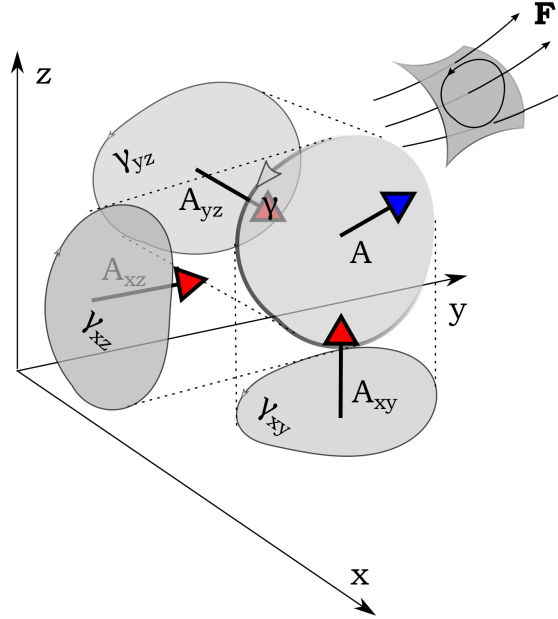


Κεφάλαιο 10

Στροβιλισμός & συντηρητικά πεδία

1 * Στροβιλισμός πεδίου δυνάμεων

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το φυσικό νόημα της δράσης του διαφορικού τελεστή ∇ πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο υπό τη μορφή εξωτερικού γινομένου. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια δράση παράγει ένα νέο διανυσματικό μέγεθος, τον *στροβιλισμό* του διανυσματικού πεδίου, ο οποίος μας δίνει τη δυνατότητα σε τοπικό επίπεδο να γνωρίζουμε κατά πόσο ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό ή όχι. Μόνο αν το πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή έχει μηδενικό στροβιλισμό, τότε έχει νόημα η κατασκευή κάποιου βαθμωτού πεδίου το οποίο να παίζει το ρόλο δυναμικής ενέργειας για το πεδίο.



Σχήμα 1: Καθώς το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ διατρέχει ένα επιφανειακό χωρίο A (βλ. ένθετο), μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $C = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ που αντιστοιχεί στο έργο της δύναμης κατά μήκος της διαδρομής που αποτελεί σύνορο αυτού του χωρίου. Με τον δεδομένο προσανατολισμό του χωρίου, μπορούμε να ορίσουμε το $\lim_{A \rightarrow 0} (C/A)$ καθώς και όλα τα αντίστοιχα όρια των προβολών του A σε όλα τα καρτεσιανά επίπεδα A_{xz}, A_{xy}, A_{yz} .

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό απλό χωρίο στο χώρο τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ένα επίπεδο (βλ. ένθετο σχήματος 2). Έστω ότι το χωρίο αυτό έχει εμβαδόν

μέτρου A . Το έργο που εκτελείται από το πεδίο δυνάμεων αν διατρέξουμε την κλειστή καμπύλη γ ¹ που ορίζει το σύνορο του χωρίου με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, καθώς βλέπουμε την επιφάνεια από επάνω² (η φορά αυτή λαμβάνεται ως η θετική φορά) είναι:

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (1)$$

Αν διατρέχαμε την καμπύλη με αρνητική φορά τότε το έργο θα ήταν $-C$. Το έργο γύρω από μία κλειστή καμπύλη ονομάζεται *κυκλοφορία* και μετράει πόσο στροβιλίζεται (με την καθημερινή έννοια του όρου) το πεδίο της δύναμης. Σχηματίζουμε τώρα το όριο (θα δούμε σε λίγο ότι υπάρχει αυτό το όριο) το οποίο θα ονομάσουμε στροβιλισμό:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{C}{A} .$$

Το όριο αυτό θα εξαρτάται από το πεδίο της δύναμης αλλά και από το ίδιο το χωρίο και τα χαρακτηριστικά του. Καθώς το χωρίο τείνει σε ένα μηδενικό χωρίο, τα μοναδικά χαρακτηριστικά αυτού είναι ο ίδιος του ο προσανατολισμός στο χώρο³. Τον προσανατολισμό τον ορίζουμε με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο χωρίο, $\hat{\mathbf{n}}$, ενώ τη φορά του καθέτου διανύσματος την επιλέγουμε με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία: όταν το σύνορο διαγράφεται με τη θετική φορά τότε το κάθετο διάνυσμα έχει την διεύθυνση κίνησης ενός δεξιόστροφου κοχλία που περιστρέφεται όπως διαγράφεται το σύνορο.

Αν επιλέξουμε ένα καρτεσιανό σύστημα μπορούμε σε κάθε σημείο του χώρου να ορίσουμε τρεις στροβιλισμούς. Τον Ω_x στροβιλισμό ως:

$$\Omega_x = \lim_{A_{yz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{yz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{yz}} , \quad (2)$$

για μια διαφορική επιφάνεια η οποία είναι σε ένα επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο $y - z$ με εμβαδόν μέτρου A_{yz} και κατεύθυνση τον άξονα x , και παρομοίως τον Ω_y και Ω_z στροβιλισμό:

$$\Omega_y = \lim_{A_{xz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{xz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{xz}} , \quad \Omega_z = \lim_{A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{xy}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{xy}} .$$

¹Θα μπορούσε να φανταστεί κανείς την καμπύλη γ ως ένα σύρμα πάνω στο οποίο μπορεί να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\mathbf{F}$ μια χάντρα. Ακόμη και αν το πεδίο της δύναμης δεν καταφέρνει από μόνο του να κινήσει τη χάντρα κατά μήκος της κλειστής αυτής διαδρομής, θα μπορούσαμε να την σπρώξουμε με μια κατάλληλη δική μας δύναμη, έτσι ώστε αυτή να καταφέρει ολοκληρώσει τη διαδρομή της, αλλά στο τέλος θα μετρήσουμε το έργο μόνο της εξωτερικής $\mathbf{F}$.

