λοιπόν τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των θέσεων όλων των σωματιδίων,

$$R_{\text{KM}} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad (3)$$

και δεδομένου του αμετάβλητου της μάζας των σωματιδίων, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση αυτής της ποσότητας R_{KM} , που έχει διαστάσεις μήκους, είναι μηδενική. Με άλλα λόγια το R_{KM} , κινείται με σταθερή ταχύτητα! Είναι το R_{KM} , η θέση κάποιου από τα σωματίδια; Όχι κατ' ανάγκη, όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε για δύο σωματίδια. Το R_{KM} αντιστοιχεί σε μια θέση, κάπου ανάμεσα στην περιοχή² που βρίσκονται διασκορπισμένα τα σωματίδια και μάλιστα βρίσκεται πλησιέστερα στις μεγαλύτερες μάζες του συστήματος (δοκιμάστε με ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο πολύ ανόμοιες μάζες)· γι' αυτό το λόγο ονομάζεται κέντρο μάζας του συστήματος.

Από τις παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε ότι $\dot{R}_{\text{KM}} =$ σταθερό· με άλλα λόγια το άυλο αυτό σημείο, κάπου ανάμεσα στα σωματίδια, κινείται με σταθερή ταχύτητα, με την ταχύτητα που είχε αρχικά και που μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει αν γνωρίζει τις αρχικές ταχύτητες όλων των σωματιδίων. Μπορεί να μην γνωρίζουμε τη θέση του κάθε σωματιδίου, και ίσως η εύρεση αυτών να αποτελεί ένα πολύ δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά γνωρίζουμε κάτι πολύ σημαντικό και άσχετο με τις λεπτομέρειες των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων: τη θέση του κέντρου μάζας ανά πάσα χρονική στιγμή.

Το γεγονός ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή θυμίζει τη διατήρηση της ταχύτητας ενός ελεύθερου σωματιδίου. Στην πραγματικότητα η θεώρηση του κέντρου μάζας επιτυγχάνει ακριβώς αυτό: εξισώνει ένα σύστημα από σωματίδια, οσοδήποτε πολλά και αν είναι αυτά, με ένα σωματίδιο, με μάζα όσο η ολική μάζα των σωματιδίων, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας αυτών. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να αγνοούμε τι συμβαίνει «εσωτερικά» στο σύστημα και να προσδιορίζουμε πανεύκολα τη «θέση» του συστήματος, ωσάν να το βλέπαμε από πολύ μακριά και να το αντιμετωπίζαμε ως σημείο. Μάλιστα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η θεώρηση του κέντρου μάζας εξακολουθεί να είναι χρήσιμη και σε περιπτώσεις όπου το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, αλλά ασκούνται επιπλέον των εσωτερικών δυνάμεων και εξωτερικές δυνάμεις στα σωματίδια, από το περιβάλλον του συστήματος.

²Είναι εύκολο να δειχτεί ότι $x_{\min} < R_{\text{KM}} < x_{\max}$.

Ας ξαναγράψουμε τώρα τη διατήρηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας, ελαφρώς παραλλαγμένη:

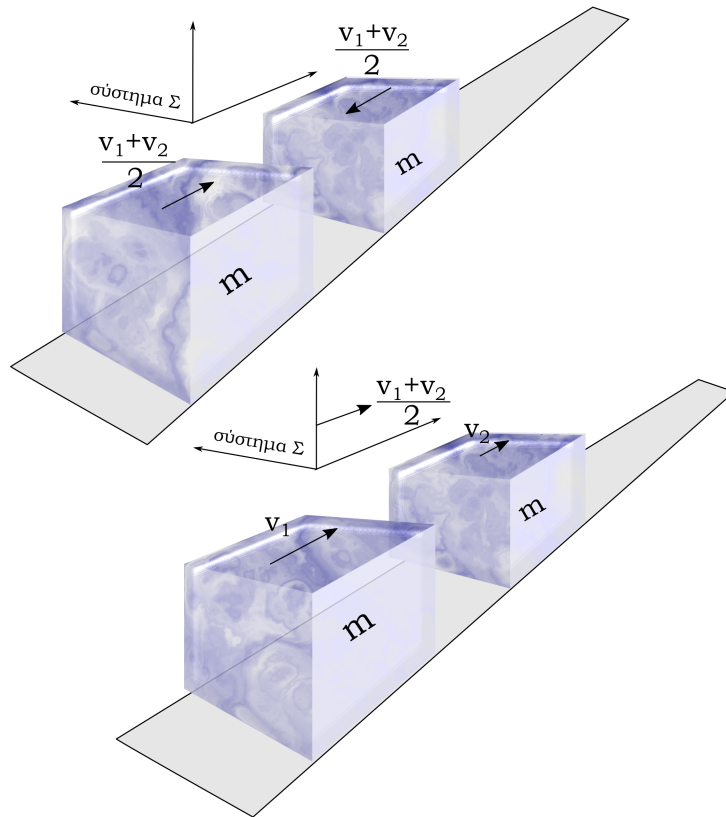
$$M\dot{R}_{\text{KM}} = \sigma\alpha\theta = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i . \quad (4)$$

Η μορφή αυτή έχει το ακόλουθο πλεονέκτημα. Καθ' όλη τη χρονική διάρκεια που μελετάμε το σύστημα των σωματιδίων μπορεί η μάζα τμημάτων του συστήματος να μεταβάλλεται, όχι όμως και η συνολική του μάζα. Για παράδειγμα, μπορεί να αποκοπεί κάποιο θραύσμα από ένα σώμα, χωρίς να μεταβληθεί η συνολική μάζα του συστήματος στην οποία θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και τη μάζα του θραύσματος. Το γεγονός ότι η περιέργη αυτή ποσότητα είναι σταθερή είναι εντυπωσιακό και θεμελιακό (θυμηθείτε τη διατήρηση της ενέργειας). Ο περιορισμός που θέσαμε, ότι δηλαδή το σύστημα πρέπει να είναι απομονωμένο, καθόλου δεν μειώνει τη σημασία της διατήρησης αυτής. Σχεδόν πάντα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα απομονωμένο από το περιβάλλον του, όταν η επίδραση του περιβάλλοντος είναι μηδαμινή (π.χ. το ηλιακό μας σύστημα), ή ο χρόνος που απαιτείται ώστε το περιβάλλον να κάνει αισθητή την παρουσία του στο σύστημα είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τον χαρακτηριστικό χρόνο που συμβαίνουν οι αλλαγές εντός του συστήματος (ένα θερμικά μονωμένο δοχείο με αέριο). Η διατηρούμενη αυτή ποσότητα ονομάζεται ορμή του συστήματος. Όπως και η διατήρηση της ενέργειας, έτσι και η διατήρηση της ορμής είναι συνέπεια κάποιας βαθύτερης συμμετρίας του σύμπαντος, και συγκεκριμένα της ομογένειας του χώρου, δηλαδή της συμμετρίας σε χωρική μετάθεση.

