

Κεφάλαιο 9

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

1 Οι νόμοι του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες

Ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο η θέση του μπορεί να προσδιοριστεί σε κάθε χρονική στιγμή με τις καρτεσιανές συντεταγμένες αυτής (x, y) . Η τροχιά του σωματιδίου είναι η καμπύλη που διαγράφεται από το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου καθώς αυτό κινείται. Αν χρησιμοποιηθεί ο χρόνος για να παραμετρίσουμε την τροχιά, αυτή είναι $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, και οι συντεταγμένες ικανοποιούν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y. \quad (1)$$

Αν είχαμε επιλέξει ένα διαφορετικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, τότε και πάλι οι συντεταγμένες του σωματιδίου θα ικανοποιούσαν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με κατάλληλα μετασχηματισμένες τις συνιστώσες της δύναμης. Δηλαδή ο νόμος του Νεύτωνα έχει την ίδια γνώριμη μορφή:

μάζα	$\times$	δεύτερη παράγωγος της εκάστοτε συντεταγμένης της θέσης ως προς το χρόνο	$=$	αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης
------	----------	---	-----	--

σε όλα τα καρτεσιανά συστήματα αναφοράς.

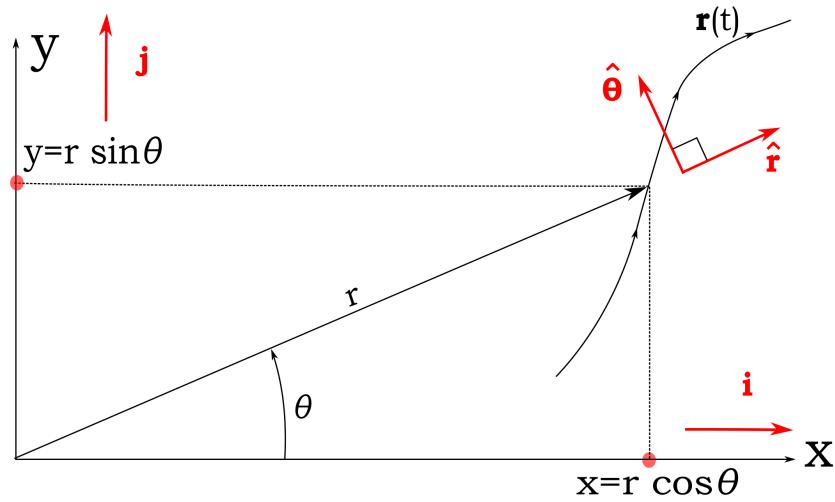
Θα προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε τη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: τι μορφή παίρνει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε αυτές τις συντεταγμένες; Θα έχει την ίδια μορφή με το νόμο γραμμένο σε καρτεσιανές;

Οι συντεταγμένες του σωματιδίου στο επίπεδο στις πολικές συντεταγμένες είναι (r, θ) . Το $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r}$ ή η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων. Η $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της θέσης του σωματιδίου με τον άξονα x , ή ισοδυνάμως ορίζεται από την $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}$ (βλ. σχήμα 1). Από τις πολικές συντεταγμένες προκύπτουν οι καρτεσιανές από τις σχέσεις:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t είναι

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (2)$$



Σχήμα 1: Η σχέση πολικών - καρτεσιανών συντεταγμένων.

του οποίου και το μέτρο, $r(t)$, αλλά και το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, $\hat{\mathbf{r}}(t)$, είναι συναρτήσεις του χρόνου. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος προσδιορίζονται αν συγκρίνουμε την (2) με την καρτεσιανή έκφραση για τη θέση:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \\ &= r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}).\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}. \quad (3)$$

Επειδή το $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο γνωρίζουμε ότι η παράγωγός του ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή είναι διάνυσμα κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$ (βλ. Κεφ. 7.7). Παράλληλα, η παράγωγος του $\hat{\mathbf{r}}$ ως προς θ είναι:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4)$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι ο ορισμός του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ που έχει κατεύθυνση κάθετη¹ στο $\hat{\mathbf{r}}$ και φορά αυτή κατά την οποία αυξάνεται η γωνία θ . Πάλι, δηλαδή, το διάνυσμα

¹Δείξτε με απευθείας υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου ότι $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$.

που προκύπτει από την παραγωγή είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$ που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ταυτόχρονα και μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \right| = 1 .$$

Επειδή και το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, η παράγωγός του ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή είναι κάθετη στο $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, και άρα συνευθειακή με το $\hat{\mathbf{r}}$, εφόσον είμαστε στις δύο διαστάσεις. Πράγματι, η παράγωγος του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ως προς θ ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $-\hat{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j} = -\hat{\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Έτσι η χρονική παράγωγος του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος είναι:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} .$$

Η $\dot{\theta}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σωματιδίου, η οποία σε δύο διαστάσεις είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ταχύτητα, την κινητική ενέργεια και τη στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες. Υπολογίζουμε την ταχύτητα παραγωγίζοντας την (2) ως προς το χρόνο:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}} \\ &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} . \end{aligned} \quad (6)$$

Η ταχύτητα στις πολικές συντεταγμένες απαρτίζεται από την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας:

$$v_r = \dot{r} , \quad (7)$$

η οποία προσδιορίζει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σωματίδιο στην ακτινική διεύθυνση απομακρυνόμενο από την αρχή των αξόνων (θετική v_r) ή πλησιάζοντάς την (αρνητική v_r) και τη γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας²:

$$v_\theta = r\dot{\theta} , \quad (8)$$

η οποία προσδιορίζει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σωματίδιο γωνιακά διαγράφοντας κυκλικό τόξο ακτίνας r . Επειδή οι μετατοπίσεις σε μικρό χρονικό διάστημα, δt , είναι δr και $r\delta\theta$ οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι οι (7) και (8) και επιπλέον, επειδή οι μετατοπίσεις αυτές

²Προσέξτε ότι η γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας που έχει διαστάσεις $[L T^{-1}]$ είναι διαφορετικό μέγεθος από τη γωνιακή ταχύτητα που έχει διαστάσεις $[T^{-1}]$.

είναι κάθετες μεταξύ τους, το τετράγωνο της ταχύτητας, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \quad (9)$$

και η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) .$$

Η στροφορμή του σωματιδίου στις δύο διαστάσεις έχει μία μόνο συνιστώσα (βαθμωτό μέγεθος) η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$L = m(xy\dot{y} - y\dot{x}),$$

ενώ σε πολικές είναι:

$$L = mr^2\dot{\theta} ,$$

διότι:

$$\begin{aligned} L &= m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= mr \cos \theta (\dot{x} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - mr \sin \theta (\dot{x} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \\ &= mr^2\dot{\theta} . \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι μεν επίπεδη, αλλά υπάρχει και μια τρίτη διάσταση, οπότε η στροφορμή είναι το διάνυσμα:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m(r \hat{\mathbf{r}}) \times (r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta} \mathbf{k} , \quad (10)$$

με μία μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση z . Το μοναδιαίο διάνυσμα στη τρίτη διεύθυνση είναι $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$, διότι:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} .$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες παραγωγίζοντας την (6) ως προς το χρόνο:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} . \end{aligned} \quad (11)$$

Σε πολικές συντεταγμένες η ακτινική επιτάχυνση έχει εντελώς διαφορετική μορφή από τη γωνιακή επιτάχυνση. Αν τέλος αναλύσουμε και τη δύναμη στην ακτινική και γωνιακή συνιστώσα της:

$$F_r = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}} , \quad F_\theta = \mathbf{F} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} ,$$

ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r , \quad (12)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta . \quad (13)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι: (α) Η μεν ακτινική επιτάχυνση έχει δύο συνιστώσες: ένα μέρος της οφείλεται στο ρυθμό μεταβολής της ακτινικής ταχύτητας ($\dot{r}$) και ένα μέρος που οφείλεται στη στροφή του διανύσματος της ταχύτητας ($-r^2\dot{\theta}$). (β) Η δε γωνιακή επιτάχυνση έχει και αυτή δύο συνιστώσες: ένα μέρος της οφείλεται στο μεταβαλλόμενο ρυθμό περιστροφής του σωματιδίου ($r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$) και το υπόλοιπο μέρος ($\dot{r}\dot{\theta}$) οφείλεται στη στροφή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας. Προφανώς στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς θα απουσιάζουν το πρώτο μέρος της ακτινικής επιτάχυνσης και το μισό του πρώτου μέρους μαζί με το δεύτερο μέρος της γωνιακής επιτάχυνσης, αφού τότε δεν θα υπάρχει ακτινική ταχύτητα.

Η μορφή του νόμου του Νεύτωνα είναι πράγματι πολύ διαφορετική σε πολικές συντεταγμένες από τη καρτεσιανή διατύπωση (1). Αυτό οφείλεται στο ότι ο νόμος του Νεύτωνα έχει ως μεταβλητή την επιτάχυνση η οποία αλλάζει –όπως είδαμε– μορφή με το σύστημα συντεταγμένων.

2 Κυκλική κίνηση στο επίπεδο

Αν το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση στο επίπεδο ακτίνας, l , τότε λαμβάνοντας ως αρχή των αξόνων το κέντρο της κυκλικής κίνησης, η κίνηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες προσδιορίζεται πλήρως από τη γωνία θ . Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι αμιγώς ακτινικό:

$$\mathbf{r} = l \hat{\mathbf{r}} .$$

Η ταχύτητα

$$\mathbf{v} = l\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} ,$$

είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά και η φορά της κίνησης προσδιορίζεται από το πρόσημο της $\dot{\theta}$. Τέλος η επιτάχυνση έχει και ακτινική αλλά και γωνιακή συνιστώσα

$$\mathbf{a} = -l\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + l\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} . \quad (14)$$

Η ακτινική συνιστώσα είναι η γνώριμη από το σχολείο κεντρομόλος επιτάχυνση και κατευθύνεται προς το κέντρο της κίνησης, εξ ου και το όνομά της.

Αν η κυκλική κίνηση είναι ομαλή, η γωνιακή ταχύτητα, $\dot{\theta} = \omega$ είναι σταθερή, η ταχύτητα είναι

$$\mathbf{v} = l\omega \hat{\boldsymbol{\theta}} , \quad (15)$$

και έχει σταθερό μέτρο

$$v = l\omega ,$$

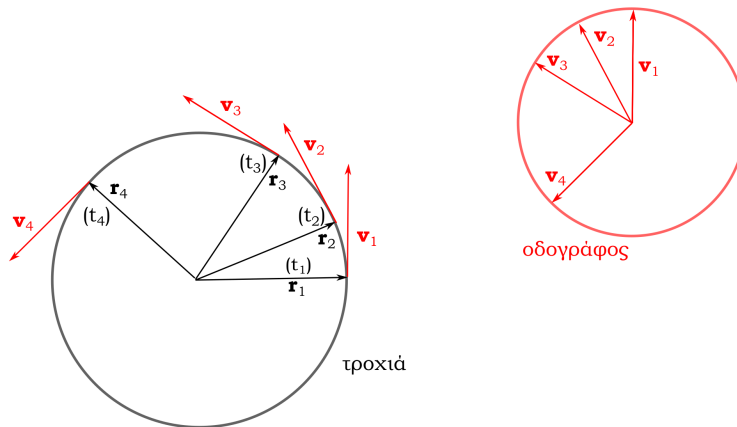
και ίσο με το γινόμενο $\omega \times$ (ακτίνα κύκλου τροχιάς). Έτσι αν σχεδιάσουμε τα διαδοχικά διανύσματα της ταχύτητας, διαλέγοντας κάποια κοινή αρχή για όλα, το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει και αυτό κύκλο ακτίνας $l\omega$. Η επιτάχυνση σε αυτή την περίπτωση είναι απλώς η κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$\mathbf{a} = -l\omega^2 \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{l} \hat{\mathbf{r}}. \quad (16)$$