²Το επάνω αναφέρεται στο σχήμα 2, αλλά δεν έχει και τόσο νόημα στη γενική περίπτωση. Αυτό που εννοούμε στη γενική περίπτωση είναι ότι βλέπουμε το χωρίο από την εξωτερική πλευρά του τετράεδρου ογκιδίου που σχηματίζεται από το χωρίο και τα 3 επίπεδα $x - y$, $y - z$, $z - x$.

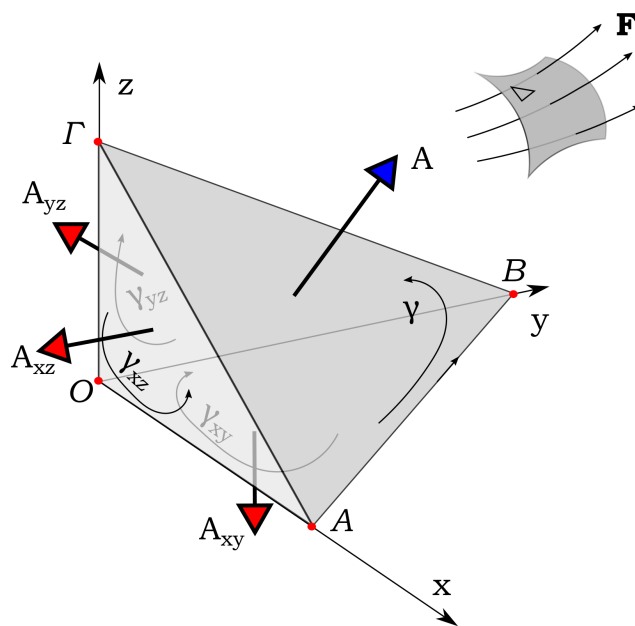
³Ακόμη και αν το χωρίο τείνει σε ένα σημείο, το σημείο αυτό διατηρεί την κάθετο στην επιφάνεια πάνω στην οποία λήφθηκε το αρχικό χωρίο.

Αν και το όριο που λαμβάνουμε φαίνεται ότι ορίζει τρεις ανεξάρτητους μεταξύ τους στροβιλισμούς, θα μπορούσαμε να δούμε τη σύνδεσή τους αν φανταζόμασταν τις προβολές της αρχικής επιφάνειας A (προ ορίου) στα τρία καρτεσιανά επίπεδα οι οποίες θα όριζαν τρεις κλειστές καμπύλες στα επίπεδα $y - z, x - z, x - y$ και στη συνέχεια να πηγαίναμε στο όριο $A \rightarrow 0$ παρασύροντας μαζί και τις προβολές της.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η τριάδα

$$(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z),$$

σχηματίζει ένα διάνυσμα, το διάνυσμα του στροβιλισμού, Ω , του πεδίου $\mathbf{F}$.



Σχήμα 2: Καθώς το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ διατρέχει ένα επιφανειακό χωρίο A (βλ. ένθετο), μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ που αντιστοιχεί στο έργο της δύναμης κατά μήκος της διαδρομής που αποτελεί σύνορο αυτού του χωρίου. Το έργο αυτό μπορεί να αναχθεί σε 3 άλλα έργα κλειστών διαδρομών, τις OAB, OBF, OAF .

Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε ότι μετασχηματίζεται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις. Ο διανυσματικός χαρακτήρας βασικών φυσικών αντικειμένων, όπως λ.χ. η δύναμη, αποδεικνύεται μόνο πειραματικά και λαμβάνεται ως νόμος της φύσης όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 7. Ο διανυσματικός χαρακτήρας παραγώγων φυσικών μεγεθών όπως λ.χ. η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η στροφορμή, η βαθμίδα κ.λ.π. μπορεί να αποδειχθεί όμως από τον ορισμό τους. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι η δύναμη είναι διάνυσμα μπορούμε χωρίς πείραμα να ελέγξουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του στροβιλισμού εξετάζοντας το μετασχηματισμό

των συντεταγμένων του στις στροφές. Για να δείξουμε το διανυσματικό χαρακτήρα αρκεί, σύμφωνα με το Λήμμα 3 του Κεφαλαίου 7.6, να πάρουμε μια διαφορική επιφάνεια που είναι κάθετη σε μία τυχαία διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ και να δείξουμε ότι ο στροβιλισμός σε αυτή την επιφάνεια, Ω_n , είναι:

$$\Omega_n = \Omega_x n_x + \Omega_y n_y + \Omega_z n_z , \quad (3)$$

όπου (n_x, n_y, n_z) οι συνιστώσες του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ στην εν λόγω επιφάνεια.

Προς τούτο κατασκευάζουμε ένα ορθό τετράεδρο $OAB\Gamma$, με την ακμή OA κατά τον άξονα x , την ακμή OB κατά τον y , και την ακμή OG κατά τον z (βλ. σχήμα 2). Υπολογίζουμε το έργο γύρω από τα σύνορα των τεσσάρων εδρών του τετραέδρου, διανύοντάς τα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό έργο γύρω από τα σύνορα των τεσσάρων εδρών είναι τότε μηδέν, διότι κάθε ακμή διανύεται δύο φορές με αντίθετη κατεύθυνση κάθε φορά, δηλαδή είναι:

$$\left(\oint_{OGB} + \oint_{OAG} + \oint_{OBA} + \oint_{AB\Gamma} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (4)$$

Αν ληφθεί το τετράεδρο αρκούντως μικρό⁴ θα είναι:

$$\oint_{OGB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -A_{yz}\Omega_x , \quad \oint_{OAG} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -A_{xz}\Omega_y , \quad \oint_{OBA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -A_{xy}\Omega_z , \quad \oint_{AB\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A\Omega_n ,$$

Τα πρόσημα στις 3 τρεις πρώτες κυκλοφορίες είναι αρνητικά αφού η διαγραφή των συνόρων είναι αντίθετη από αυτή που χρησιμοποιήθηκε στους ορισμούς των τριών στροβιλισμών (συγκρίνετε τα διανύσματα $\mathbf{A}_{yz}, \mathbf{A}_{xz}, \mathbf{A}_{xy}$ και τις αντίστοιχες φορές διαγραφής των συνόρων στα σχήματα 1 και 2).