Στη συνέχεια, θα συνάγουμε τη διατήρηση της ορμής βασισμένοι αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι οι φυσικοί νόμοι πρέπει να μένουν ίδιοι όταν τους εξετάζουμε σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς καθώς και σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας. Ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια ίδιας μάζας τα οποία κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο (φανταστείτε δύο πανομοιότυπα βαγόνια κινούμενα πάνω σε αεροτροχιά) με ταχύτητες τέτοιες ώστε το σωματίδιο 1 να πλησιάζει το 2. Ας κινηθούμε πάνω στη διεύθυνση κίνησης των σωματιδίων με τη μέση ταχύτητα αυτών δηλαδή με $v = (v_1 + v_2)/2$. Στο αδρανειακό αυτό σύστημα παρατήρησης τα σωματίδια φαίνονται να κινούνται με ταχύτητες $v_1 - v = (v_1 - v_2)/2$, και $v_2 - v = -(v_1 - v_2)/2$ αντίστοιχα, δηλαδή με ίσες και αντίθετες ταχύτητες (βλ. σχήμα). Εφόσον η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική (αν αντικαταστήσει δηλαδή κάποιος το δεξιά με το αριστερά δεν πρόκειται να παρατηρήσει καμιά αλλαγή αφού τα δύο σωματίδια είναι πανομοιότυπα), αμέσως μετά τη σύγκρουση των δύο σωματιδίων δεν μπορεί παρά να διατηρηθεί αυτή η συμμετρία, δηλαδή τα δύο σωματίδια θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίδιες ταχύτητες. Αν στο σύστημα αυτό παρατήρησης οι ταχύτητες μετά τη σύγκρουση είναι $-v'$ και v' αντίστοιχα, στο αρχικό σύστημα παρατήρησης οι ταχύτητες θα είναι $v - v' = -v' + (v_1 + v_2)/2$ και $v + v' = -v' + (v_1 + v_2)/2$ αντίστοιχα. Παρατηρεί λοιπόν κανείς ότι σε αυτή την περίπτωση η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$mv_1 + mv_2 = m \left[-v' + \frac{v_1 + v_2}{2} \right] + m \left[v' + \frac{v_1 + v_2}{2} \right] .$$

Βέβαια με τον παραπάνω συλλογισμό δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε μονοσήμαντα την κί-



Σχήμα 1: Μεταβαίνοντας σε σύστημα αναφορά Σ που κινείται με τη μέση ταχύτητα των δύο σωμάτων, $(v_1 + v_2)/2$, τα δύο σώματα φαίνονται να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα. Επομένως, μετά την κρούση τους, δεν μπορεί παρά τα σώματα να έχουν πάλι ίδιες ταχύτητες απομακρυνόμενα το ένα από το άλλο. Η σχέση της κοινής τους ταχύτητας, v' , μετά την κρούση, με αυτήν προ της κρούσης, καθορίζεται από τις λεπτομέρειες της κρούσης.

νηση που θα εκτελέσουν τα δύο σωματίδια, αλλά αυτό είναι κάτι το οποίο είναι λογικό να μην μπορούμε να το υπολογίσουμε. Μεσολαβεί η διαδικασία της κρούσης για την οποία δεν διαθέτουμε και πολλές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, αν η κρούση είναι τέτοια ώστε τα σωματίδια να συνενώνονται κατά την κρούση³ δεν μπορεί παρά να είναι $v' = 0$, οπότε το συσσωμάτωμα θα κινείται με ταχύτητα $(v_1 + v_2)/2$ (ακριβώς η λύση στην οποία θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη διατήρηση της ορμής για το συσσωμάτωμα). Αν η κρούση είναι τέτοια ώστε να διατηρείται η ολική κινητική ενέργεια,⁴ το μέγεθος που παράγεται από τον ιδιόμορφο

³Μια τέτοιου είδους κρούση αποκαλείται *πλαστική*.

⁴Για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει η αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων κατά τη διαδικασία της κρούσης να αφορά σε μια συντηρητική δύναμη και μάλιστα περιορισμένης εμβέλειας, ουνώς ώστε όταν τα δύο σωματίδια απομακρυνθούν περισσότερο από το εύρος δράσης της δύναμης να μηδενίζεται η αλληλεπίδραση. Η κρούση σε

αυτό συνδυασμό μάζας και ταχύτητας, τότε εύκολα πάλι καταλήγει κανείς στο γνωστό αποτέλεσμα ανταλλαγής των ταχυτήτων. $v'_1 = v_2$ και $v'_2 = v_1$. Προφανώς κάθε άλλη ενδιάμεση περίπτωση ανάμεσα στις δύο προαναφερθείσες $0 < v' < (v_1 - v_2)/2$ (ημιελαστική κρούση) ή $v' > (v_1 - v_2)/2$ (εκρηκτική ή εξώθερμη κρούση) είναι πλήρως αποδεκτή ως φυσική διαδικασία κρούσης. Η ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, για λόγους συμμετρίας του κόσμου μας και μόνο, ο συνδυασμός $mv_1 + mv_2$ (η συνολική ορμή) στο παράδειγμα αυτό των δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους οφείλει να είναι σταθερός και ανεξάρτητος του είδους της αλληλεπίδρασης!