Για να μπορεί λοιπόν να πραγματοποιηθεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας l και ταχύτητας v πρέπει οι συνιστώσες της δύναμης να έχουν τις σταθερές τιμές:

$$F_r(l, \theta) = -m\frac{v^2}{l}, \quad F_\theta(l, \theta) = 0$$

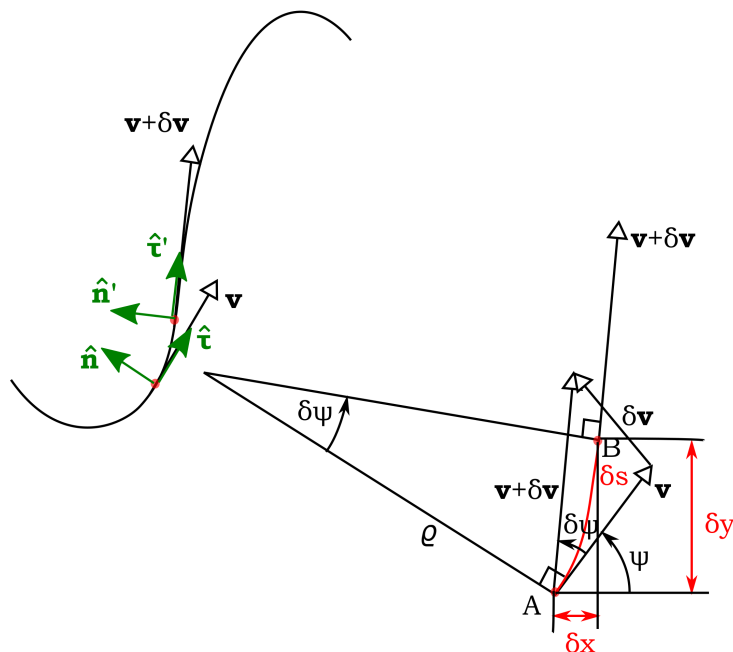
πάνω στον κύκλο ακτίνας l .



Σχήμα 2: Η οδογράφος της ομαλής κυκλικής κίνησης (αριστερά) είναι και αυτή **κύκλος** (δεξιά) που διαγράφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , όπως και η ίδια η κυκλική κίνηση.

Καθώς το άκρο του διανύσματος θέσης διαγράφει την τροχιά του σωματιδίου, το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει μία καμπύλη η οποία ονομάζεται *οδογράφος*. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η οδογράφος είναι ένας κύκλος ακτίνας $l\omega$. Ένα κινητό που διαγράφει την οδογράφο έχει γωνιακή ταχύτητα πάλι ω , οπότε η ταχύτητα του κινητού επί της οδογράφου, η οποία είναι κατ' ουσίαν η επιτάχυνση του σωματιδίου, θα ισούται με $\omega \times$ (ακτίνα κύκλου οδογράφου) = $l\omega^2$, όπως ακριβώς στην (16).

3 Οι εξισώσεις του Νεύτωνα στο επίπεδο με ενδογενείς συντεταγμένες



Σχήμα 3: Ανάλυση της καμπυλόγραμμης κίνησης σε ένα απειροστό τόξο. Στη λεπτομέρεια δεξιά διακρίνονται οι λεπτομέρειες του τόξου. Πάνω στην τροχιά διακρίνονται τα μοναδιαία διανύσματα των ενδογενών συντεταγμένων $\hat{t}$, $\hat{n}$ (πράσινα βέλη) στο αρχικό σημείο της κίνησης και λίγο αργότερα στο B ($\hat{t}'$, $\hat{n}'$).

Μέχρι τώρα οι εξισώσεις του Νεύτωνα για την κίνηση ενός σωματιδίου γράφονταν όπως θα τις έγραφε ένας παρατηρητής διαφορετικός από το σωματίδιο. Ένας τέτοιος παρατηρητής επιλέγει ένα σύστημα αναφοράς, γράφει τους νόμους του Νεύτωνα και περιγράφει την κίνηση στις συντεταγμένες αυτού του συστήματος αναφοράς, οι οποίες αναφέρονται και ως *εξωγενείς* (extrinsic) συντεταγμένες του σωματιδίου.

Αν θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση του σωματιδίου σε *ενδογενείς* (intrinsic) συντεταγμένες οι οποίες συνδέονται αποκλειστικά με το κινούμενο σωματίδιο, χωρίς καμία αναφορά σε κάποιο σύστημα αναφοράς έξω από το σωματίδιο³, οφείλουμε να βασιστούμε στα ίδια τα στοιχεία της κίνησης του σωματιδίου: α) την εφαπτόμενη διεύθυνση της κίνησης του επί της τροχιάς (χαρακτηριστικό στοιχείο μιας καμπύλης), β) την διεύθυνση της καθέτου στην τροχιά (σε δύο διαστάσεις είναι μόνο μία αυτή η διεύθυνση, αλλιώς υπάρχει ένα ολόκληρο επίπεδο κάθετο) και γ) το μήκος της διαδρομής που ακολουθεί το σωματίδιο.

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στο σημείο A του επιπέδου στη θέση $\mathbf{r}(t)$ και τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ στο σημείο B στη θέση $\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}$. Η ταχύτητα στο

³Είναι σαν να περιγράφουμε την κίνηση ενός αυτοκινήτου όχι παρακαλουθώντας από μακριά την πορεία του, αλλά κοιτάζοντας το δρόμο μέσα από μια τρύπα στον πάτο του αυτοκινήτου.

σημείο A είναι $\mathbf{v}$ και έχει διεύθυνση κατά την εφαπτομένη της τροχιάς στο A και η ταχύτητα στο B είναι $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$, και έχει διεύθυνση κατά την εφαπτομένη της τροχιάς στο B (βλ. σχήμα 2). Το διαφορικό μήκος τόξου από το A στο B , στο όριο $\delta t \rightarrow 0$, είναι:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (17)$$

και η σχέση αυτή είναι κατά προσέγγιση ακριβής για μικρά δs . Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, όπως μετράται από έναν παρατηρητή που συνταξιδεύει με το σωματίδιο, είναι:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (18)$$

Συνεπώς το διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \hat{\tau}, \quad (19)$$

όπου $\hat{\tau}$ το μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση την εφαπτομένη στην τροχιά και φορά την ίδια με αυτή της ταχύτητας. Αν η ταχύτητα γραφεί ως:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

αναγνωρίζουμε ότι το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα που γράψαμε προηγουμένως δεν είναι άλλο από το:

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (20)$$

Ότι το (20) είναι μοναδιαίο διάνυσμα φαίνεται εξάλλου και υπολογίζοντας κατευθείαν το μέτρο του (20) και χρησιμοποιώντας την (17).

Γράφοντας την ταχύτητα όπως στην (19) χρησιμοποιήσαμε μόνο στοιχεία της τροχιάς: τη μεταβλητή μήκος τόξου $s(t)$ επί της τροχιάς, που προσδιορίζει το σημείο που βρισκόμαστε επί της τροχιάς και θα μπορούσε να αντικαταστήσει το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή, και το εφαπτομενικό διάνυσμα της τροχιάς $\hat{\tau}$. Το διάνυσμα $\hat{\tau}$ μεταβάλλεται καθώς κινείται το σωματίδιο επί της τροχιάς και μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι είναι συνάρτηση του μήκους τόξου s , $\hat{\tau}(s)$, όπως ακριβώς κάναμε με τη θέση του σωματιδίου, $\mathbf{r}(s)$, όταν ορίσαμε το $\hat{\tau}$ στην (20). Έστω λοιπόν ότι το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}(s + \delta s)$ στο σημείο B σχηματίζει γωνία $\delta\psi$ με το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}(s)$ στο σημείο A (βλ. σχήμα 2). Επειδή λοιπόν $|\hat{\tau}| = 1$ και η στροφή αυτού κατά τη διαδρομή ds είναι $d\psi$ θα είναι

$$d\hat{\tau} = \hat{\mathbf{n}} d\psi, \quad (21)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην τροχιά ($\hat{\tau} \perp \hat{\mathbf{n}}$ διότι $|\hat{\tau}| = 1$) και έχει φορά προς το κοίλο (εσωτερικό) πλευρό της καμπύλης (βλ. σχήμα 3).

Έτσι η επιτάχυνση του σωματιδίου μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας μόνο ενδογενείς συντεταγμένες ως:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\tau}) = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\psi}{dt}\hat{\mathbf{n}}. \quad (22)$$

Η γωνία στροφής $d\psi$ του $\hat{\tau}$ είναι επίσης η επίκεντρη γωνία που βλέπει στο τόξο ds (βλ. σχήμα 2). Επομένως:

$$d\psi = \frac{ds}{\rho}, \quad (23)$$

όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγύτερου κύκλου⁴ στο συγκεκριμένο στοιχειώδες τόξο. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται *ακτίνα καμπυλότητας* της τροχιάς στο εν λόγω σημείο. Έτσι,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{n}}. \quad (24)$$

Τις συνιστώσες αυτές θα μπορούσαμε να τις λάβουμε και άμεσα από τη γεωμετρία του σχήματος 3. Η *επιτόξια επιτάχυνση* (η εφαπτομενική στην κίνηση) είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\tau} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \cos(\delta\psi) - |\mathbf{v}|}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| - |\mathbf{v}|}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{\delta|\mathbf{v}|}{\delta t} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}. \quad (25)$$

Η δε κεντρομόλος επιτάχυνση (η κάθετη στην κίνηση) είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \sin(\delta\psi)}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \delta\psi}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v}| \delta\psi}{\delta t} = v \frac{d\psi}{dt} = v \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}. \quad (26)$$

εξαιτίας της (23).

Ως εφαρμογή των παραπάνω υποθέστε ότι ένα σωματίδιο είναι “ελεύθερο” να κινείται πάνω σε μια δοσμένη καμπύλη, όπως για παράδειγμα μια χάντρα περασμένη σε ένα άκαμπτο σύρμα. Στην πραγματικότητα η χάντρα δεν είναι πραγματικά ελεύθερη, αφού σε αυτή ασκούνται δυνάμεις από το σύρμα που την αναγκάζουν να ακολουθεί την καμπύλη του σύρματος. Η ελευθερία εδώ έγκειται στο ότι δεν υπάρχει καμία τριβή στην κίνηση της χάντρας, δηλαδή η δύναμη από το σύρμα στη χάντρα δεν έχει συνιστώσα κατά μήκος της εφαπτομένης του σύρματος:

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\tau} = 0. \quad (27)$$

⁴Κάθε ομαλή καμπύλη μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά με ένα κυκλικό τόξο. Ο εγγύτερος κύκλος (osculating circle, που οφείλει την ονομασία του –circulus osculans=κύκλος που φιλάει–στον Leibniz) σε μια καμπύλη, σε κάποιο σημείο αυτής, είναι ο κύκλος που εφάπτεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στην καμπύλη, δηλαδή αυτός που ελαχιστοποιεί τις αποστάσεις του από την καμπύλη σε μια περιοχή του εν λόγω σημείου, κατ’ αναλογία με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων η οποία ελαχιστοποιεί τις αποστάσεις της σε σχέση με κάθε άλλη ευθεία από ένα σύνολο σημείων.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τη χάντρα παίρνει την ακόλουθη μορφή στις ενδογενείς συντεταγμένες:

$$\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{n}} = m \left(\frac{dv}{dt} \hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{\varrho} \hat{\mathbf{n}} \right). \quad (28)$$

Με άλλα λόγια το μέτρο της ταχύτητας της χάντρας επί του σύρματος είναι σταθερό:

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad (29)$$

και διατηρείται κατά τη κίνηση επί του σύρματος η κινητική ενέργεια της χάντρας:

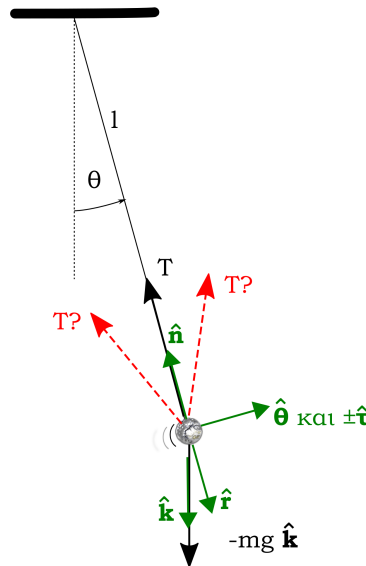
$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Η αντίδραση του σύρματος στη χάντρα έχει την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ (προς τα κοίλα της καμπύλης) και μέτρο αντιστρόφως ανάλογο με την ακτίνα καμπυλότητας στο εκάστοτε σημείο. Επομένως αν εκτοξεύσουμε μια χάντρα με μεγάλη ταχύτητα σε ένα σύρμα, αυτό κινδυνεύει να σπάσει σε κάποιο σημείο που είναι πολύ έντονα κεκαμμένο.