Επομένως η (4) συνεπάγεται ότι:

$$\Omega_n = \frac{A_{yz}}{A}\Omega_x + \frac{A_{xz}}{A}\Omega_y + \frac{A_{xy}}{A}\Omega_z .$$

και επειδή για τις προβολές των επιφανειών σε επίπεδα ισχύει ότι

$$A_{yz} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{i} = n_x A , \quad A_{xz} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{j} = n_y A , \quad \text{και} \quad A_{xy} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{k} = n_z , \quad (5)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ η κάθετος στην έδρα $AB\Gamma$, αποδείξαμε ότι για το δεδομένο $\hat{\mathbf{n}}$ ότι ισχύει η (3). Αλλά ο ίδιος συλλογισμός ισχύει για οποιοδήποτε ορθό τετράεδρο διότι πάντοτε ισχύει η (5). Άρα βάσει του Λήμματος 3 του Κεφαλαίου 7.6 ο στροβιλισμός είναι πράγματι διάνυσμα.

Με τον τρόπο αυτό δείξαμε επίσης ότι μία διαφορική επίπεδη επιφάνεια μπορεί να ορισθεί ως διάνυσμα. Το μέτρο του διανύσματος είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και η διεύθυνση του

⁴Προς τούτο φανταστέται ότι πλησιάζουμε στο αρχικό χωρίο την αρχή των καρτεσιανών αξόνων οσοδήποτε κοντά στο σημείο στο οποίο θέλουμε να συρρικνώσουμε το χωρίο. Τότε τα 3 καρτεσιανά επίπεδα μαζί με την αρχική επιφάνεια του χωρίου θα ορίσουν το τετράεδρό μας.

διανύσματος είναι η κάθετος στην επιφάνεια με φορά αυτή της κίνησης δεξιόστροφου κοχλίου που περιστρέφεται όπως διαγράφεται το σύνορο της επιφανείας. Π.χ. το διάνυσμα της επιφάνειας $AB\Gamma$ είναι $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}}$ το οποίο μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\mathbf{A} = A_{yz}\mathbf{i} + A_{xz}\mathbf{j} + A_{xy}\mathbf{k} ,$$

και για κάθε $\hat{\mathbf{n}}$ ικανοποιεί την:

$$A = A_{yz}n_x + A_{xz}n_y + A_{xy}n_z .$$

Μπορούμε κατευθείαν να δημιουργήσουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του εμβαδού με το να ορίσουμε το εμβαδόν διαφορικού χωρίου που έχει πλευρές $d\mathbf{r}_1$ και $d\mathbf{r}_2$, ως το εξωτερικό γινόμενο:

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 .$$

(Βλέπε περισσότερα για τη σχέση της επιφάνειας με το εξωτερικό γινόμενο στο Κεφάλαιο 8 περί εξωτερικών γινομένων.)

Το φυσικό λοιπόν νόημα του στροβιλισμού είναι ότι περιγράφει ένα διάνυσμα, οι τρεις συνιστώσες του οποίου μετράνε την ανά μονάδα επιφάνειας κυκλοφορία στα τρία κάθετα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος. Αν θέλαμε να κατασκευάσουμε ένα στροβιλόμετρο θα έπρεπε αυτό να αποτελείται από μια ράβδο στο άκρο της οποίας να υπάρχουν τρεις φτερωτές σε τρία κάθετα επίπεδα. Ο ρυθμός που θα γύριζαν οι τρεις φτερωτές λόγω της δράσης του διανυσματικού πεδίου θα μας έδιναν τις τρεις συνιστώσες του στροβιλισμού. Υποτίθεται βέβαια ότι τα μεγέθη των τριών φτερωτών θα είχαν κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο και η κλίμακα της ταχύτητας περιστροφής αυτών θα είχε ρυθμιστεί καταλλήλως, ώστε το αποτέλεσμα να μετρά ακριβώς το στροβιλισμό στο σημείο στο οποίο θα τοποθετούσαμε το άκρο της ράβδου (βλ. σχήμα 4).

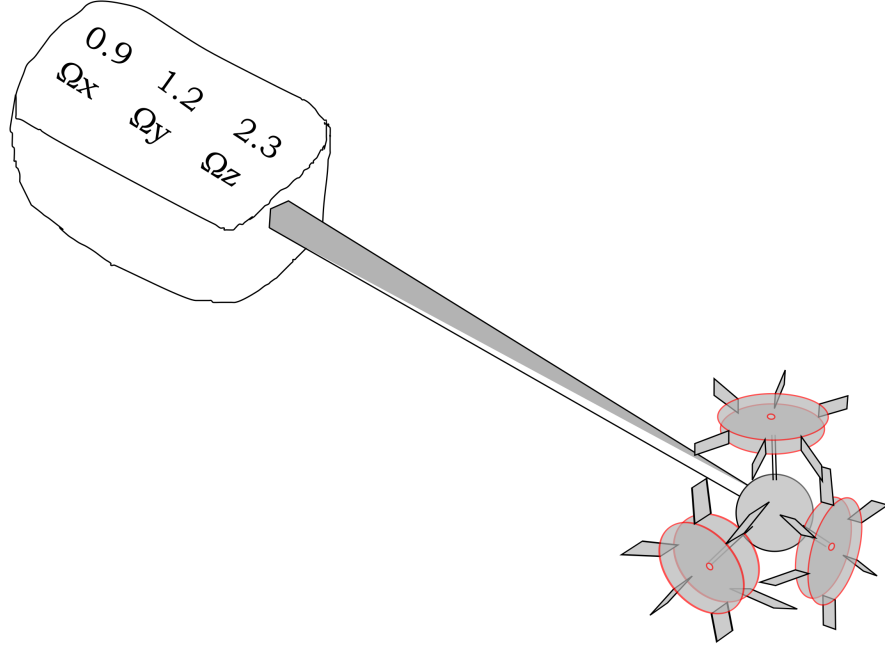
2 Το θεώρημα του Stokes

Θα δούμε τώρα πως συνδέεται ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάθε σημείο με τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκλήρωματος

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

γύρω από μία αυθαίρετη καμπύλη Γ . Θεωρούμε μία ομαλή επιφάνεια⁵ της οποίας το σύνορο είναι η Γ και καλύπτουμε την επιφάνεια με ένα πλέγμα κλειστών καμπυλών γ_i (βλ. σχήμα 4). Τότε η κυκλοφορία γύρω από το Γ ισούται με το άθροισμα των κυκλοφοριών σε όλα τα σύνορα,

⁵Ακόμη και αν η κλειστή καμπύλη είναι ιδιόρρυθμη, π.χ. σχηματίζει ένα κόμπο, είναι πάντα δυνατό να κόψουμε την καμπύλη σε κομμάτια και να ενώσουμε τα άκρα τους έτσι ώστε η κάθε νέα κλειστή καμπύλη που θα δημιουργηθεί να μην έχει κόμπους.



Σχήμα 3: Ένα όργανο που θα μέτραγε το στροβιλισμό θα αποτελούνταν από τρεις φτερωτές σε τρία κάθετα επίπεδα. Οι συνιστώσες του στροβιλισμού θα μετρούνταν από τις ταχύτητες περιστροφής των τριών φτερωτών. Η απόληξη με τις φτερωτές θα έπρεπε να είναι εξαιρετικά μικρή ώστε να μετράει τοπικά το στροβιλισμό.

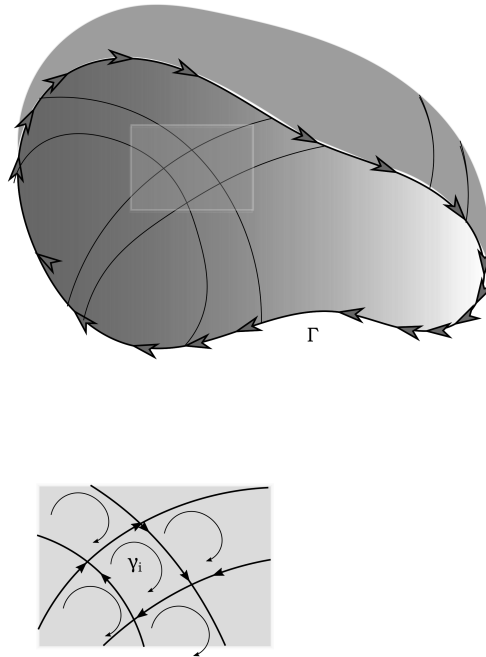
γ_i , των χωρίων του πλέγματος:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} , \quad (6)$$

διότι η συνεισφορά στην κυκλοφορία από τα σύνορα των χωρίων που βρίσκονται μέσα στη επιφάνεια μηδενίζεται αφού δύο συνορεύοντα χωρία διαγράφουν το κοινό σύνορο το καθένα με αντίθετη φορά (βλ. ένθετο σχήματος 4). Αυτό που μένει μόνο από την άθροιση των κυκλοφοριών είναι η κυκλοφορία των εξωτερικών συνόρων του πλέγματος, δηλαδή η ζητούμενη κυκλοφορία επί της Γ .

Εάν το πλέγμα γίνει εξαιρετικά πυκνό (με μικροσκοπικά μάτια)

$$\oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}_i \cdot d\mathbf{A}_i ,$$



Σχήμα 4: Προκειμένου να υπολογίσουμε την κυκλοφορία κατά μήκος της Γ κατασκευάζουμε επί της επιφάνειας που περικλείει η Γ ένα πυκνό πλέγμα καμπυλών και υπολογίζουμε την κυκλοφορία επί της συνοριακής γραμμής γ_i κάθε τετραπλεύρου που δημιουργείται από το πλέγμα.

όπου $d\mathbf{A}_i$ είναι το διάνυσμα της i -οστής διαφορικής επιφάνειας μέλους του πλέγματος και Ω_i ο στροβιλισμός στο αντίστοιχο σημείο του πλέγματος. Στο όριο που το πλήθος των στοιχείων του πλέγματος τείνει στο άπειρο έχουμε από την (6) ότι:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{A}, \quad (7)$$

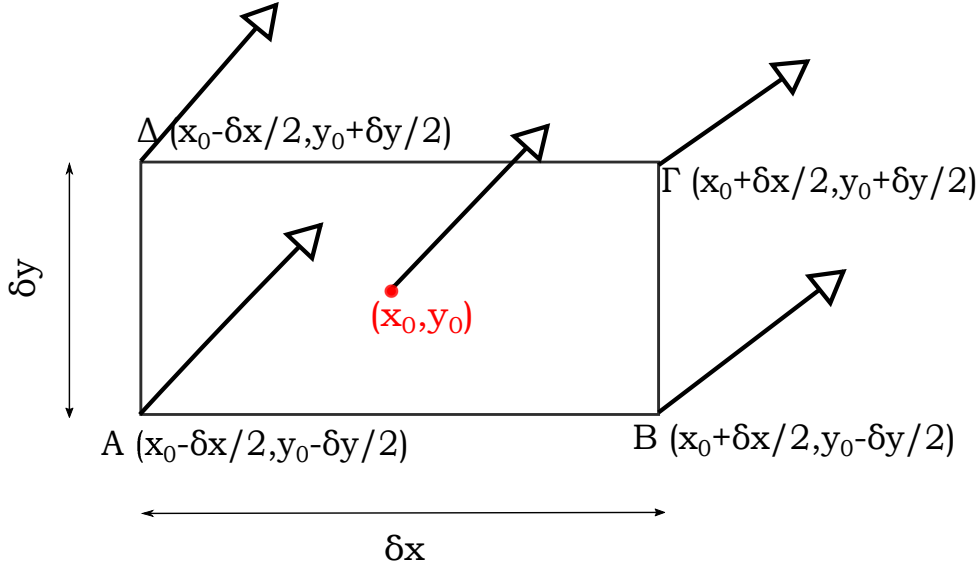
όπου A είναι οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο τη Γ . Η φορά των επιφανειών $d\mathbf{A}$ σχετίζεται με τη φορά διαγραφής της Γ . Η φορά αυτή καθορίζει και τη φορά διαγραφής όλων των στοιχείων του πλέγματος και επομένως και τη φορά των $d\mathbf{A}$. Αυτό είναι το θεώρημα του Stokes.⁶