Προκειμένου να ελέγξουμε αν ισχύει γενικά η διατήρηση της ορμής σε οποιοδήποτε απομονωμένο σύστημα σωμάτων, θα θεωρήσουμε στη συνέχεια την κρούση δύο σωματιδίων με λόγο μαζών 1 προς 2. Όμως, και στην περίπτωση αυτή, το δεύτερο σώμα με τη διπλάσια μάζα μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ξεχωριστά σωματίδια, τα οποία ύστερα από την αλληλουχία όλων των κρούσεων είναι αναγκασμένα να κινηθούν ως συσσωμάτωμα. Είδαμε, όμως, ότι σε κάθε κρούση δύο σωματιδίων ίδιας μάζας η συνολική ορμή τους διατηρείται, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της σύγκρουσης. Μπορεί λοιπόν κανείς να δείξει με τον ίδιο αναλυτικό τρόπο όπως και προηγουμένως, μεταβαίνοντας δηλαδή στο σύστημα αυτό που βλέπει τα εκάστοτε δύο συγκρουόμενα σωματίδια να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα, ότι η συνολική ορμή και αυτού του συστήματος διατηρείται. Όμοια δείχνεται ότι, κατά την κρούση δύο οποιονδήποτε σωματιδίων με ρητό λόγο μαζών η συνολική ορμή τους διατηρείται. Προφανώς αυτό θα ισχύει και για σωματίδια με άρρητο λόγο μαζών αφού κάθε άρρητος μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε με κάποιο ρητό αριθμό. Όσο για τον μηχανισμό της κρούσης δεν χρειάστηκε να εξετάσουμε τις λεπτομέρειες αυτού. Θα μπορούσε να είναι μια στιγμιαία και βίαιη κρούση, ή μια αργή βαθμιαία κρούση μέσω ενός ελατηρίου, ή ακόμη και μια έκρηξη που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωματιδίων· το σημαντικό είναι ότι πάντα πρόκειται για αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μόνο σωμάτων.

Αφού δείξαμε για άλλη μια φορά ότι η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται, στηριζόμενοι σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας και μόνο, ας εξετάσουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα αυτής της διατήρησης. Κατ' αρχάς πόση είναι η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων μετρούμενη από ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με την σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του ίδιου του συστήματος;

$$P_{ολ}^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i v_i^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i (v_i - \dot{R}_{KM}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \right) - M \dot{R}_{KM} = 0. \quad (5)$$

Το σύστημα αυτό, γνωστό ως *σύστημα κέντρου μάζας*⁵, έχει αυτή την εξαιρετική ιδιότητα: η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, και προφανώς θα πα-

αυτή την περίπτωση καλείται *ελαστική* και λόγω διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά τη διαδικασία της κρούσης, η συνολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων προ και μετά την κρούση είναι ίδια αφού η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης είναι ίδια ενόσω τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση μηδενικής αλληλεπίδρασης.

⁵Εφόσον αναφερόμαστε στο αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας θα χρησιμοποιούμε τον δείκτη (KM) στις διάφορες ποσότητες που μετρώνται σε αυτό το σύστημα.

ραμείνει για πάντα μηδενική, εφόσον η ολική ορμή διατηρείται. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος σε αυτό το ιδιαίτερο σύστημα αναφοράς; Θα είναι

$$\begin{aligned}
 K_{\text{ολ}}^{(KM)} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i^{(KM)})^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - \dot{R}_{KM})^2 \\
 &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 - \dot{R}_{KM} \sum_{i=1}^N m_i v_i \\
 &= K_{\text{ολ}} - \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ο όρος που αντικαταστήσαμε με $M \dot{R}_{KM}^2$ είναι απλώς η ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων στο αρχικό σύστημα. Επομένως η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα κέντρου μάζας (KM) ισούται με την ολική κινητική ενέργεια όπως μετράται στο αρχικό σύστημα αναφοράς μείον την ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα όσο όλα τα σωματίδια του συστήματος το οποίο κινείται με την ταχύτητα $\dot{R}_{KM}$ του κέντρου μάζας. Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε την ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σε μια κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και μια εσωτερική κινητική ενέργεια, την κινητική, δηλαδή, ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων στο KM:

$$K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 + K_{\text{ολ}}^{(KM)} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 + K_{\text{εσωτ}} . \tag{7}$$

Θα μπορούσε κανείς να προσθέσει στις δύο αυτές κινητικές ενέργειες (την ολική και την εσωτερική) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, αφού αλλάζοντας σύστημα αναφοράς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν αλλάζουν, και όπως έχουμε συζητήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις στη φύση εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων:

$$E_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 + E_{\text{ολ}}^{(KM)} . \tag{8}$$

Τώρα, ας επιτρέψουμε σε ένα σύστημα σωματιδίων να δέχεται και δυνάμεις από το περιβάλλον του (για παράδειγμα, ένα στερεό σώμα μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων) εκτός από τις δυνάμεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων που το αποτελούν. Τότε το άθροισμα όλων

των εξισώσεων κίνησης (βλ. αρχή του παρόντος κεφαλαίου) θα δώσει:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= F_{2 \rightarrow 1} + F_{3 \rightarrow 1} + F_{4 \rightarrow 1} + \dots F_{N \rightarrow 1} + F_1^{\text{εξ}}, \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= F_{1 \rightarrow 2} + F_{3 \rightarrow 2} + F_{4 \rightarrow 2} + \dots F_{N \rightarrow 2} + F_2^{\text{εξ}}, \\
 m_3 \ddot{x}_3 &= F_{1 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 3} + F_{4 \rightarrow 3} + \dots F_{N \rightarrow 3} + F_3^{\text{εξ}}, \\
 &\dots \\
 + m_N \ddot{x}_N &= F_{1 \rightarrow N} + F_{2 \rightarrow N} + F_{3 \rightarrow N} + \dots F_{N-1 \rightarrow N} + F_N^{\text{εξ}},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$M \ddot{R}_{KM} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{εξ}}.$$

Δηλαδή, το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν να επρόκειτο για ένα σωματίδιο μάζας M πάνω στο οποίο ασκούνται όλες μαζί οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχονται τα σωματίδια. Για παράδειγμα αν μια οβίδα κινούμενη μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης εκραγεί⁶, σύμφωνα με τα παραπάνω, μολονότι τα θραύσματά της θα εξακοντιστούν σε όλες τις διευθύνσεις, το κέντρο μάζας αυτών θα εξακολουθήσει ανενόχλητο την παραβολική του τροχιά. Μοναδική διαταραχή της παραβολικής κίνησης του ΚΜ θα προακλέσει η εμφάνιση των αντιδράσεων του εδάφους κάθε φορά που κάποιο θραύσμα προσκρούσει στο έδαφος. Έτσι κάθε φορά που κάποιο θραύσμα φτάνει στο έδαφος, το ΚΜ θα αλλάξει στιγμιαία διεύθυνση κίνησης.