4 Το επίπεδο μαθηματικό εκκρεμές

Το μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από μία αβαρή ράβδο μήκους l , της οποίας το ένα άκρο είναι πακτωμένο και παραμένει ακλόνητο στην αρχή των αξόνων, ενώ το άλλο, στο οποίο είναι συγκεντρωμένη κάποια μάζα m , εκτελεί κυκλική κίνηση στο κατακόρυφο επίπεδο $x - z$ υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας που ασκεί δύναμη $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$ στη μάζα της ράβδου ($\mathbf{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη z διεύθυνση) (βλ. σχήμα 4). Θέλουμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του εκκρεμούς χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στο πρόβλημα αυτό δεν είναι προφανής. Ο νόμος του Νεύτωνα έχει διατυπωθεί για τη κίνηση ενός απομονωμένου σωματιδίου, εδώ πρέπει να περιγράψουμε τη κίνηση ενός συνθέτου συστήματος του οποίου η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο και είναι αναγκασμένη από τη ράβδο να κινείται σε κύκλο που σημαίνει ότι η ράβδος ασκεί κάποια δύναμη σε αυτή τη μάζα, η οποία όμως δεν είναι γνωστή. Στη διατύπωση του δεύτερου νόμου οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο είναι γνωστές. Στη μάζα του εκκρεμούς ασκείται η δύναμη της βαρύτητας αλλά ασκείται και μία άγνωστη δύναμη από τη ράβδο. Συνεπώς, σε επίπεδο πρώτων αρχών, το πρόβλημα του εκκρεμούς δεν μπορεί να λυθεί πριν προσδιορίσουμε το νόμο της δύναμης που ασκείται στη μάζα από τη ράβδο και αυτό απαιτεί να υπολογίσουμε όλες τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις σε ατομικό επίπεδο στο εσωτερικό της ράβδου για να καταλήξουμε στη δύναμη αυτή. Αυτό τον υπολογισμό δεν τον έχει επιτύχει κανείς μέχρι σήμερα, παρά τις μεγάλες προόδους στη φυσική των πολλών σωμάτων. Παρ' όλα αυτά, η Νευτώνεια θεώρηση επιτυγχάνει να περιγράψει με ακρίβεια την κίνηση του εκκρεμούς, ακόμη

κι αν δεν γνωρίζουμε τη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ της μάζας και της ράβδου. Η ακρίβεια μάλιστα της περιγραφής είναι τέτοια, που για πολλούς αιώνες η μέτρηση του χρόνου είχε εναποτεθεί σε ρολόγια των οποίων ο μηχανισμός βασιζόταν στην κίνηση του εκκρεμούς όπως αυτή προκύπτει ύστερα από τις παραδοχές για τη δύναμη που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 4: Το μαθηματικό εκκρεμές και οι δυνατές τάσεις της ράβδου. Εξ υποθέσεως, όσον αφορά στη συμπεριφορά του στερεού σώματος της ράβδου, και κατόπιν πειραματικών επαληθεύσεων θεωρούμε ότι η τάση δεν έχει τις τυχαίες κόκκινες κατευθύνσεις, αλλά την κατεύθυνση της ράβδου. Στο σχήμα διακρίνονται με πράσινα βέλη όλα τα μοναδιαία διανύσματα των εξωγενών συντεταγμένων $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, αλλά και των ενδογενών $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}$. (Προσέξτε ότι το εφαπτομενικό μοναδιαίο $\hat{\mathbf{t}}$ δεν έχει πάντα την κατεύθυνση της $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ αφού το $\hat{\mathbf{t}}$ εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Έτσι στο ίδιο σημείο της τροχιάς το $\hat{\mathbf{t}}$ μπορεί να κοιτάζει προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση.)

Επειδή η μάζα στο άκρο του εκκρεμούς κινείται σε κυκλική τροχιά, η κίνηση του εκκρεμούς προσδιορίζεται πλήρως από τη γωνία θ και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, χρησιμοποιώντας την έκφραση για την επιτάχυνση της κυκλικής κίνησης σε πολικές συντεταγμένες (14), παίρνει την εξής μορφή:

$$-ml\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + ml\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -mg \mathbf{k} + \mathbf{T}, \quad (30)$$

όπου $\mathbf{T}$ είναι η άγνωστη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο από τη ράβδο. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η δύναμη που ασκείται από τη ράβδο στο σώμα έχει ακτινική διεύθυνση⁵:

$$\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{r}}, \quad (31)$$

⁵Η υπόθεση αυτή, μολονότι μας φαίνεται αυτονόητη –ίσως λόγω της μακρόχρονης σχολικής ενασχόλησης με αυτό το σύστημα– δεν είναι καθόλου προφανής. Σκεφθείτε ότι αν χτυπήσουμε ένα αντικείμενο με μια ράβδο, η

δηλαδή στη κατεύθυνση της ράβδου, τότε η άγνωστη δύναμη μπορεί να απαλειφθεί και η κίνηση του εκκρεμούς να προσδιορισθεί χωρίς να γνωρίζουμε το νόμο της άγνωστης αυτής δύναμης. Πράγματι η (30) με αυτή τη παραδοχή γίνεται:

$$-ml\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + ml\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -mg \mathbf{k} + T\hat{\mathbf{r}}, \quad (32)$$

οπότε η γωνιακή συνιστώσα της (32) δίνει την εξίσωση κίνησης της θ από την οποία έχει απαλειφθεί η άγνωστη δύναμη:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (33)$$

και η οποία αρκεί για να προσδιορισθεί η κίνηση του εκκρεμούς, δεδομένων των αρχικών συνθηκών $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Αφού προσδιορισθεί η κίνηση από την (33), η αντίδραση T μπορεί να υπολογισθεί εκ των υστέρων, διότι για λόγους συνέπειας πρέπει να ικανοποιεί την

$$T = mg \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} - ml\dot{\theta}^2, \quad (34)$$

η οποία προκύπτει από την ακτινική συνιστώσα της (33). Προσέξτε ότι με την (34) δεν έχουμε προσδιορίσει το νόμο της άγνωστης δύναμης, αλλά τη (μη σταθερή) τιμή της στη δεδομένη κατάσταση. Η (34) απλώς προσδιορίζει τη τιμή της δύναμης. Όπως έχουμε συζητήσει στο 1ο Κεφάλαιο, το γεγονός αυτό δεν ισοδυναμεί με γνώση του νόμου της δύναμης.

Επειδή

$$-\mathbf{k} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

(βλ. σχήμα 4), η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς (33), αν διαιρέσουμε τα μέλη της με το ml και ορίζοντας τη συχνότητα,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (35)$$

παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (36)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (36) με $\dot{\theta}$ (όπως συνήθως κάνουμε όταν έχουμε κάποιο πρόβλημα που η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης) θα έχουμε ότι

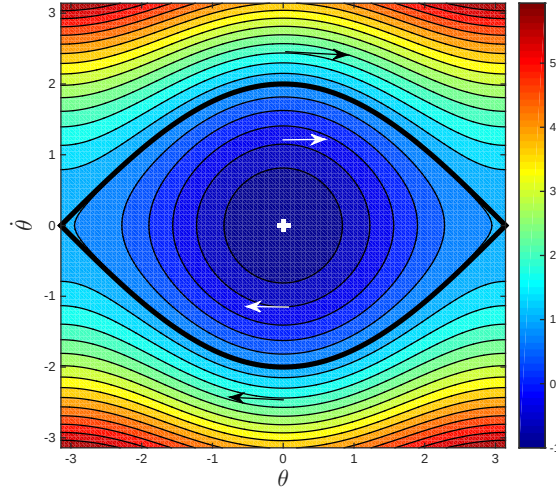
$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega^2 \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

ράβδος ασκεί δυνάμεις κάθετες στην ίδια. Όταν το εκκρεμές εκτελεί ταλαντώσεις πιθανώς η ράβδος να αισθάνεται πλευρικές τάσεις προκειμένου να επιταχύνει ή να επιβραδύνει τη μάζα. Στο όριο βέβαια που η ράβδος τείνει να γίνει άμαξη δεν μπορεί παρά οι πλευρικές δυνάμεις να εξαφανίζονται προκειμένου η άμαξη ράβδος να κινείται με πεπερασμένη γωνιακή επιτάχυνση.

και συνεπώς η ενεργειακού τύπου ποσότητα

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta = \epsilon, \quad (37)$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Η ενέργεια του εκκρεμούς είναι $E = ml^2\epsilon$ και το ϵ είναι $\epsilon = \dot{\theta}_0^2/2 - \omega^2 \cos \theta_0$ για την κίνηση με αρχικές συνθήκες $\theta_0, \dot{\theta}_0$.



Σχήμα 5: Οι τροχιές σταθερού ϵ που διαγράφει το εκκρεμές στο χώρο των φάσεων για $\omega = 1$. Τα χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του ϵ και τα βέλη υποδεικνύουν τη φορά της κίνησης. Η μαύρη γραμμή σημειώνει την διαχωρίζουσα τροχιά $\dot{\theta} = \pm 2 \cos(\theta/2)$ που ενώνει το ασταθές σημείο ισορροπίας $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm\pi, 0)$ με τον εαυτό του (το πραγματικό σημείο που αντιστοιχεί στο $\theta = \pi$ είναι το ίδιο με αυτό που αντιστοιχεί στο $\theta = -\pi$). Ο σταυρός στο κέντρο σημειώνει το ευσταθές σημείο ισορροπίας $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$.

Η διατήρηση της (37) είναι ικανή να δώσει ποιοτική περιγραφή της κίνησης του εκκρεμούς. Το εκκρεμές θα διαγράψει καμπύλες σταθερού ϵ στο χώρο των φάσεων $(\theta, \dot{\theta})$. Οι καμπύλες αυτές σχεδιάζονται για διαφορετικές τιμές του ϵ στο σχήμα 5. Η γωνία λαμβάνει τιμές στο ανοικτο-κλειστό διάστημα $\theta = (-\pi, \pi]$ και επειδή οι γωνίες $\theta = -\pi$ και $\theta = \pi$ αναφέρονται στην ίδια γωνιακή θέση, ο χώρος των φάσεων είναι επιφάνεια κυλίνδρου με γενέτειρα την ευθεία $\theta = \pi$ και το σχήμα 5 είναι το επίπεδο ανάπτυγμα του κυλινδρικού αυτού χώρου των φάσεων.

Κάθε καμπύλη σταθερού ϵ αντιστοιχεί σε μια ξεχωριστή τροχιά του εκκρεμούς στο χώρο των φάσεων. Υπάρχουν 4 ειδών τροχιές που περιγράφουν 5 διαφορετικές καταστάσεις κίνησης του εκκρεμούς ανάλογα με την ενεργειακή του στάθμη, ϵ .