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του θεωρήματος του Stokes είναι ότι αν συρρικνώσει κανείς την καμπύλη Γ σε ένα σημείο έτσι ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη σχέση (7) να μηδενιστεί, καταλήγουμε στο ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα (η ροή δηλαδή) του στροβιλισμού ενός

⁶Ο Stokes ήταν κατόχος της ίδιας έδρας Μαθηματικών που είχε ο Νεύτων. Το περιεχόμενο του θεωρήματος ήταν θέμα διαγωνισμού υποτροφίας που έδωσε ο Stokes το 1854. Ο Maxwell απάντησε στο θέμα του διαγωνισμού και δεν είναι περίεργο ότι το θεώρημα αυτό έχει κεντρικό ρόλο στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού που ανέπτυξε αργότερα. Το θεώρημα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού, και φημιολογείται ότι κάθε γενιά μαθηματικών δίνει από τότε και από μία νέα απόδειξη του θεωρήματος σε πιο γενικευμένους χώρους. Ο Stokes είναι γνωστός για τη συμβολή του στη ανάπτυξη της υδροδυναμικής όπου ο στροβιλισμός και η κυκλοφορία του πεδίου ταχυτήτων αποτελούν κεντρικές έννοιες.

οποιοδήποτε πεδίου σε μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι μηδενική. Με άλλα λόγια ο στροβιλισμός δεν έχει πηγές ούτε καταβόθρες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι καθαρά τοπολογικής φύσης.

3 Υπολογισμός των συνιστωσών του στροβιλισμού



Σχήμα 5: Υπολογισμός του έργου κατά μήκος ενός ορθογωνίου διαστάσεων δx επί δy στο επίπεδο $x - y$. Η δύναμη (εδώ σχεδιασμένη η προβολή της στο επίπεδο $x - y$) είναι ελαφρώς διαφορετική από σημείο σε σημείο.

Ας υπολογίσουμε την Ω_x συνιστώσα του στροβιλισμού του πεδίου της δύναμης $\mathbf{F}$. Σχηματίζουμε προς τούτο ένα παραλληλόγραμμο (βλ. σχήμα 5) στο επίπεδο $x - y$ με κέντρο O στο σημείο (x_0, y_0) (δεν αναφέρουμε την z συντεταγμένη διότι είναι σταθερή) και πλευρές παράλληλες στους άξονες x, y μήκους δx και δy αντίστοιχα. Αν διανύσουμε το σύνορο με τη φορά $AB\Gamma\Delta$ το εμβαδόν είναι κατά τη διεύθυνση του τρίτου άξονα z και συνεπώς:

$$\Omega_z = \lim_{\delta A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\delta A_{xy}}, \quad (8)$$

όπου $\delta A_{xy} = \delta x \delta y$. Υπολογίζουμε πρώτα το έργο W_{AB} της δύναμης στη διαδρομή AB . Αυτό θα είναι κατά προσέγγιση:

$$W_{AB} = \int_{-\delta x/2}^{+\delta x/2} F_x \left(x_0 + s, y_0 - \frac{\delta y}{2} \right) ds,$$

ενώ το έργο στην απέναντι διαδρομή $\Gamma\Delta$ είναι:

$$W_{\Gamma\Delta} = \int_{+\delta x/2}^{-\delta x/2} F_x \left(x_0 + s, y_0 + \frac{\delta y}{2} \right) ds .$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την συνάρτηση F_x

$$F_x(x_0 + s, y_0 \pm \delta y/2) = F_x(x_0, y_0) + s \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \pm \frac{\delta y}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \mathcal{O}(s^2, \delta y^2, s \delta) ,$$

βρίσκουμε ότι το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα x είναι:

$$W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = - \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \delta x \delta y + \mathcal{O}(\delta x^2 \delta y) .$$

Η μερική παράγωγος υπολογίζεται στο κέντρο O του χωρίου και δεν έχουμε κρατήσει στα αναπτύγματα όρους ανωτέρας τάξεως διότι αυτοί θα μηδενισθούν όταν αργότερα διαιρέσουμε με το μέτρο του εμβαδού του χωρίου $\delta A_{xy} = \delta x \delta y$ για να προσδιορίσουμε τον στροβιλισμό στο όριο που το εμβαδόν αυτό τείνει στο μηδέν.

Ομοίως έχουμε ότι

$$W_{B\Gamma} = \int_{-\delta y/2}^{+\delta y/2} F_y \left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y_0 + s \right) ds , \quad W_{\Delta A} = \int_{+\delta y/2}^{-\delta y/2} F_y \left(x_0 - \frac{\delta x}{2}, y_0 + s \right) ds ,$$

οπότε το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα y είναι:

$$W_{B\Gamma} + W_{\Delta A} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \delta x \delta y + \mathcal{O}(\delta x \delta y^2) .$$

Συνεπώς το όριο (8) υπάρχει (κάτι που είχαμε θεωρήσει ως δεδομένο όταν ορίσαμε το στροβιλισμό) και είναι:

$$\Omega_z = \lim_{\delta A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\delta x \delta y} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} .$$

Με κυκλική μετάθεση των δεικτών του προηγούμενου αποτελέσματος βρίσκουμε ότι το διάνυσμα του στροβιλισμού σε κάποιο σημείο έχει τις εξής συνιστώσες σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) , \quad (9)$$

με τις μερικές παραγώγους υπολογισμένες στο εν λόγω σημείο. Το παραπάνω διάνυσμα μπορεί να γραφεί πιο κομψά υπό τη μορφή ορίζουσας:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} . \quad (10)$$

Αποδείξαμε τελικά ότι ο στροβιλισμός είναι το εξωτερικό γινόμενο του ∇ με το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{F} . \quad (11)$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε εξ'αρχής τον στροβιλισμό μέσω της (11), όπως συνηθίζεται σε μαθηματικά κείμενα, οπότε ο διανυσματικός χαρακτήρας του στροβιλισμού θα ήταν δεδομένος εξ'αρχής, αλλά η φυσική σημασία του στροβιλισμού θα παρέμενε σκοτεινή.

