Κεφάλαιο 8
Εξωτερικό γινόμενο & περιστροφές

1 Εξωτερικό γινόμενο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ξεκινώντας από δύο διανυσματικά μεγέθη κατασκευάσαμε ένα βαθμωτό μέσω του ορισμού του εσωτερικού γινομένου. Δεν έχουμε όμως καταφέρει ακόμη να κατασκευάσουμε ένα νέο διάνυσμα από δύο άλλα διανύσματα. Υπάρχει ένας καταπληκτικός συνδυασμός των συνιστωσών δύο διανυσμάτων που δημιουργούν ένα νέο διάνυσμα. Θα δείξουμε ότι αν $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ και $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ είναι διανύσματα τότε η τριάδα

$$(a_{yz}, a_{zx}, a_{xy})$$

με στοιχεία τον ιδιόμορφο συνδυασμό γινομένων:

$$a_{yz} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_{zx} = a_z b_x - a_x b_z, \quad a_{xy} = a_x b_y - a_y b_x \ , \tag{1}$$

σχηματίζει ένα διάνυσμα που ονομάζεται *εξωτερικό γινόμενο* των δύο διανυσμάτων **a** και **b** και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \ .$$

Προσέξτε ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος προκύπτει από την προηγούμενη με κυκλική μετάθεση των γραμμάτων xyz, δηλαδή αντικαθιστώντας το x με το y, το y με το z και το z με το x.

Θα ελέγξουμε αν ο παραπάνω συνδυασμός μετασχηματίζεται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις. Θα θεωρήσουμε για απλότητα μια στροφή περί τον άξονα z κατά γωνία θ, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με την οποία οι συντεταγμένες (x, y, z) μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \ , \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \ , \\ z' &= z \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Έτσι σε αυτή τη στροφή οι συνιστώσες του **a** μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x\cos\theta + a_y\sin\theta, \\ a_{y'} &= a_y\cos\theta - a_x\sin\theta, \\ a_{z'} &= a_z, \end{aligned} \tag{3}$$

και οι συνιστώσες του **b** στις

$$\begin{aligned} b_{x'} &= b_x \cos\theta + b_y \sin\theta, \\ b_{y'} &= b_y \cos\theta - b_x \sin\theta, \\ b_{z'} &= b_z. \end{aligned} \tag{4}$$

Θα δείξουμες ότι και οι συνιστώσες του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ μετασχηματίζονται στις στροφές όπως ακριβώς και τα διανύσματα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις (3) και (4), έχουμε διαδοχικά ότι η πρώτη συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου είναι:

$$\begin{aligned} a_{y'z'} &= a_{y'}b_{z'} - a_{z'}b_{y'} \\ &= (a_y \cos\theta - a_x \sin\theta)b_z - a_z(b_y \cos\theta - b_x \sin\theta) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\cos\theta + (a_z b_x - a_x b_z)\sin\theta \\ &= a_{yz}\cos\theta + a_{zx}\sin\theta\ . \end{aligned}$$

Παρομοίως η δεύτερη συντεταγμένη είναι η:

$$a_{z'x'} = a_{zx}\cos\theta - a_{yz}\sin\theta,$$

και η τρίτη:

$$\begin{aligned} a_{x'y'} &= a_{x'}b_{y'} - a_{y'}b_{x'} \\ &= (a_x \cos\theta + a_y \sin\theta)(b_y \cos\theta - b_x \sin\theta) - (a_y \cos\theta - a_x \sin\theta)(b_x \cos\theta + b_y \sin\theta) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= a_{xy}. \end{aligned}$$

Συνεπώς οι συνιστώσες του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις

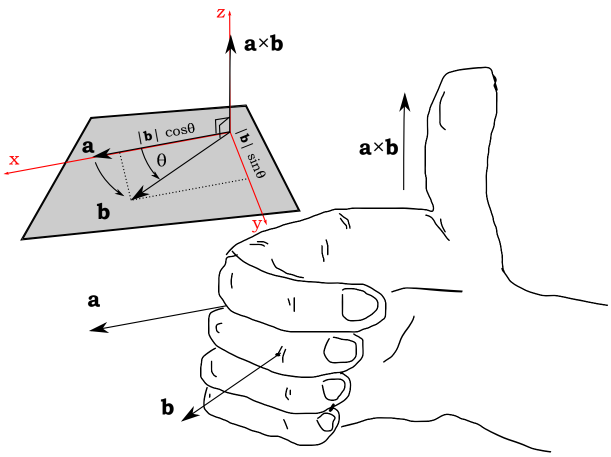
$$\begin{aligned} a_{y'z'} &= a_{yz}\cos\theta + a_{zx}\sin\theta, \\ a_{z'x'} &= a_{zx}\cos\theta - a_{yz}\sin\theta, \\ a_{x'y'} &= a_{xy}, \end{aligned} \tag{5}$$

και επομένως το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι πράγματι διάνυσμα. Για να είμαστε πιο ακριβείς το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι ένα ψευδοδιάνυσμα διότι δεν μετασχηματίζεται στους κατοπτρισμούς όπως οι μετατοπίσεις. Σε ένα μετασχηματισμό ομοτιμίας τα **a** και **b** αλλάζουν πρόσημο ενώ το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ παραμένει ίδιο.

Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα μόνο στον τριδιάστατο χώρο,[1] και αυτό γιατί στον τριδιάστατο χώρο κάθε επίπεδο του καρτεσιανού χώρου μπορεί να προσδιορισθεί με τον αντίστοιχο του κάθετο άξονα, το επίπεδο yz με τον άξονα x, το επίπεδο zx με τον άξονα y και

[1] Για την ακρίβεια μπορεί να αποδειχθεί ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να ορισθεί μόνο σε τριδιάστατο και επταδιάστατο χώρο. Ο Cayley έδωσε τη κατασκευή του αντίστοιχου εξωτερικού γινομένου στον επταδιάστατο χώρο, το οποίο ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του τριδιάστατου εξωτερικού γινομένου πλην της ταυτότητας του Jacobi (11) (βλ. το προσιτό άρθρο του Massey, W.S., 1983: *"Cross products in higher dimensional Euclidean spaces"* The American Mathematical Monthly, **90**, 697-701).

τέλος το επίπεδο xy με τον άξονα z. Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας του τριδιαστάτου χώρου οι συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου στα επίπεδα a_{yz}, a_{zx} a_{xy} μπορούν να αντιστοιχισθούν στους αντίστοιχους καρτεσιανούς άξονες, σχηματίζοντας μια τριάδα αριθμών η οποία με την κατάλληλη κατασκευή τελικά σχηματίζει διάνυσμα. Στην κατασκευή μάλιστα προσέξαμε οι συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου να είναι συνεπείς με τον προσανατολισμό των αξόνων που επιλέξαμε. Θα μπορούσαμε χωρίς κανένα πρόβλημα να είχαμε επιλέξει τον αντίθετο προσανατολισμό με τις συνιστώσες να προκύπτουν από κυκλική μετάθεση των xzy αντί των xyz. Αν ο χώρος ήταν διδιάστατος και ορίζαμε ως διανύσματα τις δυάδες αριθμών που μετασχηματίζονται όπως οι μετατοπίσεις στο επίπεδο, τότε στο επίπεδο xy αντιστοιχεί μόνο το $a_{xy} = a_x b_y - a_y b_x$ που ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος, αναλλοίωτο στις διδιάστατες στροφές (οι πρώτες δύο σχέσεις της (2) περιγράφουν τον διδιάστατο μετασχηματισμό στροφής στο επίπεδο xy). Επομένως, σε δύο διαστάσεις, το εξωτερικό γινόμενο διδιαστάτων διανυσμάτων ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος. Αν ο χώρος ήταν τετραδιάστατος, όπως στη σχετικότητα, με το χρόνο να αποτελει την τέταρτη διάσταση, θα είχαμε έξι επίπεδα και έξι συνιστώσες a_{xy}, a_{yz} , a_{zx}, a_{tx}, a_{ty} και a_{tz} οι οποίες, προφανώς, δεν μπορούν να αντιστοιχιστούν στις τέσσερις συνιστώσες ενός διανύσματος σε αυτό το χώρο και συνεπώς το εξωτερικό γινόμενο δεν μπορεί να ορίσει ένα διάνυσμα, τουλάχιστον έτσι όπως το ορίζουμε στον τριδιάστατο χώρο.[2]



Σχήμα 1: Η φορά του εξωτερικού γινομένου προσδιορίζεται από τον δεξιόστροφο κοχλία, ή το δεξί χέρι.

Επανερχόμενοι στις τρεις διαστάσεις, το εξωτερικό γινόμενο των **a** και **b** έχει μέτρο την επιφάνεια του παραλληλογράμου με πλευρές τα **a** και **b** και διεύθυνση την κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}, \tag{6}$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζεται από τα **a** και **b** και $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα **a** και **b** (βλ. σχήμα 1). Η φορά του εξωτερικού γινομένου δίνεται από την κατεύθυνση στην οποία θα προχωρήσει ένας δεξιόστροφος κοχλίας όταν στρέφεται

[2]Μπορεί όμως να ορίσει έναν αντισυμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης με 6 ανεξάρτητα στοιχεία.

από το $\mathbf{a}$ προς το $\mathbf{b}$ κατά τη συντομώτερη γωνία[3]. Για να αποδείξουμε την (6) επιλέγουμε ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων. Επειδή αφορά διανυσματικό μέγεθος αν αποδειχθεί ότι ισχύει η (6) σε ένα σύστημα αξόνων θα ισχύει σε όλα. Λαμβάνουμε το καρτεσιανό σύστημα με επίπεδο xy το επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και άξονα x στη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$. Σε αυτό το σύστημα τα διανύσματα έχουν συντεταγμένες $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ και από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου (1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta\, \hat{\mathbf{n}} \,, \tag{7}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ (σε αυτό το σύστημα αξόνων $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$). Εξ' αυτού συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{a}$ και στο $\mathbf{b}$, δηλαδή $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Το γεγονός ότι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι αυτό ενός παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, μας οδηγεί να ορίζουμε τις επιπέδες επιφάνειες (στον τριδιάστατο χώρο) ως διανύσματα κάθετα σε αυτές με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας. Η φορά του διανύσματος της επιφάνειας μπορεί να κοιτάζει είτε προς τη μια είτε προς την άλλη πλευρά αυτής. Συνήθως όταν έχουμε μια κλειστή επιφάνεια, το προς τα έξω μέρος αυτής θεωρείται ότι ορίζει την κατεύθυνσή κάθε στοιχειώδους κομματιού αυτής. Αλλιώς, αν η επιφάνεια δεν είναι κλειστή πρέπει να ορίσουμε τον προσανατολισμό της.