2 Διατήρηση της ορμής σε περισσότερες της μιας διάστασης

Όσα γράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο και αφορούσαν την κίνηση αλληλεπιδρώντων σωματιδίων σε μια διάσταση γενικεύονται χωρίς καμία ιδιαιτερότητα και σε περισσότερες διαστάσεις. Το μόνο που χρειάζεται είναι να αντικαταστήσουμε όλες τις θέσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις με τα αντίστοιχα διανύσματα.

Έτσι όταν έχουμε πολλά αλληλεπιδρώντα σωματίδια, στα οποία δεν δρα κανένα εξωτερικό πεδίο η συνολική τους ορμή διατηρείται

$$\mathbf{P}_{\text{ολ}}(t_1) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_1) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_2) = \mathbf{P}_{\text{ολ}}(t_2) \tag{10}$$

Η σταθερή αυτή ορμή μπορεί να αντιστοιχισθεί με ένα σώμα μάζας όση η μάζα όλων των σωματιδίων το οποίο κινείται με την σταθερή ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{KM}$ του κέντρου μάζας:

$$\mathbf{P}_{\text{ολ}} = \text{σταθ} = M \dot{\mathbf{R}}_{KM} \tag{11}$$

⁶Πρόκειται για κίνηση σε τρεις διαστάσεις, αλλά όσα έχουμε μάθει για τη μια διάσταση εφαρμόζονται κάλλιστα και στις τρεις διαστάσεις όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω.

όπου το κέντρο μάζας του συστήματος είναι το σημείο μεταξύ των σωματιδίων

$$\mathbf{R}_{KM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Άσκηση γεωμετρίας

Δείξτε ότι αν ένα πλήθος σωματιδίων καταλαμβάνει ένα χώρο ο οποίος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό μιας σφαίρας, τότε θα ισχύει το ίδιο και για το κέντρο μάζας τους.

Στο σύστημα κέντρου μάζας, δηλαδή το αδρανειακό σύστημα που κινείται με την ίδια ταχύτητα που κινείται το ΚΜ, η ολική ορμή είναι μηδενική⁷

$$\mathbf{P}_{ολ}^{(KM)} = \mathbf{0} .$$

Τέλος η σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας των σωματιδίων σε ένα σύστημα και στο σύστημα ΚΜ είναι ακριβώς αυτή που βρήκαμε στο προηγούμενο εδάφιο (7) αφού οι κινητικές ενέργειες κατασκευάζονται από τα τετράγωνα των ταχυτήτων που είναι αδιάφορα για τον διανυσματικό χαρακτήρα αυτών. Η σχέση μάλιστα των κινητικών ενεργειών θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένας άλλος εναλλακτικός ορισμός του συστήματος ΚΜ: είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο η ολική κινητική ενέργεια λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της. Έτσι όταν στους επιταχυντές προετοιμάζονται δέσμες υποατομικών σωματιδίων για να συγκρουστούν και να μας δώσουν πληροφορίες για τα βαθύτερα μυστικά της ύλης, είναι καλύτερα όλη η ενέργεια που ξοδεύεται για την επιτάχυνση των σωματιδίων να χρησιμοποιείται έτσι ώστε η σύγκρουσή τους να συμβαίνει στο σύστημα ΚΜ αυτών, ειδάλλως μέρος της ενέργειας πηγαίνει χαμένη και δεν χρησιμοποιείται για την επιδιωκόμενη σύγκρουση.

Όπως και στη μία διάσταση, όταν ένα σύνολο σωματιδίων υπόκειται και σε εξωτερικό πεδίο δυνάμεων, εκτός από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των σωματιδίων υπαγορεύει και την κίνηση του κέντρου μάζας τους:

$$M\ddot{\mathbf{R}}_{KM} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{εξ} . \quad (12)$$

3 Αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων

Το πρόβλημα της κίνησης στο χώρο δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων αποκτά ιδιαίτερη αξία κάτω από το πρίσμα της διατήρησης της ορμής. Συνοπτικά, η κίνηση δύο σωματιδίων

⁷Μάλιστα η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί το σύστημα ΚΜ.

μπορεί να διαχωριστεί στην κίνηση του κέντρου μάζας τους και στην κίνηση ενός μόνο σωματιδίου υπό την επίδραση κάποιου εξωτερικού πεδίου. Δεδομένου μάλιστα της γνώσης μας περί ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας αλληλεπιδρώντων σωματιδίων η μελέτη της κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων καθίσταται ισοδύναμη με την κίνηση ενός απλού σωματιδίου σε εξωτερικό πεδίο.

Έστω λοιπόν δύο σημειακά σωματίδια με μάζες m_1, m_2 τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ τη χρονική στιγμή t και ασκούν δυνάμεις νευτώνειου τύπου το ένα στο άλλο. Οι εξισώσεις κίνησης για τα δύο αυτά σωματίδια θα είναι

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (13)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} . \quad (14)$$

Αν προσθέσουμε τις δύο αυτές εξισώσεις καταλήγουμε ότι

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} ,$$

δηλαδή στο ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ορμής του συστήματος $\mathbf{P}_{\text{ολ}} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ είναι μηδενικός. Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο είναι απλή επανάληψη της (9) για δύο σωματίδια σε τρεις διαστάσεις και αποτελεί επαναδιατύπωση της διατήρησης της ορμής, βασίζεται στο ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι δυνάμεις νευτώνειου τύπου. Μεταβαίνοντας στο σύστημα ΚΜ,⁸ η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδενική, όπως είπαμε παραπάνω οπότε στο σύστημα αυτό ισχύει ότι

$$m_1 \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + m_2 \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \mathbf{0}$$