Με την σύνδεση του στροβιλισμού με το πεδίο δυνάμεων μέσω της (11) το θεώρημα του Stokes παίρνει τη γνώριμη μορφή:

$$\oint_{\Gamma(A)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} , \quad (12)$$

όπου A είναι οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο τη κλειστή καμπύλη Γ .

4 Συντηρητικά πεδία σε τρεις διαστάσεις και στροβιλισμός

Συντηρητικά πεδία δυνάμεων είναι πεδία δυνάμεων, $\mathbf{F}$, που εξαρτώνται μόνο από τη θέση $\mathbf{r}$ (δεν εξαρτώνται από τη ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}$ και το χρόνο t) και επιπλέον το έργο σε κάθε κλειστή διαδρομή, γ είναι πάντοτε μηδενικό:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (13)$$

Στο κεφάλαιο 7.9 δείξαμε ότι οι συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως τη βαθμίδα κάποιας δυναμικής ενέργειας⁷:

$$\mathbf{F} = -\nabla V , \quad (14)$$

με το δυναμικό να ορίζεται ως τη μονότιμη συνάρτηση του $\mathbf{r}$:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' , \quad (15)$$

ως προς κάποιο αυθαίρετο σημείο βαθμονόμησης του δυναμικού $\mathbf{r}_0$ (βλ. Κεφάλαιο 4 για τη μια διάσταση).

Επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς οι συνιστώσες της δύναμης είναι:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} ,$$

⁷ Αυτή η πρόταση ισχύει σε όλες τις διαστάσεις και όχι μόνο στις 3 διαστάσεις.

και εξ' αυτού προκύπτει ότι το πεδίο αυτό έχει μηδενικό στροβιλισμό, είναι δηλαδή αστρόβιλο. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \\ &= (0, 0, 0),\end{aligned}$$

επειδή η μερική παραγωγή είναι αντιμεταθετική⁸, δηλαδή είναι: $\partial^2 V / \partial x \partial y = \partial^2 V / \partial y \partial x$.

Το ότι ένα συντηρητικό πεδίο είναι αστρόβιλο μπορούμε να το δείξουμε αμέσως γράφοντας το στροβιλισμό διανυσματικά και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο ιδίων διανυσματικών μεγεθών⁹ μηδενίζεται. Έτσι ο στροβιλισμός της βαθμίδας πεδίου είναι μηδενικός:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla V = -(\nabla \times \nabla)V = \mathbf{0}.$$

Τώρα θα αποδείξουμε εκ νέου, χωρίς τη χρήση της δυναμικής ενέργειας ότι κάθε συντηρητικό πεδίο είναι αστρόβιλο αλλά και το αντίστροφο, δηλαδή ότι τα αστρόβιλα πεδία είναι συντηρητικά.

Απόδειξη:

(i.) Εάν το πεδίο είναι συντηρητικό τότε το έργο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή και συνεπώς

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Αυτό ισχύει για κάθε κλειστή διαδρομή. Επομένως όταν η διαδρομή συρρικνώνεται γύρω από κάποιο σημείο, ο μηδενισμός της κυκλοφορίας συνεπάγεται και μηδενισμό του στροβιλισμού στο εν λόγω σημείο.

(ii.) Εάν το πεδίο είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε από το θεώρημα του Stokes (12) η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη μηδενίζεται (υπό την προϋπόθεση ότι η $\mathbf{F}$ είναι καλώς ορισμένη σε κάθε σημείο εσωτερικό του χώρου και το χωρίο δεν έχει τρύπες). Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι το

$$\int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

⁸Ικανή συνθήκη για να είναι οι μικτές μερικές παράγωγοι ίδιες κατά την αντιμετάθεση είναι οι $\partial^2 V / \partial x \partial y$ και $\partial^2 V / \partial y \partial x$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αυτό π.χ. δεν συμβαίνει για την $V = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $V = 0$ όταν $(x, y) = (0, 0)$.

⁹Το γεγονός ότι τα δύο διανυσματικά μεγέθη δεν είναι ακριβώς διανύσματα, αλλά διανυσματικοί τελεστές δεν αναιρεί το διανυσματικό τους χαρακτήρα και όλες τις σχέσεις που συνεπάγεται αυτός.

είναι ανεξάρτητο της διαδρομής γ που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ του χώρου. Αυτό φαίνεται καθαρά αν λάβουμε δύο διαδρομές γ_1 και γ_2 που συνδέουν τα $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$. Τότε στην κλειστή διαδρομή $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ (δηλαδή από το $\mathbf{r}_1$ στο $\mathbf{r}_2$ κατά μήκος της γ_1 και στη συνέχεια πίσω στο $\mathbf{r}_1$ ακολουθώντας την γ_2 με την ανάποδη φορά) θα είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_2, -\gamma_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_2}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_2}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

για κάθε $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ του χώρου και το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

Θα δείξουμε τώρα, μέσω του στροβιλισμού, ότι κεντρικές δυνάμεις της μορφής

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}} , \quad (16)$$

είναι εκ κατασκευής συντηρητικές. Αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\nabla \times (\phi \Phi) = (\nabla \phi) \times \Phi + \phi \nabla \times \Phi .$$