- (α) $\epsilon = -\omega^2$. Η τροχιά αυτή αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενεργειακή στάθμη του εκκρεμούς και είναι η σημειακή τροχιά του σημείου ισορροπίας $\theta = \dot{\theta} = 0$.

- (β) $-\omega^2 < \epsilon < \omega^2$. Οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες. Η κίνηση είναι ταλαντωτική μεταξύ των μεγίστων αποκλίσεων $\Theta_{\max/\min} = \pm \cos^{-1}(\epsilon/\omega^2)$ από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Η ταλάντωση είναι και περιοδική (όπως συμβαίνει με όλες τις μονοδιάστατες ταλαντώσεις) με την περίοδο, T , να τείνει στο άπειρο καθώς το $\epsilon \rightarrow \omega^2$ και κατά τη μέγιστη απόκλιση το εκκρεμές να προσεγγίζει την κατακόρυφο $\Theta_{\min/\max} \rightarrow \pm\pi$.
- (γ) $\epsilon = \omega^2$. Εδώ έχουμε τρεις μη επικοινωνούσες τροχιές. Η μια τροχιά ξεκινά από το $-\pi$ και κινούμενη αντιωρολογιακά καταλήγει, μετά από άπειρο χρόνο, στο $+\pi$ (πάνω καμπύλη της διαχωρίζουσας στο χώρο των φάσεων). Η δεύτερη εκτελεί την ανάποδη κίνηση (κάτω καμπύλη στο χώρο των φάσεων). Το σημείο $\pm\pi$, όντας ασταθές δεν είναι προσεγγίσιμο από τις καμπύλες αυτές, οι οποίες όμως φτάνουν οσοδήποτε κοντά στα ακραία αυτά σημεία. Στην ενέργεια αυτή ανήκει και η τρίτη σημειακή τροχιά: η $(\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0)$ (είναι μία διότι τα σημεία $\theta = \pm\pi$ ταυτίζονται) η οποία όμως είναι πρακτικώς μη υλοποιήσιμη καθότι η παραμικρή λανθασμένη τοποθέτηση σε αυτές τις ιδιαίτερες αρχικές συνθήκες θα έχει ως αποτέλεσμα τη γρήγορη απομάκρυνση του εκκρεμούς από αυτή την ασταθή ισορροπία.
- (δ) $\epsilon > \omega^2$. Η ενέργεια είναι τόσο μεγάλη, ώστε το εκκρεμές περιστρέφεται αενάως, είτε ωρολογιακά (κάτω από τον κάτω κλάδο της διαχωρίζουσας), είτε αντιωρολογιακά (πάνω από τον πάνω κλάδο της διαχωρίζουσας). Στην περίπτωση αυτή η $\dot{\theta}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και δεν μηδενίζεται ποτέ.

Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς (36) είναι μια μη γραμμική εξίσωση και συνεπώς δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση μέσω υπέρθεσης δύο λύσεων του εκκρεμούς με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, όπως συμβαίνει στους αρμονικούς ταλαντωτές. Όμως κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας οι εξισώσεις γίνονται κατά προσέγγιση γραμμικές και μπορούμε τότε να αξιοποιήσουμε όλα τα ευεργετήματα της γραμμικής ανάλυσης.

Όπως είπαμε παραπάνω, το εκκρεμές έχει δύο σημεία ισορροπίας στις θέσεις και ταχύτητες

$$\Theta_1 = (\theta, \dot{\theta}) = (0, 0) \text{ και } \Theta_2 = (\pi, 0) ,$$

διότι οι σημειακές τροχιές:

$$\theta(t) = 0 \text{ , } \dot{\theta}(t) = \pi \text{ ,}$$

είναι λύσεις του εκκρεμούς με αρχικές συνθήκες Θ_1 και Θ_2 αντίστοιχα. Μάλιστα επειδή οι λύσεις των νευτώνειων προβλημάτων είναι μοναδικές, καμμία άλλη κίνηση δεν μπορεί να καταλήξει σε αυτές σε πεπερασμένο χρόνο.

Το Θ_1 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και πλησίον του σημείου $\Theta_1 = (0, 0)$ στο χώρο φάσεων η κίνηση του εκκρεμούς είναι κατά προσέγγιση γραμμική. Πράγματι διαταραχθεί το Θ_1 κατά $\theta_0 \ll 1$, $\dot{\theta}_0/\omega \ll 1$, και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση για μικρές γωνίες

$$\sin \theta \approx \theta \text{ ,}$$

η εξίσωση κίνησης (36) είναι κατά προσέγγιση η γραμμική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 .$$

Τότε η θ εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η κίνηση είναι ευσταθής, διότι η θ φράσσεται (αποδείξτε το) :

$$\theta^2 \leq \theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} .$$

Συνεπώς το εκκρεμές παραμένει στην περιοχή του σημείου ισορροπίας και η κίνηση παραμένει γραμμική, αφού $\theta_0 \ll 1$ και $\dot{\theta}_0/\omega \ll 1$.

Το σημείο $\Theta_2 = (\pi, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Θέτοντας $\theta = \pi + \theta'$

$$\sin(\pi + \theta') \approx -\theta' ,$$

για $\theta' \ll 1$. Η εξίσωση κίνησης παίρνει τότε τη μορφή

$$\ddot{\theta}' - \omega^2 \theta' = 0 ,$$

με λύση την

$$\theta' = \theta_0 \cosh(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

όπου

$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} , \quad \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} .$$

Αν οι αρχικές συνθήκες δεν συνδέονται με την ιδιαίτερη σχέση $\theta_0 = -\dot{\theta}_0/\omega$, το εκθετικό μέρος της λύσης $e^{\omega t}$, ακόμη και αν είναι πολύ μικρό, θα κάνει πολύ γρήγορα εμφανή την παρουσία του και θα απομακρύνει το εκκρεμές από το σημείο ισορροπίας του, καταστρέφοντας την προσεγγιστική σχέση για το ημίτονο και επομένως τη διαφορική εξίσωση της κίνησης (η εξίσωση θα πάψει να είναι γραμμική λόγω της ύπαρξης του ημιτόνου και του γεγονότος ότι η γωνία θ' θα πάψει να είναι πολύ μικρή). Η λύση που βρήκαμε είναι περιορισμένου χρονικού ορίζοντα. Στην πράξη δεν είναι δυνατό να πετύχει κανείς να στήσει το εκκρεμές στην ανισόρροπη θέση του ούτε για λίγο (βλ. Άσκηση 1).

Άσκηση 1

Δείξτε ότι αν επιχειρήσει κανείς να στήσει όρθιο ένα μολύβι μήκους 10 εκατοστών και μάζας 5 γραμμαρίων με τη μύτη προς τα κάτω, ακόμη και με τη βοήθεια του πιο προηγμένου τεχνολογικά πολιτισμού που θα του δίνει τη δυνατότητα να επιτύχει ακρίβεια στα όρια της ακρίβειας που θέτει η ίδια η κβαντομηχανική (η μηχανική που διέπει τον πραγματικό κόσμο) μέσω της αρχής της αβεβαιότητας ($\Delta\theta \Delta L_\theta \geq \hbar$ όπου $\Delta\theta$, και ΔL_θ η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της αρχικής θέσης και της αρχικής στροφορμής και $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ η σταθερά του Planck), το μολύβι δεν θα παραμείνει στη θέση αυτή, ή κοντά σε αυτή, παραπάνω από μερικά μόνο δευτερόλεπτα.

Θα υπολογίσουμε τώρα την περίοδο της κίνησης συναρτήσει του μέγιστου πλάτους $\Theta_{\max}$ της ταλάντωσης του εκκρεμούς όταν $|\epsilon| < \omega^2$ (όχι μόνο για μικρό πλάτος αιώρησης). Για μικρές ταλαντώσεις περί το ευσταθές σημείο ισορροπίας $\Theta_{\max} \ll 1$ η ταλάντωση είναι αρμονική και η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (38)$$

ανεξαρτήτως του πλάτους της ταλάντωσης· η ταλάντωση, δηλαδή, είναι ισόχρονη. Αυτή η ιδιότητα οδήγησε στη χρήση του εκκρεμούς για τη μέτρηση του χρόνου για αρκετούς αιώνες. Δυστυχώς όμως η περίοδος ταλάντωσης δεν παραμένει ισόχρονη όσο μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης και η κίνηση του εκκρεμούς επηρεάζεται από τους μη γραμμικούς όρους. Για να αποφευχθεί η ανακρίβεια μέτρησης του χρόνου που πηγάζει από τη μη ισοχρονικότητα της περιόδου του εκκρεμούς έχουν επινοηθεί και κατασκευαστεί καταπληκτικοί διορθωτικοί μηχανισμοί.

Η δύναμη επαναφοράς του εκκρεμούς έχει μέτρο που είναι πάντοτε μικρότερο από τη δύναμη επαναφοράς της αντίστοιχης αρμονικής ταλάντωσης, διότι είναι⁶ $|\sin \theta| < |\theta|$, συνεπώς αναμένουμε η περίοδος να μεγαλώνει με το πλάτος της αιώρησης του εκκρεμούς και το ρολόι-εκκρεμές να χάνει χρόνο. Ας υπολογίσουμε ακριβώς την εξάρτηση της περιόδου του εκκρεμούς από το πλάτος της ταλάντωσης. Από την (37) έχουμε ότι

$$\dot{\theta} = \pm \omega \sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}, \quad (39)$$

δεδομένου ότι $\epsilon = -\omega^2 \cos \Theta_{\max}$, και

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}}. \quad (40)$$

Το θετικό πρόσημο στην (40) αναφέρεται στην κίνηση από το $-\Theta_{\max} \rightarrow \Theta_{\max}$ που διαρκεί τη μισή περίοδο, $T/2$. Τα δύο πρόσημα τοποθετούνται έτσι ώστε ο χρόνος να αυξάνεται πάντοτε, δηλαδή να είναι πάντα $dt > 0$, οπότε όταν $d\theta > 0$ η τετραγωνική ρίζα έχει το θετικό πρόσημο, και όταν $d\theta < 0$ το αρνητικό. Ολοκληρώνοντας την (40) υπολογίζουμε ότι η περίοδος είναι:

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}}. \quad (41)$$

Για να υπολογίσουμε την εξάρτηση της περιόδου από το πλάτος είναι χρήσιμο να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα έτσι ώστε η εξάρτηση του ολοκληρώματος από το $\Theta_{\max}$ να ενσωματωθεί στην ολοκληρωτέα ποσότητα. Ο κλασικός τρόπος χειρισμού αυτού το υπολογισμού ακολουθεί. Τα

⁶Για να αποδείξετε αυτή την ανισότητα, ορίστε τη συνάρτηση $f(\theta) = \theta - \sin \theta$, η οποία λαμβάνει την τιμή $f(0) = 0$ και είναι αύξουσα διότι $f'(\theta) = 1 - \cos \theta \geq 0$, και η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε απομονωμένα σημεία, συνεπώς για όλα τα $\theta > 0$ είναι $f(\theta) > 0$.