όπου συμβολίσαμε με $\tilde{\mathbf{r}}_{1,2}$ τις θέσεις των δύο σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ. Οι εξισώσεις κίνησης (14) πάντως δεν αλλάζουν στο νέο αυτό αδρανειακό σύστημα αφού οι δυνάμεις δεν είναι δυνατό να εξαρτώνται παρά μόνο από τις σχετικές θέσεις και τις σχετικές ταχύτητες των δύο σωματιδίων οι οποίες δεν επηρεάζονται από το σύστημα αναφοράς το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να τις περιγράψουμε. Έτσι αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις κίνησης στο ΚΜ αφού πρώτα τις διαρέσουμε με τις αντίστοιχες μάζες βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 &= \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}/m_1 \\ -\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 &= \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}/m_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) .$$

Η ποσότητα

$$\mathbf{r}_{12} = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

⁸Το σύστημα ΚΜ είναι ένα αδρανειακό σύστημα, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{KM} = \mathbf{P}_{\text{ολ}}/M$ σε σχέση με το αρχικό μας σύστημα το οποίο εξ υποθέσεως είναι αδρανειακό προκειμένου να μπορούμε να γράψουμε το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για τα δύο σωματίδια.

είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων δηλαδή η θέση του 1 ως προς το 2 και για την οποία μαθαίνουμε ότι

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (16)$$

με

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Η νέα αυτή ποσότητα μ με διαστάσεις μάζας (το ήμισυ του αρμονικού μέσου των δύο μαζών) ονομάζεται *ανηγμένη⁹ μάζα*.

Η εξίσωση (16), τουλάχιστον σε φορμαλιστικό επίπεδο, περιγράφει ένα σωματίδιο μάζας μ το οποίο κινείται υπό την επίδραση της ίδιας δύναμης που ασκούνταν στο σωματίδιο 1 από το 2. Ποιο είναι αυτό το σωματίδιο; Δεν υπάρχει κανένα τέτοιο πραγματικό σωματίδιο. Η μελέτη της κίνησης του εικονικού αυτού σωματιδίου όμως μπορεί να αποκαλύψει την κίνηση των δύο επί μέρους σωματιδίων. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \quad (17)$$

λαμβάνοντας τη διαφορά $\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2$ και το γραμμικό συνδυασμό $m_1 \tilde{\mathbf{r}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{r}}_2$. Η γνώση του $\mathbf{r}_{12}(t)$ λοιπόν είναι αρκετή για τον καθορισμό της κίνησης και των δύο σωματιδίων. Είναι, όμως, δυνατό να επιλύσουμε την (16); Μα φυσικά, αφού η $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ δεν μπορεί να εξαρτάται όπως είπαμε παρά από τα $\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_{12}$, $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_{12}$ και εν γένει του χρόνου t . Επομένως πρόκειται για τη δυναμική εξίσωση του Νεύτωνα υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα ενός σωματιδίου και ίσως του χρόνου. Η γενική αυτή περίπτωση εξετάστηκε και σχολιάστηκε εκτενώς στα πρώτα κεφάλαια. Μάθαμε επίσης ότι ακόμη και αν δεν είναι δυνατό να παραχθεί μια αναλυτική λύση, λόγω πολυπλοκότητας της μορφής της διαφορικής εξίσωσης, υπάρχει κάποια λύση στο εν λόγω πρόβλημα, η οποία θα μπορούσε να κατασκευαστεί αν μη τι άλλο με αριθμητικές μεθόδους.

Συνεπώς το πρόβλημα της κίνησης δύο σωμάτων που ασκούν νευτώνειου τύπου δυνάμεις το ένα στο άλλο, ανάγεται σε ένα άλλο απλούστερο πρόβλημα: Αυτό της κίνησης ενός σώματος μάζας μ υπό την επίδραση μιας δύναμης $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$. Η λύση του προβλήματος αυτού $\mathbf{r}_{12}(t)$ μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η θέση του κάθε σώματος χωριστά:

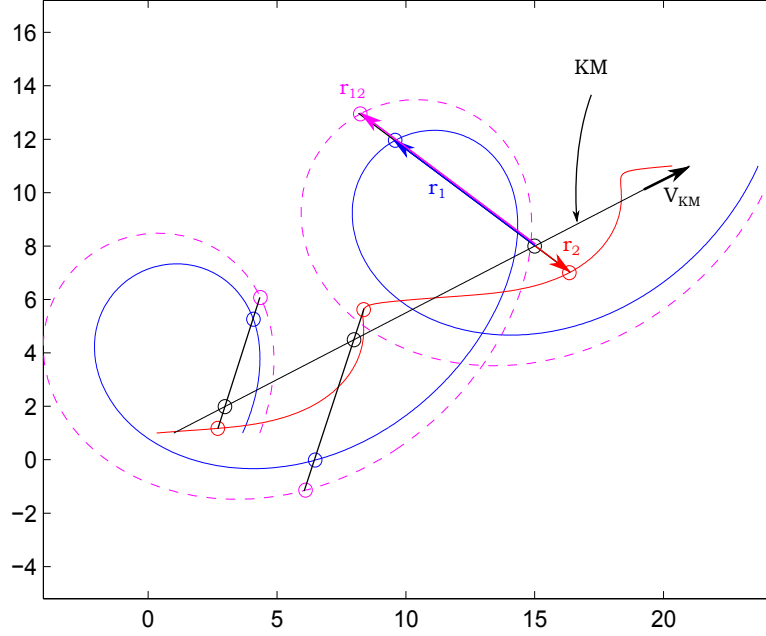
$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM} t + \tilde{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM} t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}(t) \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM} t + \tilde{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM} t - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}(t) \quad (19)$$

όπου $\mathbf{R}_{KM}(0)$ και $\dot{\mathbf{R}}_{KM}(0)$ η αρχική θέση και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του ΚΜ που δίνονται από τις αρχικές συνθήκες

⁹Μετοχή του ανάγω και όχι του ανοίγω.