όπου $\phi(\mathbf{r})$ κάποιο βαθμωτό και $\Phi(\mathbf{r})$ κάποιο διανυσματικό πεδίο. Στην περίπτωση της ισοτροπικής κεντρικής δύναμης (16) θα έχουμε:

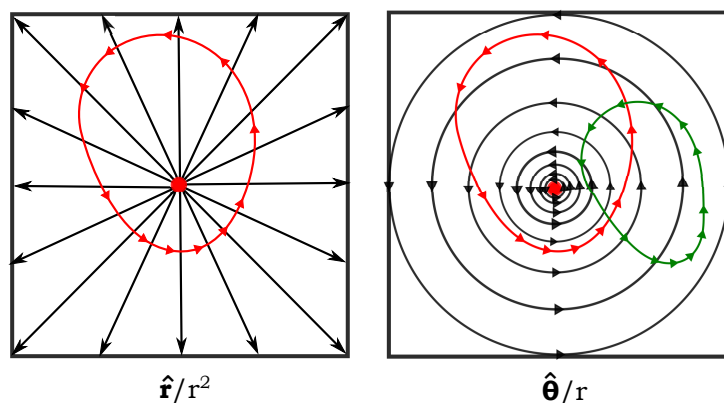
$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \right) &= \nabla \left(\frac{f(r)}{r} \right) \times \mathbf{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{0} , \end{aligned}$$

αφού εξαιτίας της (10) προκύπτει ότι $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

5 * Σχόλιο περί των αστρόβιλων πεδίων

Ας θεωρήσουμε τα πεδία

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} , \quad (17)$$



Σχήμα 6: Τα δύο πεδία της (17). Το πρώτο, όντας ένα ιστροπικό κεντρικό πεδίο, είναι συντηρητικό, ενώ το δεύτερο όχι, αν και αστρόβιλο παντού εκτός της αρχής όπου δεν ορίζεται. Το έργο κατά μήκος της κόκκινης καμπύλης είναι 2π , ενώ κατά μήκος της πράσινης καμπύλης είναι 0. Το γεγονός ότι η πράσινη καμπύλη δεν εμπεριέχει την αρχή των αξόνων ενεργοποιεί το αστρόβιλο του πεδίου καθιστώντας μηδενικό το έργο κατά μήκος της κλειστής πράσινης καμπύλης.

σε έναν διδιάστατο χώρο (βλ. σχήμα 6).

Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε τις μορφές αυτών των πεδίων σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}. \quad (18)$$

Και τα δύο αυτά πεδία, παντού όπου αυτά ορίζονται, έχουν μηδενικό στροβιλισμό, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα εκτελώντας τις πράξεις (υπολογίζοντας την ορίζουσα του στροβιλισμού). Παρόλ' αυτά είναι άμεσα αντιληπτό από τη μορφή τους (βλ. σχήμα 6) ότι το πρώτο από αυτά είναι ένα συντηρητικό πεδίο ενώ το δεύτερο όχι: Αν υπολογίσουμε το $\oint \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ κατά μήκος κάποιας κλειστής διαδρομής που περιελίσσεται γύρω από την αρχή των αξόνων το αποτέλεσμα θα είναι μη μηδενικό· για την ακρίβεια θα είναι 2π φορές το πλήθος των περιελίξεων της κλειστής καμπύλης.

Συνήθως το δεύτερο πεδίο αναφέρεται ως χαρακτηριστικό παράδειγμα πεδίου το οποίο παρόλο που έχει στροβιλισμό 0 (εδώ, στις 2 διαστάσεις, όπου ο στροβιλισμός είναι αριθμός και όχι διάνυσμα), δεν είναι συντηρητικό με το επιχείρημα ότι το πεδίο δεν ορίζεται στο 0 και επομένως υπάρχει “τρύπα” στο χώρο ορισμού του. Δεν είναι λοιπόν ακριβές ότι ο στροβιλισμός είναι 0 παντού. Είναι 0 σε έναν μη συνεκτικό¹⁰ χώρο και επομένως αυτό δεν είναι αρκετό για να είναι το πεδίο συντηρητικό.

¹⁰Συνεκτικός χώρος είναι αυτός στον οποίο μια κλειστή καμπύλη είναι δυνατό να συρρικνωθεί σε σημείο. Αν ένας διδιάστατος χώρος έχει τρύπα, μια κλειστή καμπύλη που τυλίγεται γύρω από την τρύπα δεν μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο, αφού η μικρότερη διάστασή της είναι η περίμετρος της τρύπας.

Θα μπορούσε όμως κάποιος να παρατηρήσει ότι και το πρώτο πεδίο δεν ορίζεται στο 0 (το πεδίο ορισμού του έχει πάλι τρύπα), αλλά το πεδίο αυτό αυτό είναι συντηρητικό. Όποια κλειστή διαδρομή και να θεωρήσουμε, είτε αυτή τυλίγεται γύρω από την αρχή είτε όχι το έργο είναι 0. Τι διαφορετικό έχουν αυτές οι 2 περιπτώσεις;

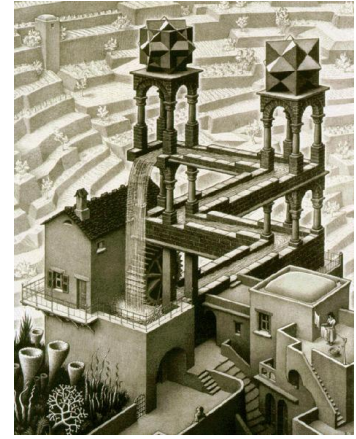
Ας δούμε αν αυτά τα δύο πεδία μπορούν να προκύψουν από κάποια δυναμική ενέργεια (μαντεύοντας τη λύση):

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla V_1(r, \theta) = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla V_2(r, \theta) = -\nabla(-\theta). \quad (19)$$