δύο συνημίτονα της υπόρριζης ποσότητας του ολοκληρώματος αντικαθίστανται χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ και η (41) μετασχηματίζεται στην:

$$\omega T = \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\Theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2)}} . \quad (42)$$

Στη συνέχεια ορίζοντας μια νέα μεταβλητή ψ έτσι ώστε

$$\sin(\theta/2) = \sin(\Theta_{\max}/2) \sin \psi ,$$

και αλλάζοντας μεταβλητή ολοκλήρωσης από θ σε ψ , η (42) μετασχηματίζεται στην:

$$\begin{aligned} \omega T &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos \psi \, d\psi}{\cos(\theta/2) \sqrt{1 - \sin^2(\Theta_{\max}/2) \sin^2 \psi}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}} , \end{aligned} \quad (43)$$

όπου θέσαμε:

$$a = \sin(\Theta_{\max}/2) .$$

Προσέξτε ότι με την αλλαγή μεταβλητής, όχι μόνο καταφέραμε να απαλλάξουμε τα όρια της ολοκλήρωσης από την εξάρτησή τους από την $\Theta_{\max}$, αλλά να απαλλάξουμε και την ολοκληρωτέα συνάρτηση από την απροσδιοριστία στα όρια της ολοκλήρωσης. Η νέα ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν παρουσιάζει καμία ανωμαλία στα άκρα της ολοκλήρωσης.

Η περίοδος προκύπτει από το ολοκλήρωμα (43), το οποίο όμως δεν μπορεί να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή, να εκφρασθεί δηλαδή με τις συνηθισμένες συναρτήσεις: τριγωνομετρικές, εκθετικές και πολυωνμικές. Το ολοκλήρωμα αυτό συναντάται όμως συχνά σε προβλήματα φυσικής και ονομάζεται πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους⁷ και η τιμή του μπορεί να βρεθεί σε βιβλία με αριθμητικούς πίνακες μαθηματικών συναρτήσεων, ή να υπολογισθεί αριθμητικά, ή να προσεγγισθεί αναπτύσσοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα σε σειρά Taylor για μικρά $\Theta_{\max}$ άρα και για μικρά a .

Οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor της ολοκληρωτέας συνάρτησης ως προς a είναι:

$$(1 - a^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} = 1 + \frac{a^2}{2} \sin^2 \psi + \frac{3a^4}{8} \sin^4 \psi + \frac{5a^6}{16} \sin^6 \psi + O(a^8) , \quad (44)$$

⁷Το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους ορίζεται ως

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} dx / \sqrt{1 - k \sin^2 x} .$$

Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα προέκυψαν αρχικά από την προσπάθεια υπολογισμού του μήκους τόξου μιας έλλειψης.

και δεδομένου ότι είναι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} , \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{16} , \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5\pi}{32} ,$$

η (43) προσδιορίζει την περίοδο του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της αιώρησης ως το ανάπτυγμα:

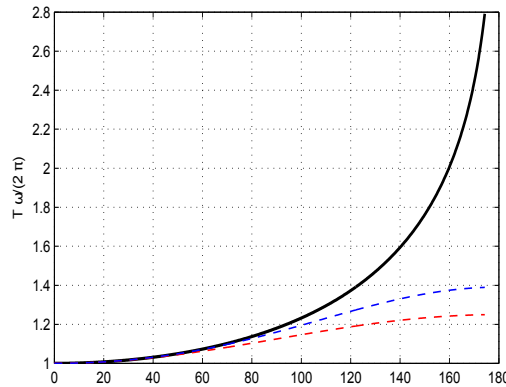
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \sin^2(\Theta_{\max}/2) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4(\Theta_{\max}/2) + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin^6(\Theta_{\max}/2) + \dots \right) .(45)$$

Συνεπώς, όπως επιχειρηματολογήσαμε και παραπάνω, η περίοδος αυξάνει με το πλάτος. Σε πρώτη προσέγγιση ως προς το πλάτος η περίοδος του εκκρεμούς είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} , \quad (46)$$

ενώ σε δεύτερη:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\Theta_{\max}/2) \right) . \quad (47)$$



Σχήμα 6: Η περίοδος του εκκρεμούς συναρτήσει της γωνίας μέγιστης αιώρησης $\Theta_{\max}$. Με διάστιχτες γραμμές σημειώνονται οι τιμές από τις προσεγγίσεις της περιόδου όταν κρατηθούν οι πρώτοι δύο όροι στο ανάπτυγμα Taylor (45) (κόκκινη γραμμή) και όταν κρατηθούν τρεις όροι στο ανάπτυγμα (μπλε γραμμή).

Το πλάτος της αιώρησης οδηγεί σε διόρθωση μόλις 1/1000 στην περίοδο της αντίστοιχης αρμονικής ταλάντωσης (46) όταν

$$\sin^2(\Theta_{\max}/2) = 0.004 , \quad \text{ή} \quad \sin(\Theta_{\max}/2) = 0.0632 , \quad \text{ή} \quad \Theta_{\max} \approx 7^\circ 12' ,$$

ενώ ακόμη και αν $\Theta_{\max} = 90^\circ$, η διόρθωση της περιόδου είναι περίπου 12.5%. Η γραφική παράσταση της περιόδου του εκκρεμούς συναρτήσει του μέγιστου πλάτους $\Theta_{\max}$ παρατίθεται

στο Σχ. 6 μαζί με της δεύτερης και τέταρτης τάξης προσεγγίσεις, οι οποίες δίνουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις της περιόδου για $\Theta_{\max} < 60^\circ$.

Υπάρχει μία ειδική περίπτωση στην οποία η εξέλιξη του εκκρεμούς μπορεί να προσδιορισθεί σε αναλυτική μορφή. Αυτό συμβαίνει όταν $\epsilon = \omega^2$ ή $\Theta_{\max} = \pi$. Η τροχιά τότε αντιστοιχεί στη διαχωρίζουσα του σχήματος Σχ. 5. Σύμφωνα με την (39) η διαχωρίζουσα δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega \cos(\theta/2), \quad (48)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί σε κλειστή μορφή. Αν το εκκρεμές αρχικά ήταν στο $\theta_0 = 0$, ο χρόνος για να διαγράψει γωνία θ με αντιωρολογιακή φορά είναι:

$$\omega t = \log \left[\tan \left(\frac{\pi + \theta}{4} \right) \right], \quad (49)$$

ο οποίος, όπως αναμενόταν, απειρίζεται καθώς $\theta \rightarrow \Theta_{\max} = \pi$.

5 * Εξαναγκασμένη ταλάντωση του εκκρεμούς στο επίπεδο

Έχουμε ήδη εξετάσει την απόκριση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση σε αρμονική διέγερση και το φαινόμενο του συντονισμού που προκύπτει. Στην περίπτωση του εκκρεμούς, ο αντίστοιχος ταλαντωτής, με μεταβλητή τη γωνία θ , εφόσον αυτή είναι μικρή, ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A \cos(\omega_f t), \quad (50)$$

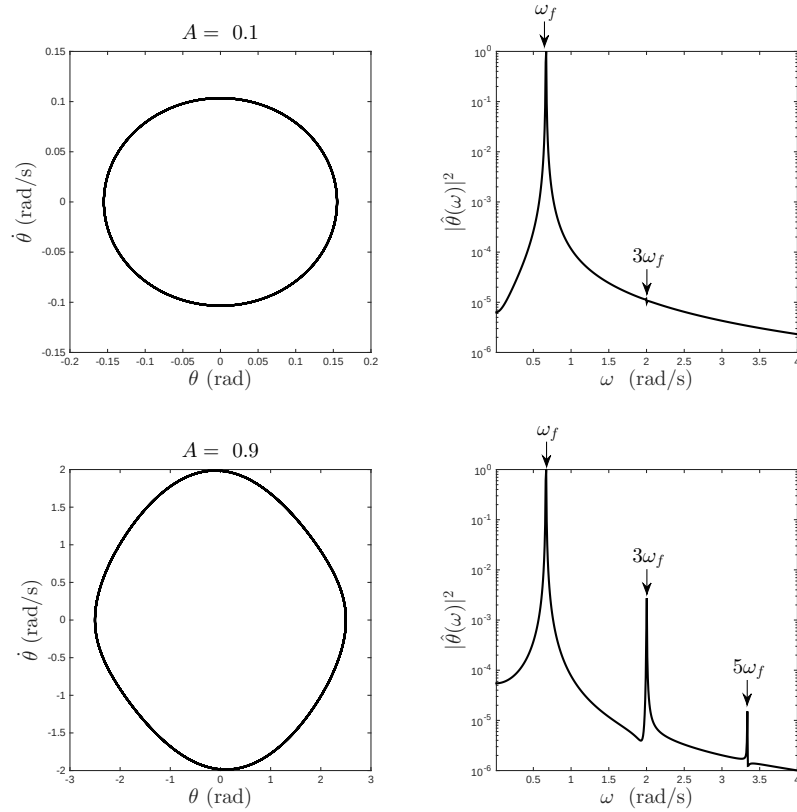
και η απόκριση του ταλαντωτή για ασθενή απόσβεση, με $\omega > \gamma$,

$$\theta = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \phi) + ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi_0), \quad (51)$$

αποτελείται από μια εξαναγκασμένη ταλάντωση (ο πρώτος όρος της (51)) στην ίδια συχνότητα με αυτήν του εξωτερικού διεγέρτη, ω_f , αλλά με υστέρηση στην απόκριση:

$$\phi_0 = -\tan^{-1} \left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right), \quad (52)$$

και μία εκθετικά φθίνουσα ταλάντωση με συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ και πλάτος a και φάση ϕ_0 που σχετίζονται με τις αρχικές συνθήκες. Σε μεγάλους χρόνους, βέβαια, απομένει μόνο η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση στην συχνότητα ω_f του διεγέρτη και αν αναλύαμε την κίνηση



Σχήμα 7: Τα δύο ανωτέρω γραφήματα αφορούν στην κίνηση του εξαναγκασμένου εκκρεμούς για διέγερση $A = 0.1$. Αριστερά: η περιοδική τροχιά στο χώρο των φάσεων. Η τροχιά αυτή είναι σχεδόν ίδια με αυτήν της γραμμικής απόκρισης. Δεξιά: η φασματική ισχύς της κίνησης εμφανίζει κορυφή στην συχνότητα του διεγέρτη, ω_f , ενώ διακρίνεται αμυδρά και η τρίτη αρμονική, $3\omega_f$. Κάτω γραφήματα: $A = 0.9$. Η κίνηση είναι μεν περιοδική αλλά εμφανίζει σημαντική απόκλιση από τη γραμμική κίνηση με φασματική ισχύ σε περιττά πολλαπλάσια της συχνότητας του διεγέρτη, ω_f . Παράμετροι: $\omega_f = 0.667$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.25$.

σε ένα παλμογράφο θα βλέπαμε ότι όλη η ενέργεια⁸ του ταλαντωτή θα ήταν συγκεντρωμένη στη συχνότητα ω_f . Αυτό είναι χαρακτηριστικό της γραμμικότητας του συστήματος: επειδή η εξίσωση κίνησης έχει μόνο γραμμικούς όρους δεν μπορούν να παραχθούν άλλες συχνότητες από αυτές που επιβάλλονται (εδώ είχαμε μόνο την ω_f) ή από αυτές που το σύστημα έχει από τη φύση του. Αν δεν υπήρχε απόσβεση θα υπήρχε ισχυρή φασματική ισχύς και στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή, ω_0 . Αν η εξίσωση κίνησης έχει και μη γραμμικούς όρους, π.χ. όρους της μορφής x^3 , τότε αν η κίνηση ήταν αρχικά $\cos(\omega_f t)$, συγκεντρωμένη μόνο στη συχνότητα ω_f , θα παράγονταν αυτομάτως και όροι $\cos^3(\omega_f t)$ και η κίνηση θα εμφάνιζε και μια άλλη συχνότητα,

⁸Η ανάλυση του ενεργειακού φάσματος του ταλαντωτή, δηλαδή το ενεργειακό περιεχόμενο ανά συχνότητα ονομάζεται *φασματική ισχύς* του ταλαντωτή.