$$\mathbf{R}_{KM}(0) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(0) + m_2 \mathbf{r}_2(0)}{m_1 + m_2} \quad \dot{\mathbf{R}}_{KM}(0) = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2(0)}{m_1 + m_2} .$$



Σχήμα 2: Οι τροχιές των δύο σωμάτων προκύπτουν από τη σύνθεση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας τους (μαύρη γραμμή) $\mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t$ και της θέσης του εκάστοτε σώματος $\mathbf{r}_1$ (μπλε τροχιά) και $\mathbf{r}_2$ (κόκκινη τροχιά). Τα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ με τη σειρά τους υπολογίζονται ως τα ποσότητες m_2/M και $-m_1/M$ του $\mathbf{r}_{12}(t)$ το οποίο υπολογίζεται λύνοντας το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για ένα υποθετικό σωματίδιο με μάζα μ που κινείται ως προς το KM υπό το πεδίο της $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$. Το υποθετικό αυτό σωματίδιο θα διέγραφε τη μωβ διακεκομμένη τροχιά. Στο σχήμα φαίνονται τρεις τετράδες σημείων (με τα αντίστοιχα χρώματα) για τρεις διαδοχικούς χρόνους.

Τέλος η λύση της $\mu \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ προκειμένου να βρούμε την $\mathbf{r}_{12}(t)$ γίνεται με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{r}_{12}(0) = \mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0) \quad \dot{\mathbf{r}}_{12}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) - \dot{\mathbf{r}}_2(0) .$$

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων, αν η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωματιδίων έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια, το επίπεδο της κίνησης των δύο σωματιδίων ως προς το KM διατηρείται σταθερό (αν σχεδιάσουμε δηλαδή την $\mathbf{r}_{12}$ σε διάφορες χρονικές στιγμές αυτή θα διαγράφει ένα επίπεδο· το επίπεδο που όριζαν αρχικά τα $\mathbf{r}_{12}(0)$ και $\dot{\mathbf{r}}_{12}(0)$). Σε αυτή την περίπτωση αρκεί να λύσουμε το νόμο του Νεύτωνα στο επίπεδο και όχι στο χώρο. Αν οι δυνάμεις είναι επιπλέον και συντηρητικές, τελικά το πρόβλημα της κίνησης ανάγεται σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα που αφορά στο ακτινικό

μέρος της λύσης, το $|\mathbf{r}_{12}(t)|$. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις δυνάμεων δεν είναι και τόσο ειδικές καθώς όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό αναλογιστείτε το τιτάνιο έργο του Κέπλερ να ανακαλύψει την τροχιά των πλανητών παρατηρώντας μια τόσο σύνθετη κίνηση όσο η μπλε τροχιά στο σχήμα 2, αφού το σημείο παρατήρησης δεν ήταν το ΚΜ αλλά η κινούμενη Γη, και μάλιστα παρατηρώντας απλώς την προβολή των τροχιών στον έναστρο ουρανό. Για καλή του τύχη βέβαια ο Ήλιος στο ηλιακό μας σύστημα έχει τόσο μεγάλη μάζα σε σχέση με τους πλανήτες, ώστε τα $\mathbf{r}_1$ και r_{12} σχεδόν συμπίπτουν.

4 * Συστήματα μεταβλητής μάζας

Η γνώση των ιδιοτήτων του κέντρου μάζας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για έναν πολύ απλό λόγο: Προκειμένου να μάθουμε ποια είναι η κίνηση όλων των μερών του συστήματος, αυτό που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η κίνηση όλων των υπολοίπων μερών εκτός από ένα, αφού η γνώση της θέσης των υπολοίπων καθώς επίσης και του κέντρου μάζας είναι αρκετά για να προσδιορισθεί η θέση του τελευταίου. Το γεγονός αυτό μας διευκολύνει στην διερεύνηση της κίνησης σωμάτων με μεταβλητή μάζα.

Ας θεωρήσουμε ένα κινητό του οποίου η μάζα μεταβάλλεται¹⁰. Αν συμπεριλάβουμε τη μάζα του κινητού και τη μάζα που είτε προστίθεται σε αυτό είτε αφαιρείται από αυτό σε ένα σύστημα, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ του κινητού και της μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται από αυτό αν εστιάσουμε την προσοχή μας στην ορμή όλου του συστήματος. Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως η ορμή του συστήματος θα αλλάξει μόνο εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική κίνηση κινητού και εισερχόμενης/εξερχόμενης μάζας να υπολογίζουμε την κίνηση του κινητού μόνο.

$$F^{\text{εξ}}(t) = \frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} \quad (20)$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία θα θεωρήσουμε αρχικά ως παράδειγμα ένα βαγόνι τρένου μάζας M το οποίο είναι φορτωμένο με N ανθρώπους, μάζας m ο καθένας, και οι οποίοι τρέχοντας μέσα στο βαγόνι, αντίθετα με την κίνηση αυτού, πηδούν ένας-ένας από το βαγόνι με μια συγκεκριμένη ταχύτητα ως προς αυτό V . Στο παράδειγμα αυτό, αγνοώντας την τριβή των τροχών του βαγονιού με τις ράγες, η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα (βαγόνι συν επιβάτες) είναι μηδενική (στη διεύθυνση κίνησης του βαγονιού), επομένως η ορμή του συστήματος (στην ίδια διεύθυνση) είναι ίδια πριν και μετά την εκτίναξη κάθε επιβάτη (όχι όμως και η ορμή του συστήματος στην αρχή και το τέλος συνολικά του φαινομένου, αφού η

¹⁰ Εδώ δεν υπονοούμε ότι υπάρχει κάποια πηγή ή καταβόθρα μάζας. Απλώς η μάζα του συστήματος που μας ενδιαφέρει αλλοιώνεται μεταφερόμενη είτε προς το υπόλοιπο περιβάλλον, είτε από το περιβάλλον προς το σύστημα.