2 Αλγεβρικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες οι οποίες εύκολα αποδεικνύονται:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$,
4. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
5. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
6. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

Το εξωτερικό γινόμενο δύο ίδιων διανύσματων είναι το μηδενικό διάνυσμα. Αυτή η ιδιότητα καθώς και η αντισυμμετρικότητα του εξωτερικού γινομένου (ιδιότητα 2) το διαφοροποιούν από τα συνήθη γινόμενα και από το εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητα 3 είναι πολύ σημαντική διότι χαρακτηρίζει τη διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου: είναι διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, αφού είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα. Οι ιδιότητες 4 και 5 αποδεικνύουν ότι το εξωτερικό γινόμενο, όπως και το εσωτερικό, εξαρτώνται γραμμικά από τα διανύσματα που απαρτίζουν το γινόμενο. Η ιδιότητα 6 προκύπτει αμέσως από την

[3] Σκεφθείτε όταν η γωνία είναι π αν εμφανίζεται καμιά διχογνωμία στον διανυσματικό χαρακτήρα του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

εξίσωση (7) δεδομένου ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των **a** και **b**, και είναι κατ'ουσίαν αναδιατύπωση της $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι η παράγωγος του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων που εξαρτώνται από το χρόνο ικανοποιεί τον συνήθη κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \, .$$

Χρήσιμα εξωτερικά γινόμενα είναι τα γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \, , \;\; \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \, , \;\; \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \, , \;\; \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,$$

ενώ

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \, , \;\; \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \, , \;\; \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \, .$$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων το εξωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ προκύπτει, κάνοντας χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, ότι είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \, , \end{aligned}$$

αποτέλεσμα σύμφωνο με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Η παραπάνω έκφραση μάς επιτρέπει να εκφράσουμε το εξωτερικό γινόμενο υπό τη μορφή μιας ορίζουσας:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \, . \tag{8}$$

3 Τριπλά γινόμενα

Τρία διανύσματα μπορούν να ορίσουν τα εξής τριπλά γινόμενα:

i. $\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

ii. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

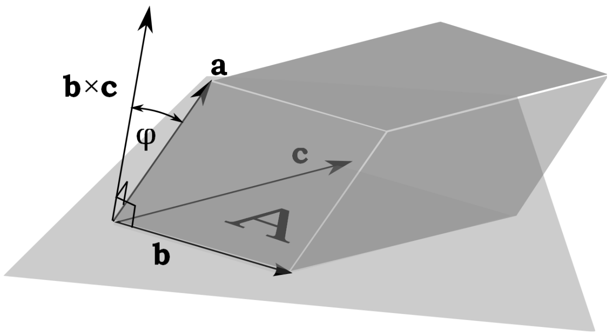
iii. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

Το πρώτο είναι είναι διάνυσμα, το δεύτερο είναι ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος διότι είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος **a** με το ψευδοδιάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ και το τρίτο είναι διάνυσμα διότι είναι το εξωτερικό γινόμενο διανύσματος με το ψευδοδιάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των τριπλών γινομένων (ii) και (iii).

Υπολογίζουμε πρώτα το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Αν σχηματίσουμε το παραλληλεπίπεδο με πλευρές τα **b**, **c** και **a** (βλ. σχήμα 2) τότε το $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο **b**, **c** και έχει μέτρο A, το εμβαδό της βάσης του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Αν ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ με το $\mathbf{a}$, το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι $|\mathbf{a}|\cos\phi$ και το τριπλό γινόμενο ισούται με τον όγκο του παραλληλεπίπεδου $V = A|\mathbf{a}|\cos\phi$ διότι:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos\phi = A|\mathbf{a}|\cos\phi = V\ .$$

Συνεπώς, επειδή το παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ θα είναι το ίδιο και



Σχήμα 2: Το $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ αναπαριστά τον (προσανατολισμένο) όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα ρία διανύσματα.

θα έχει τον ίδιο όγκο, αν αναδιευθετήσουμε τα τρία αυτά διανύσματα, όλα τα τριπλά γινόμενα που προέρχονται από κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων, ώστε να παραμείνει το ίδιο πρόσημο στα αντίστοιχα τριπλά γινομένα των συνιστωσών των διανυσμάτων,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ , \tag{9}$$

είναι ίσα. Αυτή η ιδιότητα φαίνεται καθαρά αν γραφεί το τριπλό γινόμενο ως

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \ = \ \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\ , \tag{10}$$

χρησιμοποιώντας την γραφή του εξωτερικού γινομένου στη μορφή της ορίζουσας (8). Επειδή η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει όταν οι σειρές (ή/και οι κολώνες) της ορίζουσας μετατεθούν κυκλικά προκύπτει η ταυτότητα (9).

Ερχόμαστε τώρα στο διανυσματικό τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ το οποίο αλλάζει στις κυκλικές μεταθέσεις των διανυσμάτων. Μάλιστα οι κυκλικές μεταθέσεις ικανοποιούν τη σημαντική ταυτότητα του Jacobi που αφορά το άθροισμα των κυκλικών μεταθέσεων αυτού του γινομένου:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0\ . \tag{11}$$

Η ταυτότητα του Jacobi προκύπτει από τη σημαντική ταυτότητα:

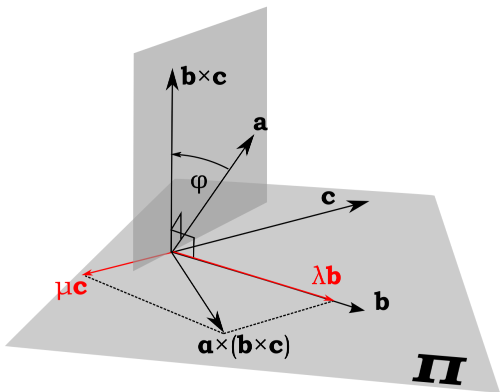
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\ , \tag{12}$$

την οποία θα αποδείξουμε διότι η αποδεικτική μέθοδος είναι και ενδιαφέρουσα αλλά και μεθοδολογικά χρήσιμη στη φυσική.