την τρίτη αρμονική $3\omega_f$, διότι

$$\cos^3(\omega_f t) = \frac{1}{4} \cos(3\omega_f t) + \frac{3}{4} \cos(\omega_f t) ,$$

και, αν υπήρχαν και ανώτερης τάξης όροι, θα εμφανίζονταν και άλλοι συνδυασμοί συχνοτήτων από αυτούς τους μη γραμμικούς όρους. Η μη γραμμικότητα δηλαδή θα εμφανίζει απόκριση και σε άλλες συχνότητες εκτός από αυτές του διεγέρτη. Το παραπάνω επιχείρημα μας οδηγεί στο να αναμένουμε φασματική ισχύ της κίνησης συγκεντρωμένη μόνο σε ένα αριθμήσιμο πλήθος συχνοτήτων της μορφής ακεραίων πολλαπλασίων της ω_f . Όταν η κίνηση προκύπτει από υπέρθεση αριθμήσιμου πλήθους ταλαντώσεων διαφορετικών συχνοτήτων η κίνηση ονομάζεται *οιωνεί-περιοδική* (quasi-periodic). Συμβαίνει όμως υπό προϋποθέσεις να έχουμε ισχύ όχι μόνο σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του διεγέρτη αλλά και σε ρητά πολλαπλάσια της ω_f , ενώ άλλες φορές το σύστημα μεταβαίνει σε κατάσταση στην οποία έχουν αναπτυχθεί με συνεχή τρόπο όλες οι συχνότητες και το φάσμα της κίνησης παρουσιάζει φασματική ισχύ σε πυκνό και μη αριθμήσιμο πλήθος συχνοτήτων. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα λέγεται *εργοδικό* ή *χαοτικό*⁹. Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός εκκρεμούς με απόσβεση σε αρμονική διέγερση, και με παραδείγματα θα δείξουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις ότι μπορεί αυτό να μεταβεί υπό συνθήκες σε χαοτική συμπεριφορά.

Το εκκρεμές διέπεται από μια μη γραμμική εξίσωση, δεδομένου ότι η δύναμη επαναφοράς είναι η $-\sin \theta$, και η εξίσωση κίνησης στη περίπτωση αρμονικής διέγερσης είναι αντίστοιχα με την (50):

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = A \cos(\omega_f t) , \quad (53)$$

Θα περιγράψουμε την κίνηση του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της διέγερσης A .

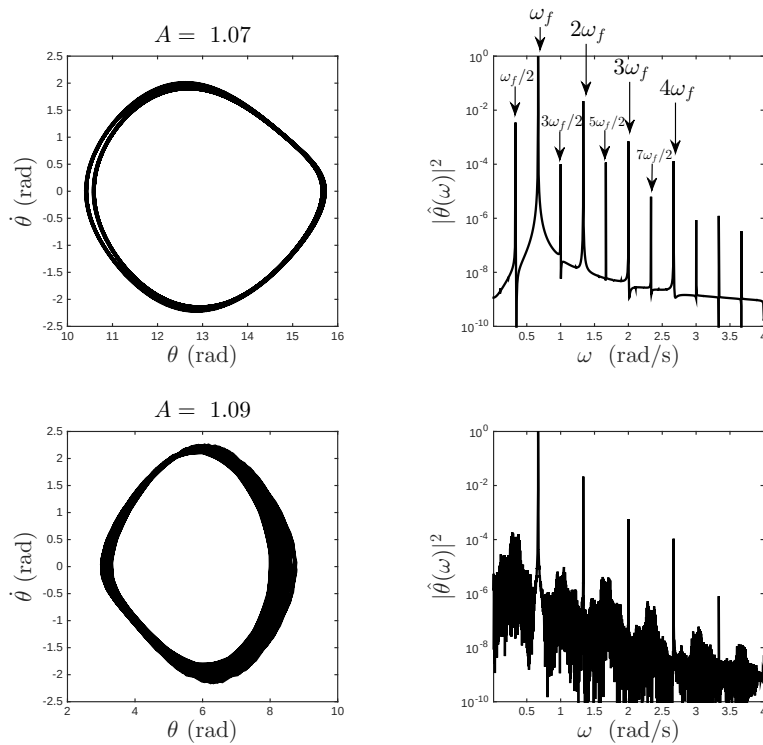
Αν το πλάτος της διέγερσης είναι $A = 0$, λόγω της τριβής, το εκκρεμές συν τω χρόνω θα καταλήξει στη περιοχή του ευσταθούς σημείου ισορροπίας $\theta = 0$ (εκτός αν ήταν ακριβώς στη μέτρου μηδέν κατάσταση $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$ που αντιστοιχεί στο ασταθές σημείο ισορροπίας).

Αν το A είναι μικρό αναμένεται ταλάντωση μικρού πλάτους και η κίνηση του εκκρεμούς διέπεται σε πολύ καλή προσέγγιση από τη γραμμική εξίσωση (50). Το εκκρεμές μετά από χρονικό διάστημα $t \gg 1/\gamma$ θα εκτελεί περιοδική κίνηση συχνότητας ω_f σύμφωνα με την (51). Η καταληκτική κίνηση για $A = 0.1$ φαίνεται στο σχήμα 7 (τα δύο πάνω γραφήματα). Παρατηρήστε ότι η κλειστή τροχιά που αντιστοιχεί στην περιοδική κίνηση, και ονομάζεται και οριακός κύκλος, είναι σχεδόν κυκλική σαν αυτή του αρμονικού ταλαντωτή και συνεπώς η φασματική ισχύς είναι αποκλειστικά συγκεντρωμένη στη κύρια συχνότητα ω_f με μια ανεπαίσθητη συμβολή στην ισχύ από τη συχνότητα $3\omega_f$ (σχεδόν δεν φαίνεται είναι 5 τάξεις μεγέθους μικρότερη).

⁹ Για να δειχθεί αυτή η πρόταση απαιτούνται αναλυτικά επιχειρήματα. Δεν μπορεί να δειχθεί η πρόταση αυτή με αριθμητικούς υπολογισμούς του φυσικού συστήματος, αφού κάθε αριθμητική ολοκλήρωση διαρκεί ένα πεπερασμένο διάστημα και η ανάλυση στις συχνότητες της απόκρισης θα είναι τότε μία σειρά Fourier που περιέχει διακριτές συχνότητες. Μάλιστα οι συχνότητες αυτές θα είναι και πεπερασμένες στον αριθμό, δεδομένου ότι ένας αριθμητικός υπολογισμός δεν μπορεί να δώσει τιμές σε συνεχή διαστήματα.

Οπότε η κίνηση είναι σε μεγάλη προσέγγιση αρμονική. Η συχνότητα $\omega_0^2 - \gamma^2$ δεν εμφανίζεται διότι παρουσιάζουμε τη φασματική ισχύ της γωνιακής θέσης έχοντας εξαλείψει τη μεταβατική εξέλιξη. Η φασματική ισχύς δεν είναι μία συνάρτηση δέλτα στο ω_f , όπως θα περίμενε κανείς, διότι η φασματική ισχύς υπολογίστηκε σε ένα περιορισμένο χρονικά δείγμα γωνιακών θέσεων. Όσο επεκτείνουμε το χρόνο συλλογής του δείγματος τόσο περισσότερο η φασματική ισχύς θα προσεγγίζει μία συνάρτηση δέλτα.

Αυξάνουμε το πλάτος της διέγερσης στη τιμή $A = 0.9$. Τότε η καταληκτική κίνηση φαίνεται στο σχήμα 7 (δύο κάτω γραφήματα). (Και πάλι δεν δείχνουμε τη μεταβατική εξέλιξη.) Η κίνηση είναι και πάλι περιοδική, αλλά πλέον ο οριακός κύκλος έχει απομακρυνθεί από την μορφή του αρμονικού ταλαντωτή. Αυτό φαίνεται στο φάσμα της γωνιακής θέσης που δείχνει ότι η κίνηση έχει και ανώτερες αρμονικές, περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας ω_f .



Σχήμα 8: Όπως και στο σχήμα 7. Πάνω γραφήματα: διέγερση $A = 1.07$. Αριστερά: η περιοδική τροχιά στο χώρο των φάσεων έχει γίνει διπλή, και η φασματική ισχύς της κίνησης (δεξιό γράφημα) εμφανίζει ξαφνικά κορυφές και στην υποδιπλάσια συχνότητα της συχνότητας του διεγέρτη, ω_f , καθώς επίσης και στα πολλαπλάσια αυτής. Η δομική αυτή μεταβολή της τροχιάς αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου* (period doubling bifurcation). Κάτω γραφήματα: $A = 1.09$. Η κίνηση έχει γίνει πλέον χαοτική (εργοδική), δεν ακολουθεί μία συγκεκριμένη καμπύλη αλλά σαρώνει πλέον ολόκληρο χωρίο του χώρου των φάσεων. Η κίνηση είναι αperiοδική και το φάσμα γίνεται πυκνό. Παράμετροι: $\omega_f = 0.667$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.25$.

Η φασματική ισχύς των περιττών συχνοτήτων αυξάνεται με συνεχή τρόπο καθώς το A μεγαλώνει, αλλά όταν το πλάτος γίνει $A = 1.07$, έχουμε μια διακλάδωση στη συμπεριφορά του εκκρεμούς (bifurcation), που αντιστοιχεί σε δομική αλλαγή στο χαρακτήρα της κίνησης, και ο οριακός κύκλος γίνεται ξαφνικά διπλός και η περίοδος της κίνησης διπλασιάζεται. Αυτό φαίνεται στο γράφημα της φασματικής ισχύος στο σχήμα 8 (δύο πάνω γραφήματα), η οποία αποκτά ξαφνικά κορυφή στην υποδιπλάσια συχνότητα $\omega_f/2$. Αν αυξήσουμε το πλάτος λίγο ακόμα έχουμε και νέο διπλασμό της περιόδου. Αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμα περισσότερο εμφανίζονται όλο και περισσότερες υποδιπλάσιες συχνότητες. Όταν όμως ξεπεράσουμε τη τιμή $A = 1.09$ ο χαρακτήρας της κίνησης αλλάζει, και η κίνηση φαίνεται να γίνεται απεριοδική. Παρατηρείτε στο σχήμα 8 (δύο κάτω γραφήματα) ότι το φάσμα έχει σχεδόν γεμίσει. Αυτό φαίνεται ακόμα καλύτερα αν το πλάτος αυξηθεί ακόμη περισσότερο.

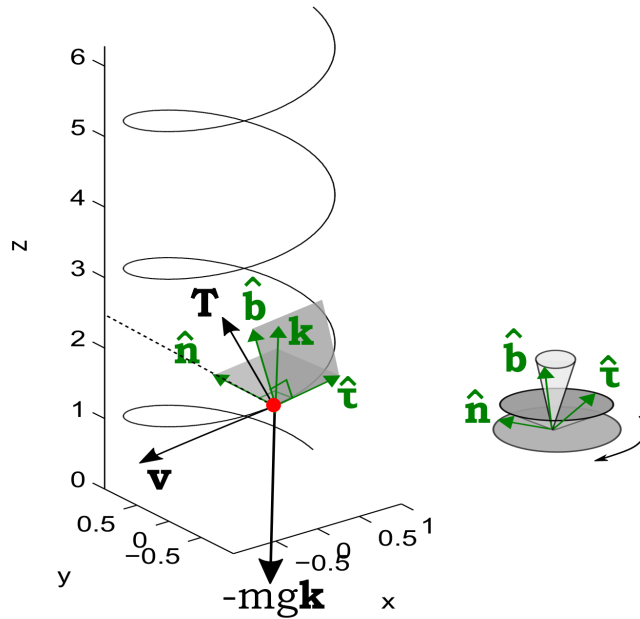
6 * Κίνηση επί έλικας σε ομογενές πεδίο βαρύτητας - Τρίεδρο του Frenet

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση άνευ τριβών μιας χάντρας επί ενός κυλινδρικού ελικοειδούς σύρματος στο ομογενές πεδίου βαρύτητας (βλ. σχήμα 9). Θα προσδιορίσουμε την κίνηση της χάντρας. Ο λόγος που ασχολούμαστε με αυτό το τεχνικό πρόβλημα είναι για να δείξουμε ακόμη μια φορά πως δουλεύει η νευτώνεια ανάλυση όταν υπάρχουν άγνωστες δυνάμεις και πως γίνεται η απαλοιφή τους προκειμένου να προσδιορισθεί η κίνηση. Την επίπονη αυτή διαδικασία συστηματοποίησε αργότερα ο Lagrange, διατυπώνοντας έτσι τις εξισώσεις ώστε η απαλοιφή των αγνώστων αυτών δυνάμεων να γίνεται αυτόματα. Η διατύπωση της νευτώνειας μηχανικής από το Lagrange, αν και ξεκίνησε από την πρακτική ανάγκη να μπορεί να καθίσταται η διαδικασία της απαλοιφής αυτόματη, κατέληξε σε ενός νέου τύπου πλαίσιο διατύπωσης των φυσικών νόμων.