επαφή κάθε επιβάτη με το έδαφος θα επιφέρει μια εξωτερική δύναμη που θα αλλάξει την ορμή του συστήματος). Επομένως

$$(M + nm)u_n = (M + (n - 1)m)u_{n-1} + m(u_{n-1} + V) . \quad (21)$$

Οι δύο όροι στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης περιγράφουν (α) την ορμή του βαγονιού με το πλήρωμα του όταν θα έχουν απομείνει $n - 1$ επιβάτες, και (β) την ορμή του ανθρώπου που θα εγκαταλείψει το βαγόνι με σχετική ταχύτητα ως προς το βαγόνι $-V$. Στην πραγματικότητα η μετάβαση της ταχύτητας του βαγονιού από την τιμή u_n στην u_{n-1} γίνεται βαθμιαία καθώς ο n -οστός άνθρωπος τρέχει εντός του. Λύνοντας καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$u_{n-1} = u_n + \frac{m}{M + nm}V . \quad (22)$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος μας δίνει την τελική ταχύτητα του βαγονιού όταν θα το έχουν εγκαταλείψει όλοι οι επιβάτες του. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας πώς αρχικά το βαγόνι ήταν ακίνητο ($u_N = 0$), βρίσκουμε

$$u_{\text{τελ}} = u_0 + V \sum_{n=N}^1 \frac{m}{M + nm} \quad (23)$$

Το παραπάνω άθροισμα δεν μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή, μπορεί όμως να δείξει κανείς, κατασκευάζοντας το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{(M/m) + x}$, ότι

$$\sum_1^{n=N} \frac{m}{M + nm} < \int_0^N f(x) dx < \sum_0^{n=N-1} \frac{m}{M + nm} . \quad (24)$$

Το μεσαίο ολοκλήρωμα ισούται με $\log(1 + Nm/M)$, ενώ η διαφορά το αριστερού και του δεξιού αθροίσματος είναι

$$\frac{m}{M} - \frac{m}{M + Nm} = \frac{Nm^2}{M(M + Nm)} < \frac{m}{M} .$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τελική ταχύτητα είναι

$$u \simeq V \log \left(1 + N \frac{m}{M} \right)$$

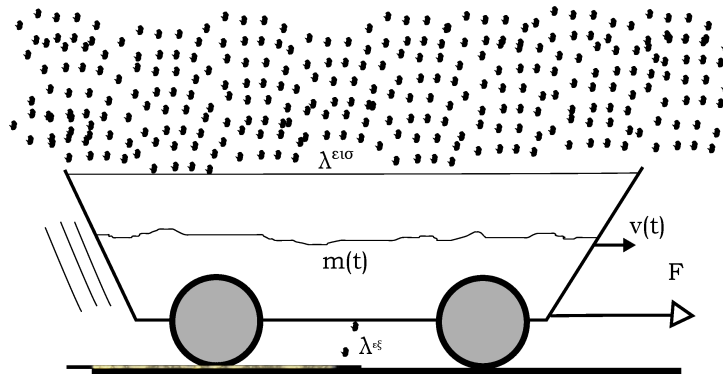
με σφάλμα μικρότερο του m/M . Στο όριο που η εκροή μάζας είναι συνεχής, δηλαδή αν $m/M \rightarrow 0$, το παραπάνω αποτέλεσμα για την τελική ταχύτητα είναι ακριβές. Η μορφή αυτού εξηγεί γιατί οι πύραυλοι έχουν αρχική μάζα πολύ μεγαλύτερη του ωφέλιμου φορτίου τους, προκειμένου να αποκτήσουν πολύ μεγάλη τελική ταχύτητα και να καταφέρουν να διαφύγουν από το βαρυτικό πεδίο¹¹.

¹¹ Ένας πραγματικός πύραυλος κατά την εκτόξευσή του προς το διάστημα βρίσκεται συνεχώς μέσα στο βαρυτικό πεδίο, επομένως η σχέση στην οποία καταλήξαμε δεν είναι απολύτως ακριβής για έναν πύραυλο. Παρόλ' αυτά εξακολουθεί να είναι ποιοτικά ορθή ως προς την εξέλιξη της ως λογαριθμική συνάρτηση της μάζας.

Ας δούμε και ένα δεύτερο παράδειγμα, με συνεχή τώρα μεταβολή μάζας και μάλιστα υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Ένα καρότσι μάζας M το οποίο σύρεται σε οριζόντιο δρόμο, άνευ τριβής, με σταθερή δύναμη F , αλλά το οποίο, εξαιτίας της βροχής που πέφτει κατακόρυφα, γεμίζει σιγά-σιγά με νερό, ενώ ταυτόχρονα αδειάζει από μια τρύπα στον πάτο του. Γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα απειροστό χρονικό διάστημα, θα έχουμε

$$F = \frac{[(m + dm^{\text{εισ}})(v + dv) + dm^{\text{εξ}}v] - [(m + dm^{\text{εξ}})v + dm^{\text{εισ}} \cdot 0]}{dt} \quad (25)$$

όπου το σύστημα που θεωρούμε είναι το καρότσι με το νερό που έχει μαζευτεί στο εσωτερικό του τη χρονική στιγμή t μάζας m συν την ποσότητα $dm^{\text{εξ}}$ του νερού που την αμέσως επόμενη στιγμή θα χυθεί από την τρύπα, καθώς επίσης και η ποσότητα $dm^{\text{εισ}}$ του νερού της βροχής που πρόκειται να προστεθεί στο καρότσι το αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα dt . Όντας κατακόρυφη η πτώση των σταγόνων της βροχής, η οριζόντια ορμή που μεταφέρουν αυτές (τη χρονική στιγμή t) είναι μηδενική (τελευταίος όρος στον αριθμητή). Επίσης τη χρονική στιγμή $t + dt$ το βαγόνι έχει απωλέσει τη μάζα $dm^{\text{εξ}}$ η οποία εξέρχεται από το βαγόνι με την οριζόντια ταχύτητα



Σχήμα 3: .

του βαγονιού¹². Εκτελώντας τις πράξεις και απορρίπτοντας όρους δεύτερης τάξης ως προς τα διαφορικά καταλήγουμε στη σχέση

$$F = \frac{dm^{\text{εισ}}}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \quad (26)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ρυθμός αύξησης της μάζας του καροτσιού $dm^{\text{εισ}}/dt$ θα θεωρήσουμε ότι είναι δεδομένος

$$dm^{\text{εισ}}/dt = \lambda^{\text{εισ}} > 0$$

¹² Παρότι η σταγόνα που θα τρέξει από το βαγόνι θα πάψει να αισθάνεται τη δύναμη που σπρώχνει το βαγόνι καταγράφουμε την ορμή της αφού αποτελεί μέρος του συστήματος.