Απόδειξη: Αν τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι στην ίδια ευθεία και $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c}$ τότε η ταυτότητα (12) είναι αληθής. Μένει να αποδειχθεί λοιπόν η ταυτότητα όταν τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και ορίζουν κάποιο επίπεδο. Έστω Π το επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ (βλ. σχήμα 3). Το διάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π, συνεπώς το διάνυσμα $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ που είναι κάθετο στο $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ θα κείται αναγκαστικά στο επίπεδο Π. Επειδή κάθε διάνυσμα στο επίπεδο Π μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$, το τριπλό εξωτερικό γινόμενο θα είναι:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c} \,, \tag{13}$$

με κατάλληλα λ και μ, που πρέπει να είναι αμφότερα βαθμωτά μεγέθη ούτως ώστε η (13)



Σχήμα 3: Το τριπλό εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ είναι ένα διάνυσμα που κείτεται στο επίπεδο των $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Επομένως μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$.

να είναι ισότης μεταξύ διανυσμάτων (το $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ είναι διάνυσμα, διότι είναι το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{a}$ με το ψευδο-διάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$). Επιπλέον το αριστερό μέλος της (13) έχει γραμμική εξάρτηση από το $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και από το $\mathbf{c}$, συνεπώς το λ πρέπει να είναι μία βαθμωτή συνάρτηση με γραμμική εξάρτηση και από το $\mathbf{a}$ και το $\mathbf{c}$, και δεν μπορεί να εξαρτάται από το $\mathbf{b}$. Η μόνη τέτοια βαθμωτή συνάρτηση είναι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.[4] Συνεπώς είναι $\lambda = \alpha_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ όπου α_1 μία σταθερά. Ομοίως καταλήγουμε ότι $\mu = \alpha_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, όπου α_2 μία άλλη σταθερά. Έχουμε αποδείξει ήδη ότι

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \alpha_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + \alpha_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \,, \tag{14}$$

και απομένει να προσδιορίσουμε τις σταθερές α_1 και α_2 οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τα διανύσματα και το σύστημα αναφοράς. Για να υπολογίσουμε την α_1 επιλέγουμε: $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}$

[4] Η $|\mathbf{a}||\mathbf{c}|$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}$ αφού $|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| \neq |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|$.

και $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, και με αυτά τα διανύσματα το αριστερό σκέλος της (14) είναι:

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \,,$$

ενώ το δεξί: $\alpha_1 \mathbf{k}$. Άρα $\alpha_1 = 1$. Ομοίως επιλέγοντας, $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ και $\mathbf{c} = \mathbf{j}$, το αριστερό σκέλος της (14) είναι

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \,,$$

ενώ το δεξί $\alpha_2\, \mathbf{j}$. Συνεπώς $\alpha_2 = -1$. Άρα η ταυτότητα (12) είναι αληθής.

4 Στροφορμή

Το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται συχνά στη Φυσική για την παραγωγή νέων διανυσματικών μεγεθών από άλλα. Τα νέα αυτά διανύσματα παρουσιάζουν ξεχωριστές ιδιότητες και μέσω αυτών μπορούμε να μελετάμε τη δομή και την εξέλιξη διαφόρων φυσικών συστημάτων.

Έτσι ορίζουμε ως στροφορμή ενός σωματιδίου το ψευδοδιάνυσμα:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \,,$$

όπου $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ η ορμή του σωματιδίου και ως ροπή δύναμης το ψευδοδιάνυσμα:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,.$$

Παρατηρήστε ότι ενώ η ορμή δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής των αξόνων (παρά μόνο από το σύστημα αναφοράς, όσον αφορά στο $\mathbf{p}$), η στροφορμή και η ροπή εξαρτώνται από την επιλογή της αρχής των αξόνων, αφού αν αλλάξει η αρχή των αξόνων θα αλλάξει το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ του σωματιδίου. Επομένως τα δύο νέα αυτά μεγέθη δεν έχουν απόλυτο νόημα σε κάποιο σύστημα αναφοράς και πρέπει να μας δίνεται η αρχή μέτρησης του $\mathbf{r}$ προκειμένου να τα υπολογίσουμε.

Αντίστοιχα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \,, \tag{15}$$

για την ορμή ενός σωματιδίου, έχουμε και έναν νόμο για την στροφορμή του σωματιδίου

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \,, \tag{16}$$

ο οποίος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την (15) με το $\mathbf{r}$ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} - \mathbf{v} \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \,.$$

Στην παραπάνω σχέση το $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ επειδή τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{p}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα.