Στην παραπάνω κατασκευή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι σε πολικές συντεταγμένες η βαθμίδα έχει τη μορφή¹¹

$$\nabla f(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (20)$$

Και τα δύο μοιάζουν να απορρέουν από απλές συναρτήσεις δυναμικών ενεργειών. Μήπως τελικά πρόκειται για συντηρητικά πεδία; Το πρώτο σίγουρα ναι, γιατί καθώς τρέχουμε κατά μήκος μιας ακτίνας προχωράμε προς χαμηλότερα επίπεδα δυναμικής ενέργειας, χωρίς ποτέ να τμήσουμε κάποια άλλη ακτινική γραμμή πεδίου. Το δεύτερο όμως πεδίο ενώ κατηφορίζει προς χαμηλότερα δυναμικά κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου, μόλις η δυναμική γραμμή του διαγράψει έναν κύκλο, συναντά και πάλι τον εαυτό της και επομένως ξαναανυψώνεται το δυναμικό της σαν τα παραπλανητικά σχέδια-οφθαλμαπάτες του Escher. Από πλευράς δυναμικής ενέργειας $V = -\theta$, αφού η γωνία ταυτίζεται με τον εαυτό της όταν προστεθεί το 2π , η δυναμική αυτή ενέργεια θα παρουσιάζει ασυνέχειες.



Σχήμα 7: Waterfall, 1961, λιθογραφία του M. C. Escher.

Ίσως πιο κατανοητό και ξεκάθαρο θα ήταν το εξής παράδειγμα: Φανταστείτε έναν άπειρο κύλινδρο (διδιάστατη επιφάνεια και πάλι). Ένα ομογενές πεδίο το οποίο κατευθύνεται σε όλη την επιφάνεια του κυλίνδρου και έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου θα ήταν και αστρόβιλο και συντηρητικό. Αν όμως είχε κατεύθυνση κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό. Μια κλειστή διαδρομή η οποία θα περιελισσόταν στον κύλινδρο θα οδηγούσε σε μη μηδενικό έργο. Μετά από μια πλήρη στροφή

¹¹ Η βαθμίδα σε πολικές συντεταγμένες υπολογίζεται ως εξής: έχουμε,

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta,$$

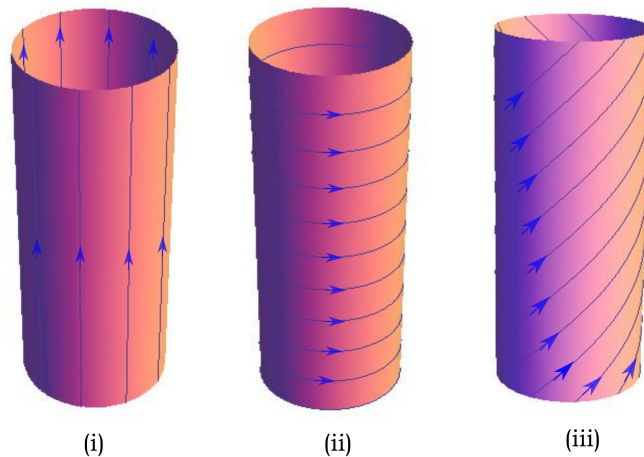
αφού $d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\nabla f = (\nabla f)_r \hat{\mathbf{r}} + (\nabla f)_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Συνεπώς, είναι:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

όπως στην (20).

η γωνία θα μεγάλωνε, αλλά η διαφορετική αυτή γωνία θα περιέγραφε το ίδιο σημείο. Τέλος αν οι γραμμές του πεδίου ακολουθούσαν έλικες σταθερού βήματος επί του κυλίνδρου, πάλι το πεδίο θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό (σκεφθείτε το έργο κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα του κυλίνδρου). Το δυναμικό θα μεγάλωνε σαν γραμμικός συνδυασμός της γωνίας περιστροφής και της μετατόπισης παράλληλα στον άξονα. Αφού όμως η γωνία δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη (το $((z, \theta)$ και το $(z, \theta + 2\pi)$ περιγράφουν την ίδια θέση), η δυναμική ενέργεια δεν θα ήταν καλά ορισμένη. Προσέξτε ότι στην περίπτωση αυτή οι γραμμές του πεδίου (οι έλικες) δεν τέμνονται μεταξύ τους. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ούτε αυτό το στοιχείο (η μη τομή των δυναμικών γραμμών) δεν είναι αρκετό για να θεμελιωθεί η συντηρητικότητα.

Καταλήγοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι όταν ο χώρος έχει τρύπα (ή τρύπες) η τοπολογία του πεδίου σχετικά με τις τρύπες καθορίζει την συντηρητικότητα: Αν οι γραμμές του πεδίου περιελίσσονται με οποιονδήποτε τρόπο γύρω από μια τρύπα τότε το πεδίο ακόμη και αν είναι αστρόβιλο είναι *μη συντηρητικό*.



Σχήμα 8: Τρία διανυσματικά πεδία πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Και τα τρία είναι αστρόβιλα (ομογενή πεδία). Εκτός από το πρώτο (το (i)), όμως, τα άλλα δύο (τα (ii) και (iii)) που τυλίγονται γύρω από την τρύπα δεν είναι συντηρητικά.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 10

- Ο στροβιλισμός μετράει το επικαμπύλιο κλειστό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου σε μια απειροστού εύρους καμπύλη, προς το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη αυτή. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας θα καθορίσει την αντίστοιχη συνιστώσα του στροβιλισμού.
- Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσμα-

τικού πεδίου σε μια κλειστή καμπύλη, ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού του πεδίου στην οποιαδήποτε επιφάνεια έχει ως σύνορο την καμπύλη αυτή.

- Ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό (και επομένως μπορεί να προέλθει από την κλίση κάποιου βαθμωτού δυναμικού) αν ο στροβιλισμός της δύναμης είναι παντού μηδέν.
- Αν το πεδίο της δύναμης είναι αστρόβιλο παντού εκτός από μια περιοχή ή σημείο του χώρου, η τοπολογία του πεδίου (αν το πεδίο περιελίσσεται γύρω από την περιοχή αυτή) θα καθορίσει τη συντηρητικότητά του.