και εξαρτάται από το πόσο ραγδαία είναι η βροχόπτωση¹³. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι

$$dm^{εξ}/dt = \lambda^{εξ} < 0 ,$$

οπότε $m(t) = m(0) + (\lambda^{εισ} + \lambda^{εξ})t$. Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση της κίνησης καταλήγουμε ότι

$$v = \frac{F}{\lambda^{εισ}} \left[1 - \left(\frac{m(0)}{m(0) + (\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ})t} \right)^{\frac{\lambda^{εισ}}{\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ}}} \right] . \quad (27)$$

Η έκφραση για την ταχύτητα είναι μονοτόνως αύξουσα σε κάθε περίπτωση (είτε $\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ}$ είναι θετικό είτε είναι αρνητικό) και μετά από αρκούντως μεγάλο χρόνο t , η ταχύτητα καταλήγει στην οριακή της τιμή $F/\lambda^{εισ}$. Βέβαια, αν $\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ} > 0$ (στο βαγόνι προστίθεται περισσότερο νερό, απ' όσο χάνεται) κάποια στιγμή το βαγόνι θα γεμίσει και πλέον θα ξεχειλίζει και θα αρχίσει να χάνει επιπλέον νερό από τα πλευρικά του τοιχώματα. Η δεύτερη αυτή απώλεια συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο (ως προς τη μεταφορά της ορμής στο περιβάλλον) που συνέβαινε και η απώλεια από την τρύπα του βαγονιού. Έκτοτε θα είναι $\lambda'^{εξ} + \lambda^{εισ} = 0$. Η μόνη διαφορά πλέον στην εξίσωση (26) θα είναι ότι η μάζα m θα πάψει να μεταβάλλεται. Έτσι μετά από χρόνο

$$t_1 = \frac{M_{\pi\lambda\eta\rho} - m(0)}{\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ}}$$

που θα χρειαστεί το βαγόνι για να γεμίσει με νερό και να αποκτήσει μάζα $M_{\pi\lambda\eta\rho}$ θα συνεχίσει να κινείται με ταχύτητα

$$v = \frac{F}{\lambda^{εισ}} \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda^{εισ} v_1}{F} \right) e^{-\lambda^{εισ}(t-t_1)/M_{\pi\lambda\eta\rho}} \right] \quad (28)$$

όπου $v_1 = v(t_1)$ η ταχύτητα που απέκτησε το βαγόνι στην πρώτη φάση πλήρωσής του με νερό. Η νέα αυτή έκφραση για την ταχύτητα έχει πάλι την ίδια οριακή τιμή $F/\lambda^{εισ}$ όπως και η (27), αν και σε αυτή την περίπτωση η εξέλιξη είναι εκθετική και όχι απλώς ένας νόμος δύναμης όπως στην (27). Ο λόγος που οι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια οριακή τιμή είναι διαφορετικός από δυναμικής άποψης. Στην πρώτη περίπτωση (27) η δύναμη χρησιμοποιείται για να επιταχύνει μάταια ένα υπέρβαρο βαγόνι. Στη δεύτερη περίπτωση (28) τελικά η δύναμη χρησιμοποιείται για να προσφέρει κατάλληλη ορμή στην ακίνητη (οριζοντίως) βροχή ώστε να κινείται με την τελική αυτή ταχύτητα του βαγονιού.

Άσκηση ορίων

Προσπαθήστε να καταλήξετε στην έκφραση (28) με $v_1 = 0$, μέσω της (27) λαμβάνοντας το όριο $\lambda^{εξ} + \lambda^{εισ} \rightarrow 0$.

¹³Γενικότερα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ο όρος $dm^{εισ}/dt$ είναι κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου.

Ο τρόπος που μάθαμε να δουλεύουμε σε συστήματα μεταβλητής μάζας είναι γενικός. Αυτό που θα πρέπει κανείς να προσέξει για να μην μπρεδεύεται είναι όταν γράψει τη δυναμική εξίσωση

$$F = \frac{p(t + dt) - p(t)}{dt}$$

να φροντίσει να καθορίσει τη μάζα του συστήματος, δηλαδή τη συνολική μάζα η οποία συμμετέχει στη διαδικασία σε όλο το χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$. Για το λόγο αυτό θα πρέπει η συνολική μάζα που γράφει κανείς στην έκφραση για το $p(t)$ να υπάρχει και στην $p(t + dt)$, αν και με διαφορετική ίσως ταχύτητα το κάθε μέρος της μάζας, στην εκάστοτε ορμή (βλ. σχέση (25)).

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 11

- Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα εξασφαλίζει ότι ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, απομονωμένο από το υπόλοιπο περιβάλλον διατηρεί τη συνολική του ορμή. Αυτό εκφράζεται μέσω της ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας του, ενός υποθετικού σημείου ανάμεσα στα σωματίδια.
- Η διατήρηση της ορμής είναι αποτέλεσμα φυσικής συμμετρίας.
- Στο αδρανειακό σύστημα ΚΜ (που κινείται όπως το ΚΜ) η κίνηση δύο σωματιδίων περιγράφεται με έναν δυναμικό νόμο, όπου τη θέση της μάζας καταλαμβάνει η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων, το διάνυσμα θέσης είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων και η δύναμη είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο σωματιδίων. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μπορεί να καθορίσει τη σχετική θέση των δύο σωματιδίων, η οποία σε συνδυασμό με την κίνηση του ΚΜ μπορεί να καθορίσει την κίνηση του κάθε σωματιδίου χωριστά. Το πρόβλημα δύο σωμάτων ανάγεται σε πρόβλημα ενός σώματος.
- Στη μελέτη προβλημάτων μεταβλητής μάζας είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα, φροντίζοντας η μάζα του συστήματος στην αρχή και στο τέλος του χρονικού αυτού διαστήματος να είναι η ίδια, παρόλο που τα διάφορα μέρη του συστήματος μπορεί να διαφοροποιούνται ως προς την ορμή τους στο χρονικό αυτό διάστημα.