Θα έλεγε κανείς ότι αφού η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την πρώτη εμπεριέχει την ίδια πληροφορία για την κίνηση του σωματιδίου. Ωστόσο οι διατηρήσεις των δύο μεγεθών $\mathbf{p}$ και $\mathbf{L}$ μπορεί να έχουν διαφορετικό φυσικό αίτιο. Από την (15) και την (16) προκύπτει ο νόμος διατήρησης της ορμής $\mathbf{p}$ του σωματιδίου όταν $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ και της στροφορμής $\mathbf{L}$ όταν $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$. Όμως η ροπή δεν είναι μηδενική μόνο στην περίπτωση που είναι μηδενική η δύναμη. Η ροπή μηδενίζεται και όταν η δύναμη έχει τη διεύθυνση της $\mathbf{r}$, είναι δηλαδή κεντρική δύναμη $\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε διατήρηση της στροφορμής του σωματιδίου όταν σε αυτό ασκούνται κεντρικές δυνάμεις, χωρίς να διατηρείται η ορμή του σωματιδίου. Για παράδειγμα στην κίνηση της Γης γύρω απο τον Ήλιο, κατά πολύ μεγάλη προσέγγιση, η στροφορμή της Γης ως προς το κέντρο του Ήλιου είναι σταθερή ενώ η ορμή της Γης αλλάζει καθώς αυτή γυρίζει γύρω από τον Ήλιο.

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων, η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε περιορισμό της τροχιάς του σωματιδίου σε ένα επίπεδο και σε προσδιορισμό της φοράς της περιστροφής περί το κέντρο της δύναμης. Το επίπεδο της τροχιάς είναι το επίπεδο που είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα της στροφορμής. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ σύμφωνα με τον οποίο τα διανύσματα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$ βρίσκονται πάντοτε στο επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

5 Στροφές περί άξονα-Κυκλική κίνηση

Θεωρήστε ότι η θέση στο χώρο, $\mathbf{r}(\epsilon)$, είναι συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, ϵ, και μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \quad , \tag{17}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα. Αν ολοκληρώσουμε την (17) μπορούμε να προσδιορίσουμε το $\mathbf{r}(\epsilon)$ στο οποίο θα εξελιχθεί το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{r}(0)$[5], όταν η παράμετρος λάβει τη τιμή ϵ. Υπό αυτή την έννοια η (17) αποτελεί τη διαφορική μορφή του μετασχηματισμού $R(\epsilon)$, ο οποίος για κάθε ϵ απεικονίζει κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(0)$ στο $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}(\epsilon)$:

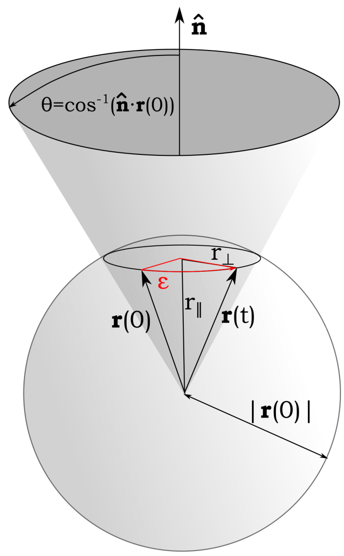
$$\mathbf{r} \xrightarrow{R(\epsilon)} \mathbf{r}' \ . \tag{18}$$

Ο μετασχηματισμός $R(\epsilon)$[6] έχει συνεχή (και διαφορίσιμη) εξάρτηση από το ϵ, το οποίο ονομάζεται και παράμετρος του μετασχηματισμού. Για $\epsilon = 0$ ο μετασχηματισμός είναι ταυτοτικός, $R(0) = I\cdot$ απεικονίζει, δηλαδή, κάθε αρχική θέση στον εαυτό της: $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$, ενώ, καθώς το ϵ μεταβάλλεται συνεχώς, το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(\epsilon)$ διαγράφει μία καμπύλη στο χώρο με αρχικό

[5]Προσέξτε ότι η διαφορική εξίσωση είναι πρώτης τάξης, επομένως μας αρκεί μια αρχική συνθήκη.

[6]Παρουσιάζουμε εδώ μια εναλλακτική εικόνα της επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης, όπου η λύση αποτελεί απεικόνιση μιας αρχικής κατάστασης στην τελική, μέσω μιας παραμέτρου η οποία υπεισέρχεται ως παράμετρος του μετασχηματισμού που εκτελεί την απεικόνιση.

σημείο το $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0)$. Ως παράμετρος του μετασχηματισμού, ϵ, θα μπορούσε να ληφθεί ο χρόνος, t, και μέσω αυτής της παραμέτρου το $\mathbf{r}(t)$ είναι η τροχιά σωματιδίου με αρχική θέση το $\mathbf{r}(0)$. Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι ποιός μετασχηματισμός κρύβεται πίσω από την (17), ή ισοδυνάμως τι τροχιά διαγράφει η θέση σωματιδίου που ικανοποιεί την (17);



Σχήμα 4: Η κίνηση διεξάγεται στην τομή μιας σφαίρας ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$ και ενός κώνου με άνοιγμα $\cos^{-1}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(0))$. Μάλιστα η κίνηση σε αυτό τον κύκλο γίνεται με σταθερή ταχύτητα ως προς την παράμετρο ϵ.

Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός $R(\epsilon)$ που κατασκευάζει λύσεις της (17) αντιστοιχεί σε περιστροφή του $\mathbf{r}$ περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$, κατά γωνία ϵ (βλ. σχήμα 4). Καταρχάς, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν την (17) είναι ο κύκλος που προκύπτει από την τομή σφαίρας ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$ και της κωνικής ειπφανείας περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$ με γωνιακό άνοιγμα, θ, τέτοιο ώστε $\cos\theta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(0)/|\mathbf{r}(0)|$ (βλ. σχήμα 4). Ας δούμε γιατί: Παρατηρούμε πρώτα ότι το μέτρο του διανύσματος παραμένει σταθερό στο μετασχηματισμό $R(\epsilon)$ για κάθε ϵ, δηλαδή είναι:

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}| \; , \tag{19}$$

επειδή:

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{r}|^2}{d\epsilon} &= 2\,\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \\ &= 2\,\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{0} \; . \end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε ϵ:

$$|\mathbf{r}(0)| = |\mathbf{r}(\epsilon)| \; .$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbf{r}(\epsilon)$ περιορίζεται σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$. Επίσης η γωνία, θ, που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ με το $\mathbf{r}$ παραμένει και αυτή σταθερή κατά το μετασχηματισμό, αφού $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cos\theta = |\mathbf{r}(0)| \cos\theta$ και

$$\begin{aligned} \frac{d\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{d\epsilon} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{0} \, . \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια το $\mathbf{r}(\epsilon)$ βρίσκεται σε μια κωνική επιφάνεια με άξονα το $\hat{\mathbf{n}}$ και άνοιγμα τη σταθερή αυτή γωνία θ. Από τις δύο παραπάνω διατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{r}(\epsilon)$ κινείται επί της κυκλικής τομής των δύο αυτών επιφανειών.

Η σταθερή ποσότητα $r_{\parallel} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$ είναι το μήκος της συνιστώσας του $\mathbf{r}$ κατά μήκος του $\hat{\mathbf{n}}$. Επίσης σταθερο είναι και το $r_{\perp} = |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{r}| \sin\theta$ (η ακτίνα του κύκλου επί του οποίου βρίσκεται το $\mathbf{r}$) που είναι το μήκος της συνιστώσας του $\mathbf{r}$ στο επίπεδο το κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$. Το διάνυσμα θέσης, λοιπόν, διαγράφει την κυκλική καμπύλη:

$$\mathbf{r} = r_{\parallel}\, \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{r}_{\perp} \, , \tag{20}$$

όπου, $\mathbf{r}_{\perp}$, η σταθερού μέτρου συνιστώσα του $\mathbf{r}$ στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός (17) είναι μετασχηματισμός στροφής του $\mathbf{r}$ περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$. Μένει να δείξουμε ότι είναι μετασχηματισμός στροφής κατά γωνία ϵ δηλαδή ότι το $\mathbf{r}_{\perp}$ κατά τον μετασχηματισμό $R(\epsilon)$ διαγράφει κυκλικό τόξο μήκους $\epsilon\ r_{\perp}$ (βλ. σχήμα 4). Προς τούτο υπολογίζουμε το διαφορικό μήκος τόξου που διαγράφεται κατά τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon}\, (d\epsilon)^2 \\ &= |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}|^2\, (d\epsilon)^2 \\ &= |\mathbf{r}|^2 \sin^2\theta\, (d\epsilon)^2 \\ &= r_{\perp}^2\, (d\epsilon)^2 \, . \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{ds}{d\epsilon} = r_{\perp} \, , \tag{21}$$

και το συνολικό μήκος τόξου που διαγράφει το άκρο του $\mathbf{r}$ κατά τον μετασχηματισμό είναι:

$$s = \epsilon\, r_{\perp} \, . \tag{22}$$

Αν ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\boldsymbol{\xi}$ εξελίσσεται με το χρόνο t[7], σύμφωνα με την

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi} \, , \tag{23}$$

[7]Η διαφορική αυτή εξίσωση εμφανίζεται συχνά σε θεμελιώδη προβλήματα Φυσικής, οπότε καθίσταται ιδιαίτερα χρήσιμο να γνωρίζει κανείς τη λύση της, κατ' αναλογίαν με την εκθετική συνάρτηση στα γραμμικά προβλήματα.

μπορούμε να μετασχηματίσουμε αυτή την εξίσωση στη βασική της μορφή (17) (που αναλύσαμε παραπάνω) ως ακολούθως:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \omega \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \times \boldsymbol{\xi} \xrightarrow{\epsilon = t\omega} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\epsilon} = \hat{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi} \tag{24}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}_\omega = \boldsymbol{\omega}/\omega$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{\omega}$. Επομένως το διάνυσμα ξ διαγράφει έναν κύκλο κάθετο στο ω, σε απόσταση $\xi_\parallel = \boldsymbol{\xi}(0) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\xi}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega$ από την αρχή μέτρησης του $\boldsymbol{\xi}$ με γωνιακή ταχύτητα $\epsilon/t = \omega$.

Στην περίπτωση που το υπό εξέταση χρονοεξαρτώμενο διάνυσμα είναι η ταχύτητα ενός σωματιδίου, η τροχιά που διαγράφει το άκρο της ταχύτητας ονομάζεται *οδογράφος*. Την ιδέα της οδογράφου την σκέφτηκε για πρώτη φορά ο Hamilton, και την χρησιμοποίησε προκειμένου να εξαγάγει την ίδια την τροχιά του σωματιδίου. Στην περίπτωση που η ταχύτητα υπακούει σε μια σχέση σαν την (23) η οδογράφος είναι ένας κύκλος. Την παρατήρηση αυτή θα την εκμεταλλευτούμε στο εδάφιο που ακολουθεί.

6 Κίνηση σωματιδίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, μιας και η μαγνητική δύναμη εμφανίζεται υπό τη μορφή εξωτερικού γινομένου. Στη συνέχεια θα δούμε πώς η εισαγωγή και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου (μαζί με το μαγνητικό) οδηγεί σε λύσεις της ίδιας μορφής με αυτήν που θα βρούμε μόνο για το μαγνητικό πεδίο.