Όπως συζητήσαμε και στην περίπτωση του εκκρεμούς, στη χάντρα, εκτός από τη γνωστή δύναμη της βαρύτητας, ασκείται μια άγνωστη δύναμη από το ελικοειδές σύρμα η οποία αναγκάζει τη χάντρα να κινηθεί σε αυτό το σύρμα. Η νευτώνεια θεώρηση δεν μπορεί να προσδιορίσει την κίνηση αν δεν εισαχθούν φαινομενολογικές παραδοχές για τη δύναμη. Αν υποθεθεί ότι η δύναμη κείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της τροχιάς, ώστε να μην υπάρχει συνιστώσα αυτής της δύναμης κατά μήκος της τροχιάς, τότε η κίνηση προσδιορίζεται. Αφού προσδιορισθεί η κίνηση μπορεί να υπολογισθεί στη συνέχεια και η τιμή των αντιδράσεων που θα αναπτυχθούν κατά τη κίνηση.

Θα εκφράσουμε τις συντεταγμένες της χάντρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες, όπως είδαμε και στη περιγραφή της κίνησης σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο, (ρ, θ, z) , είναι οι συντεταγμένες με τις οποίες τα σημεία του επιπέδου (x, y) προσδιορίζονται με πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) ενώ η τρίτη συνιστώσα προσδιορίζεται με την καρτεσιανή συντεταγμένη, z , έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x, y, z) να είναι:

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \sin \theta \quad , \quad z = z \quad .$$



Σχήμα 9: Η κίνηση της χάντρας σε μια κυλινδρική έλικα. Διακρίνονται οι δυνάμεις και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\tau}$, $\hat{n}$, $\hat{b}$ των ενδογενών συντεταγμένων που σχηματίζουν το τρίεδρο του Frenet. Τα $\hat{\tau}$, $\hat{b}$ σχηματίζουν ένα κατακόρυφο επίπεδο, ενώ το $\hat{n}$ είναι οριζόντιο. Η εστιγμένη γραμμή που συνδέει την χάντρα με τον άξονα είναι οριζόντια και επομένως κάθετη στον άξονα. Η διεύθυνσή της είναι αυτή του $\hat{n}$. Στο ένθετο φαίνεται το τρίεδρο του Frenet το οποίο περιστρέφεται καθώς η χάντρα ολισθαίνει πάνω στην έλικα. Το κάθε μοναδιαίο διαγράφει ένα κώνο καθώς περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z . Ο κώνος του $\hat{n}$ είναι εκφυλισμένος σε επίπεδο.

Το διάνυσμα θέσης στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \mathbf{k}.$$

όπου

$$\hat{\rho} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j},$$

το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στο επίπεδο (x, y) και σε πλήρη αντιστοιχία με τις πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho}.$$

Τα σημεία μίας κυλινδρικής έλικας η οποία περιελίσσεται γύρω ένα ορθό κύλινδρο ακτίνας a , βρίσκονται πάντα σε απόσταση a από τον άξονα z . Συνεπώς για τη χάντρα έχουμε $\rho = a$ και η θέση της προσδιορίζεται από μία παράμετρο (αφού η κίνηση είναι μονοδιάστατη). Αν

επιλέξουμε αυτήξ η παράμετρος να είναι η γωνία θ , τότε η z συντεταγμένη της χάντρας πάνω στην έλικα είναι:

$$z(\theta) = \frac{h}{2\pi}\theta ,$$

όπου h είναι το βήμα της έλικας, δηλαδή η διαφορά της z συντεταγμένης δύο σημείων της έλικας όταν κάνουμε μία πλήρη περιστροφή κατά γωνία 2π επί της έλικας (είναι η απόσταση των σπειρωμάτων). Συνεπώς το σημεία της έλικας με παράμετρο την θ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{r} = a \hat{\rho} + \frac{h}{2\pi}\theta \mathbf{k} .$$

Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε ενδογενείς συντεταγμένες για να μελετήσουμε την κίνηση της χάντρας, υπολογίζουμε το διαφορικό μήκος τόξου:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} (d\theta)^2 \\ &= \left(a \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) \left(a \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) (d\theta)^2 \\ &= \left(a \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) \left(a \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) (d\theta)^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) (d\theta)^2 , \end{aligned}$$

ή

$$ds = b d\theta \quad \text{όπου} \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} . \quad (54)$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα επί της έλικας είναι

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{b} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{a}{b} \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi b} \mathbf{k} , \quad (55)$$

και εξ' αυτού προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\tau}}{ds} &= \frac{1}{b} \frac{d\hat{\tau}}{d\theta} \\ &= -\frac{a}{b^2} \hat{\rho} , \end{aligned}$$

αφού το $\mathbf{k}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Επειδή δε κάθε καμπύλη στο χώρο μπορεί τοπικά να θεωρηθεί επίπεδη, το τοπικό αυτό επίπεδο καθορίζεται από το $\hat{\tau}$ και την κατεύθυνση της στροφής αυτού που σχηματίζεται από το $d\hat{\tau}/ds$. Η κατεύθυνση του δευτέρου αυτού ανύσματος είναι η

λεγόμενη *πρώτη κάθετος* της τροχιάς $\hat{\mathbf{n}}$. Πρόκειται για το μοναδιαίο $\hat{\mathbf{n}}$ που συναντήσαμε αρχικά όταν εισαγάγαμε τις ενδογενείς συντεταγμένες. Ο εγγύτερος κύκλος της τροχιάς βρίσκεται πάνω σε αυτό το τοπικό επίπεδο και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$. Όπως είδαμε και στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς στο εκκρεμές είναι

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\varrho} ,$$

όπου ϱ είναι η ακτίνα καμπυλότητας του εγγύτερου αυτού κύκλου. Έτσι βρίσκουμε ότι η κάθετος στην τροχιά στο τοπικό επίπεδο του εγγυτέρου κύκλου στην έλικά είναι

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} , \quad (56)$$

και αντίστοιχα η ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = a + \frac{h^2}{4\pi^2 a} . \quad (57)$$

Καθώς, λοιπόν, η χάντρα ολισθαίνει στο σύρμα, το κέντρο καμπυλότητας περιστρέφεται και αυτό στο ίδιο z -ύψος, από την άλλη πλευρά του άξονα από αυτήν που βρίσκεται η χάντρα, διαγράφοντας τη δική της έλικά ακτίνας $h^2/(4\pi^2 a)$. Καθώς $h \rightarrow 0$ και η έλικά εκφυλίζεται σε κυκλική στεφάνη, είναι $\rho \rightarrow a$ (όπως θα ανέμενε κανείς), ενώ όταν $h \rightarrow \infty$ και η έλικά γίνεται ένα κατακόρυφο ευθύ σύρμα, $\rho \rightarrow \infty$.

Ο εγγύτερος κύκλος βρίσκεται στο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζεται από την $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ εξαιτίας της κλίσης του $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ (το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι οριζόντιο). Μπορούμε τώρα να σχηματίσουμε ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα δύο πρώτα:

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\mathbf{n}} . \quad (58)$$

Το διάνυσμα αυτό λέγεται *δεύτερο κάθετο διάνυσμα* στην καμπύλη (binormal) και με τα τρία αυτά διανύσματα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τοπικό ενδογενές καρτεσιανό σύστημα αξόνων, που συνδέεται αποκλειστικά με τη συγκεκριμένη τροχιά. Η τριάδα $(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του ενδογενούς καρτεσιανού συστήματος επί της τροχιάς του σωματιδίου ονομάζεται τριέδρο του Frenet. Στην περίπτωση της έλικας, το δεύτερο κάθετο διάνυσμα είναι:

$$\hat{\mathbf{b}} = - \left(\frac{a}{b} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{h}{2\pi b} \mathbf{k} \right) \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{h}{2\pi b} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{a}{b} \mathbf{k} ,$$

και κείται, όπως και το $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ στο επίπεδο το εφαπτόμενο στη κυλινδρική επιφάνεια στην οποία περιελίσσεται η έλικά.

Με το τριέδρο του Frenet ορισμένο σε κάθε σημείο της καμπύλης μπορούν τώρα να υπολογισθούν όλες οι μεταβολές των ενδογενών διανυσμάτων βάσης και μάλιστα υπάρχει μία ενδιαφέρουσα σχέση των μεταβολών των διανυσμάτων βάσης που παρατήρησε ο Frenet¹⁰ στη διδακτορική του διατριβή το 1847.

¹⁰Τις ίδιες σχέσεις ανακοίνωσε και ο Serret το 1851.

Έχουμε ήδη υπολογίσει την μεταβολή του εφαπτομενικού διανύσματος, η οποία είναι και η πρώτη εξίσωση Frenet-Serret, την οποία γράφουμε στην κλασική μορφή:

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \kappa(s) \hat{\mathbf{n}}, \quad (59)$$

όπου,

$$\kappa(s) = \frac{1}{\varrho}$$

είναι η *καμπυλότητα* της καμπύλης. Ονομάζεται καμπυλότητα διότι υποδεικνύει πόσο μη ευθεία είναι μία καμπύλη, π.χ. μία ευθεία έχει $\varrho = \infty$ και συνεπώς $\kappa = 0$, και αυτός είναι ο λόγος που εισάγουμε το κ και το χρησιμοποιούμε αντί του ϱ . Εκφράζοντας την καμπύλη συναρτήσει της ενδογενούς μεταβλητής, s , η καμπυλότητα γίνεται και αυτή συνάρτηση του s .

Ας υπολογίσουμε τώρα και την μεταβολή της πρώτης καθέτου $d\hat{\mathbf{n}}/ds$. Αυτή είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$ και συνεπώς κείται στο επίπεδο των $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{b}}$ και μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων:

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \alpha \hat{\tau} + \beta \hat{\mathbf{b}},$$

όπου

$$\alpha = \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}, \quad \beta = \hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau(s),$$

είναι μία νέα συνάρτηση του s που λέγεται στρέψη και χαρακτηρίζει πόσο επίπεδη είναι μία καμπύλη. Αν η καμπύλη είναι επίπεδη, τα $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ ορίζουν ένα σταθερό επίπεδο σε κάθε σημείο s της καμπύλης και συνεπώς το $d\hat{\mathbf{n}}/ds$ θα κείται και αυτό σε τούτο το σταθερό επίπεδο που παράγεται από τα $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{n}}$. Αφού, μάλιστα, το $\hat{\mathbf{b}}$ είναι εκ κατασκευής κάθετο σε αυτό το επίπεδο, η στρέψη θα είναι μηδενική, $\tau = 0$.