Η μαγνητική δύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα κινούμενο σημειακό φορτίο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,, \tag{25}$$

οπότε η δυναμική εξίσωση του Νεύτωνα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,. \tag{26}$$

Ορίζοντας το νέο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{q}{m}\mathbf{B}$$

η εξίσωση που ικανοποιεί η ταχύτητα είναι

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}\,. \tag{27}$$

Από το προηγούμενο εδάφιο μάθαμε ότι μια τέτοια εξίσωση έχει ως λύση μια κυκλική τροχιά (οδογράφο) για την $\mathbf{v}$ σε επίπεδο κάθετο στο $\boldsymbol{\Omega}$ και σε απόσταση $\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\Omega}/\Omega$ από την αρχή των διανυσμάτων ταχύτητας. Θα προτιμήσουμε, όμως, μια εναλλακτική μέθοδο πολύ χρήσιμη στη Φυσική την οποία χρησιμοποιήσαμε και στην ανάλυση των διεγερμένων αρμονικών ταλαντωτών: Την μιγαδοποίηση των εξισώσεων.

Γνωρίζοντας τη δράση του εξωτερικού γινομένου είναι φρόνιμο να γράψουμε την ταχύτητα ως

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = [(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}] + [\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}] = (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}} \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{B}}) \ ,$$

όπου $\hat{\mathbf{B}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{B}$. Στην τελευταία ισότητα επικαλεστήκαμε τη σχέση του τριπλού γινομένου (12). Η $\mathbf{v}_{\parallel}$ διατηρείται αφού $\mathbf{B} \times \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{0}$, ενώ για την $\mathbf{v}_{\perp}$ θα έχουμε

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp} \ . \tag{28}$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη αυτή εξίσωση εξελίσσεται στο επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{B}$, αφού και η $\mathbf{v}_{\perp}$ και η μεταβολή της $\mathbf{v}_{\perp}$, που εκφράζεται από το διάνυσμα $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp}$, βρίσκονται στο επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{B}$. Θα ορίσουμε λοιπόν το επίπεδο αυτό ως το $x - y$ επίπεδο με τον άξονα z στραμένο στην κατεύθυνση του $\mathbf{\Omega}$ και θα έχουμε για τις δύο συνιστώσες της $\mathbf{v}_{\perp}$:

$$\dot{v}_x = -\Omega v_y \ , \tag{29}$$

$$\dot{v}_y = +\Omega v_x \ . \tag{30}$$

Η συμπλεκτική αυτή μορφή των εξισώσεων (παρόμοιά της θα δούμε στο Κεφάλαιο 13 όταν θα εξετάσουμε την κίνηση σώματος υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης) μας "ωθεί" να δοκιμάσουμε το μιγαδικό της alter ego:

$$\dot{\zeta} = i\Omega\zeta \tag{31}$$

με $\zeta = v_x + i\ v_y$. Η γραμμικότητα των εξισώσεων (30) έχει εμφανιστεί τώρα στη μιγαδική της παραλλαγή καθαρή και αποσυμπλεγμένη. Η λύση της (31) είναι η

$$\zeta(t) = \zeta_0\ e^{i\Omega t}$$

με $\zeta_0 = v_x(0) + iv_y(0)$. Η ταχύτητα $\mathbf{v}_{\perp}$ λοιπόν διαγράφει ένα κύκλο στο επίπεδο $x - y$ με μέτρο $|\mathbf{v}_{\perp}(0)|$, και με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω. Η φορά διαγραφής της κυκλικής οδογράφου είναι μάλιστα αυτή του $\mathbf{\Omega}$ δηλαδή αντίθετη του $\mathbf{B}$ (για θετικό q). Αν χρησιμοποιήσουμε και την πληροφορία της σταθερής $\mathbf{v}_{\parallel}$, η οδογράφος είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο $x - y$ αλλά σε απόσταση $\mathbf{v}_{\parallel}$ από αυτό.

Ας υπολογίσουμε τώρα και τη θέση του φορτισμένου σωματιδίου από την εξέλιξη της ταχύτητας:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t')\ dt' \ .$$

Δεν θα ήταν παράλογο να διαχωρίσουμε και πάλι την κίνηση σε παράλληλες και κάθετες στην $\mathbf{\Omega}$ συνιστώσες. Έτσι

$$\mathbf{r}_{\parallel}(t) = z(t)\hat{\mathbf{z}} = (z(0) + v_z(0)t)\hat{\mathbf{z}} \tag{32}$$

και

$$
\begin{aligned}
w(t) = x(t) + iy(t) &= x(0) + iy(0) + \int_0^t \zeta(t')\, dt' \\
&= x(0) + iy(0) + \frac{v_x(0) + iv_y(0)}{i\Omega}(e^{i\Omega t} - 1)\ . \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Χωρίζοντας την παραπάνω σχέση σε πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + \frac{v_y(0)}{\Omega}(\cos(\Omega t) - 1) + \frac{v_x(0)}{\Omega}\sin(\Omega t)\ , \qquad (34)\\
y(t) &= y(0) - \frac{v_x(0)}{\Omega}(\cos(\Omega t) - 1) + \frac{v_y(0)}{\Omega}\sin(\Omega t)\ . \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Με μια επιπλέον αναδιάταξη για να διαχωριστούν οι σταθεροί όροι από τους ταλαντωτικούς