Όσο για την προβολή α στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}$, θα είναι ίση με $-\kappa$. Το γεγονός αυτό βασίζεται στην παρατήρηση-τέχνασμα ότι το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ είναι σταθερά μηδέν σε όλα τα s . Άρα, επειδή

$$0 = \frac{d}{ds}(\hat{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}$$

είναι

$$\alpha = \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\kappa.$$

Έτσι θα έχουμε τη δεύτερη εξίσωση Frenet-Serret

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\kappa(s) \hat{\tau} + \tau(s) \hat{\mathbf{b}}. \quad (60)$$

Μένει τώρα να υπολογίσουμε το $d\hat{\mathbf{b}}/ds$ το οποίο είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{b}}$ και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως ο γραμμικός συνδυασμός:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \alpha' \hat{\boldsymbol{\tau}} + \beta' \hat{\mathbf{n}} .$$

Αλλά

$$\alpha' = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = 0$$

διότι $\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ πάντοτε, και συνεπώς με τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε προηγουμένως, έχουμε ότι:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 .$$

Ενώ,

$$\beta' = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\tau ,$$

απ' όπου τελικά προκύπτει η τρίτη εξίσωση Frenet-Serret:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau(s) \hat{\mathbf{n}} . \quad (61)$$

Οι τρεις εξισώσεις Frenet-Serret (59), (60), (61) σχηματίζουν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων ως προς s που προσδιορίζει την εξέλιξη του προσανατολισμού ενός καρτεσιανού πλαισίου που είναι απόλυτα προσκολλημένο στην τροχιά. Αν ορίσουμε σε κάθε σημείο της καμπύλης s το τοπικό διάνυσμα (το διάνυσμα του Darboux):

$$\boldsymbol{\omega} = \tau \hat{\boldsymbol{\tau}} + \kappa \hat{\mathbf{b}} ,$$

τότε το σύστημα Frenet-Serret (59), (60), (61) γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} , \\ \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{n}} , \\ \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{b}} , \end{aligned} \quad (62)$$

που δείχνει ότι το καρτεσιανό πλαίσιο σε κάθε σημείο της καμπύλης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και ότι η καμπυλότητα, κ , είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του καρτεσιανού πλαισίου περί τον άξονα $\hat{\mathbf{b}}$, ενώ η στρέψη, τ , είναι το μέτρο περιστροφής του καρτεσιανού πλαισίου περί τον άξονα του εφαπτομενικού διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. Στην περίπτωση της έλικας η καμπυλότητα και η στρέψη είναι σταθερές και ίσες με

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} , \quad \tau = \frac{h/(2\pi)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} .$$

Ας επανέλθουμε τώρα στην κίνηση της χάντρας επί της έλικας στο πεδίο βαρύτητας. Η εξίσωση της κίνησης θα είναι σε ενδογενείς συντεταγμένες:

$$m \frac{dv}{dt} \hat{\tau} + \frac{mv^2}{\rho} \hat{n} = -mg \mathbf{k} + \mathbf{T} . \quad (63)$$

όπου $\mathbf{T}$ είναι η άγνωστη αντίδραση, για την οποία έχουμε υποθέσει ότι κείται στο επίπεδο το κάθετο στο εφαπτομενικό διανυσμα, δηλαδή, $\mathbf{T} \cdot \hat{\tau} = 0$. Έτσι η $\mathbf{T}$ όντας κάθετη στην τροχιά μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{T} = T_n \hat{n} + T_b \hat{b} .$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (63) με την $\hat{\tau}$ προκύπτει η εξίσωση για τη κίνηση της χάντρας:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \mathbf{k} \cdot \hat{\tau} = -mg \sin \phi , \quad (64)$$

με

$$\sin \phi = \frac{(h/2\pi)}{b} = \frac{(h/2\pi)}{\sqrt{a^2 + h^2/(4\pi^2)}} ,$$

δηλαδή η χάντρα εκτελεί την ίδια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με τη κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεκλιμένο επιπέδο που σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση υπό την επίδραση ομογενούς και κατακόρυφου πεδίου βαρύτητας. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διότι η κυλινδρική επιφάνεια είναι ουσιαστικά επίπεδη και η έλικα γίνεται ευθεία αν αναπτυχθεί η κυλινδρική επιφάνεια, πάνω στην οποία γράφεται η έλικα, σε επίπεδη. Η ευθεία αυτή θα σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση, διότι σε κάθε μήκος περιφέρειας του κυλίνδρου, $2\pi a$, η z συντεταγμένη μεταβάλλεται κατά το βήμα της έλικας, h ($\tan \phi = h/(2\pi a)$).

Αν αρχικά, $t = 0$, η χάντρα είχε μηδενική ταχύτητα, $v(0) = 0$, και βρισκόταν στην αρχή των αξόνων, η ταχύτητα της χάντρας στο χρόνο t θα είναι:¹¹

$$v(t) = -g \sin \phi t ,$$

και συνεπώς:

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{b} \sin \phi t .$$

Εφόσον, $\theta(0) = 0$, $z(0) = 0$, η γωνιακή και η κατακόρυφη θέση της χάντρας θα είναι:

$$\theta(t) = -\frac{h/(2\pi)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} \frac{g}{2} t^2 , \quad z(t) = -\frac{h^2/(4\pi^2)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} \frac{g}{2} t^2 . \quad (65)$$

¹¹ Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι θεωρήσαμε ότι το s αυξάνεται καθώς προχωράμε προς τα επάνω στην έλικα, ενώ η κίνηση στο βαρυτικό πεδίο γίνεται προς τα κάτω.

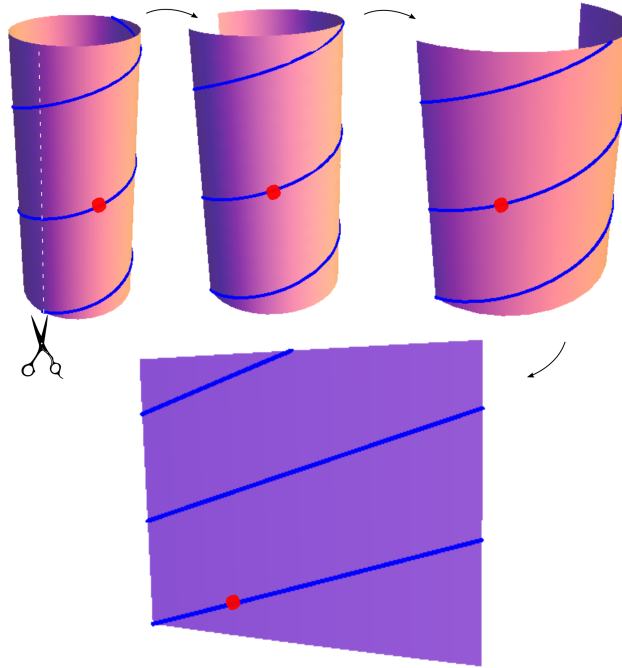
Η δεύτερη εξίσωση είναι ακριβώς η $z(t)$ θέση ενός σωματιδίου πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ . Έχοντας προσδιορίσει την κίνηση, η άγνωστη αντίδραση μπορεί να εξαχθεί άμεσα από την εξίσωση κίνησης (63):

$$\mathbf{T} = -mg \sin \phi \hat{\tau} + \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} \hat{\mathbf{n}} + mg \mathbf{k}. \quad (66)$$

Εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η $\mathbf{T}$ είναι κάθετη στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}$:¹²

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\tau} = 0,$$

και οι συνιστώσες της στην ακτινική κατεύθυνση, στην ϕ -κατεύθυνση και στην κατακόρυφη



Σχήμα 10: Αν κόψουμε κατά μήκος της εστιγμένης γραμμής την κυλινδρική επιφάνεια πάνω στην οποία περιελίσσεται η έλικα και ανοίξουμε την επιφάνεια αυτή, η έλικα θα μετατραπεί σε κεκλιμένο επίπεδο. Η κίνηση της χάντρας πάνω στην έλικα είναι ακριβώς αυτή που θα εκτελούσε πάνω στο ανοιγμένο κεκλιμένο επίπεδο. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην έλικα θα εμφανίζεται και μια κεντρομόλος δύναμη προς τον άξονα της έλικας, λόγω της περιστροφής της χάντρας.

¹²Η γραφή αυτή δεν είναι εξ ολοκλήρου στο ενδογενές σύστημα. Αν χρησιμοποιούσαμε αποκλειστικά τις ενδογενείς συντεταγμένες θα ήταν

$$\mathbf{T} = \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} \hat{\mathbf{n}} + mg \cos \phi \hat{\mathbf{b}}.$$

διεύθυνση:

$$\begin{aligned} T_\rho &= T_n = \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} , \\ T_z &= mg(1 - \sin \phi \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) = mg \cos^2 \phi , \\ T_\phi &= T_b \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = (m g \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) = -m g \cos \phi \sin \phi . \end{aligned} \quad (67)$$

Η z συνιστώσα της αντίδρασης είναι ακριβώς αυτή που θα βρίσκαμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με κλίση ϕ (βλ. σχήμα 10). Καθώς όμως η ταχύτητα της χάντρας μεγαλώνει πέφτοντας, και επειδή η χάντρα πρέπει να στρίψει ακολουθώντας την κυλινδρική επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται η έλικα, η T_n συνιστώσα μεγαλώνει και μάλιστα τετραγωνικά με το χρόνο t . Η αντίδραση λοιπόν στρέφεται ολοένα και περισσότερο προς τον άξονα με το πέρασμα του χρόνου (βλ. υποσημείωση 12 όπου η αντίδραση είναι εξ' ολοκλήρου γραμμένη στο ενδογενές σύστημα).

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 9

- Ο ρυθμός μεταβολής οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{a}}$ είναι ορθογώνιος στο διάνυσμα αυτό:

$$\frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 0 .$$

- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα αλλάζει μορφή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες λόγω της διαφορετικής μορφής που λαμβάνει η επιτάχυνση. Έτσι για παράδειγμα στις πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) , \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) .$$

- Ένα ιδιαίτερο σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό των ενδογενών συντεταγμένων $\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\mathbf{n}}$, οι οποίες παρακολουθούν την κίνηση ενός σωματιδίου. $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ είναι το εφαπτομενικό στην τροχιά διάνυσμα, $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κάθετο στην τροχιά διάνυσμα που μαζί με το $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ ορίζουν το στιγμιαίο επίπεδο της τροχιάς, ενώ $\hat{\mathbf{b}}$ είναι το τρίτο διάνυσμα κάθετο στα δύο πρώτα. Εφόσον η κίνηση είναι επίπεδη το $\hat{\mathbf{b}}$ δεν αλλάζει. Τα τρία αυτά διανύσματα αποτελούν το τριεδρο του Frenet που παρασύρεται και περιστρέφεται ως στερεό σώμα μαζί με το εν κινήσει σωματίδιο.

- Η ακτίνα καμπυλότητας μιας καμπύλης δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{1}{|d\boldsymbol{\tau}/ds|} .$$

- Ένα σώμα το οποίο υπόκειται σε δεσμεύσεις στην κίνησή του δέχεται δυνάμεις οι οποίες δεν υπόκεινται σε κάποιους γνωστούς νόμους. Στις περιπτώσεις αυτές θα

πρέπει να υποθέσουμε κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γι' αυτές τις δυνάμεις (βάσει παρατηρήσεων) προκειμένου να μπορέσουμε να λύσουμε τις δυναμικές εξισώσεις. Στην περίπτωση ολισθηρών (δίχως τριβές) δεσμεύσεων συνήθως υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο δεσμευμένο σωματίδιο είναι κάθετες στην κίνησή αυτού.

- Το εκκρεμές, όντας ένας μη ακριβώς αρμονικός ταλαντωτής, εμπεριέχει συχνότητες (αρμονικές) πολλαπλάσιες της θεμελιώδους. Όταν τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση το εκκρεμές, οι αρμονικές αυτές μπορεί να διεγερθούν οδηγώντας σε ένα αρκετά πλούσιο φάσμα συχνοτήτων και εν τέλει σε μη περιοδική κίνηση.