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(0) - \frac{v_y(0)}{\Omega} + \left[\frac{v_y(0)}{\Omega}\cos(\Omega t) + \frac{v_x(0)}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]\ , \qquad (36)\\
y(t) &= y(0) + \frac{v_x(0)}{\Omega} + \left[-\frac{v_x(0)}{\Omega}\cos(\Omega t) + \frac{v_y(0)}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]\ . \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Οι όροι εντός των αγκυλών στις δύο παραπάνω σχέσεις είναι αρμονικοί ταλαντωτικοί όροι του ίδιου μέτρου και έχουν διαφορά φάσης $\pi/2$ αφού

$$
\begin{aligned}
\frac{v_y(0)}{\Omega}\cos(\Omega t) + \frac{v_x}{\Omega}\sin(\Omega t) &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega}[\cos\phi\cos(\Omega t) + \sin\phi\sin(\Omega t)] \\
&= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega}\cos(\Omega t - \phi)\ , \qquad (38)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
-\frac{v_x(0)}{\Omega}\cos(\Omega t) + \frac{v_y}{\Omega}\sin(\Omega t) &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega}[-\sin\phi\cos(\Omega t) + \cos\phi\sin(\Omega t)] \\
&= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega}\sin(\Omega t - \phi)\ , \qquad (39)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη βοηθητική γωνία ϕ που προσδιορίζεται από τις τριγωνομετρικές σχέσεις

$$
\cos\phi = \frac{v_y(0)}{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}} \quad , \quad \sin\phi = \frac{v_x(0)}{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}\ .
$$

Επομένως η κίνηση επί του επιπέδου $x - y$ του κάθετου στο **B** είναι κύκλος με κέντρο το

$$
(x_c, y_c) = \left(x(0) - \frac{v_y(0)}{\Omega}, y(0) + \frac{v_x(0)}{\Omega}\right)
$$

και ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega} \ .$$

Αν συμπεριλάβουμε και την παράλληλη στο **B** ομαλή κίνηση θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c + R\cos(\Omega t - \phi) \\ y(t) &= y_c + R\sin(\Omega t - \phi) \\ z(t) &= z(0) + v_z(0)t. \end{aligned} \tag{40}$$

Αν θέλουμε τώρα να επανέλθουμε σε εκφράσεις ανεξάρτητες συστήματος αναφοράς παρατηρούμε ότι

$$(0, 0, v_z(0)) = \frac{\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{\Omega}}{\Omega^2}\mathbf{\Omega} \ ,$$

$$(v_x(0), v_y(0), 0) = \mathbf{v}(0) - \frac{\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{\Omega}}{\Omega^2}\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}(0) \times \mathbf{\Omega})}{\Omega^2} \ ,$$

(βάσει της (12)) και

$$(v_y(0), -v_x(0), 0) = \frac{\mathbf{v}(0) \times \mathbf{\Omega}}{\Omega} \ .$$

Η διανυσματική λοιπόν μορφή της κίνησης είναι

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) - \mathbf{a} + \mathbf{a}\cos(\Omega t) + \mathbf{b}\sin(\Omega t) + \mathbf{c}\ t \tag{41}$$

με

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(0) \times \mathbf{\Omega}}{\Omega^2} \ ,$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}(0) \times \mathbf{\Omega})}{\Omega^3}$$

και

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{v}(0)}{\Omega^2}\mathbf{\Omega} \ .$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια παραμετρική εξίσωση κυλινδρικής έλικας η οποία διαγράφεται με σταθερή ταχύτητα ως προς το χρόνο t. Η ακτίνα της είναι

$$R = |\mathbf{b}|,$$

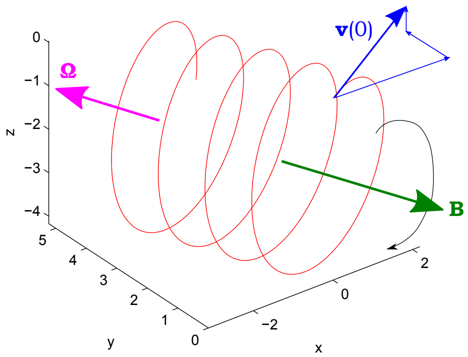
το βήμα της είναι

$$h = |\mathbf{c}|T = 2\pi|c|/\Omega$$

η γωνιακή της περιστροφή είναι

$$\Omega = q|\mathbf{B}|/m$$

και έχει τη φορά περιστροφής του δεξιόστροφου κοχλία που προχωρά κατά το $-\mathbf{B}$ για θετικά q και του $\mathbf{B}$ για αρνητικά q. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω κατασκευή της γνωστής μας έλικας σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, ακολούθησε όχι την απλούστερη οδό, προκειμένου ο αναγνώστης να εξασκηθεί στα διανύσματα και τις πράξεις αυτών. Η έλικα προκύπτει πολύ πιο απλά αν στρέψουμε τον άξονα z κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου όπως κάναμε στην αρχή προτού γενικεύσουμε διανυσματικά την κατασκευή.



Σχήμα 5: Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια κυλινδρική έλικα. Στο διάγραμμα φαίνονται τα $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{v}(0)$ και οι 3 καρτεσιανές συνιστώσες του $\mathbf{v}(0)$. Τα 3 διανύσματα έχουν αυθαίρετες συνιστώσες. Η φορά περιστροφής είναι αυτή του $\mathbf{\Omega}$.

Αν εκτός από το μαγνητικό πεδίο υπήρχε και ηλεκτρικό (ομογενές και αυτό) η εξίσωση κίνησης που θα επιχειρούσαμε να λύσουμε θα ήταν η

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{42}$$

και ακολουθώντας τη συνοπτική συμβολιστική που χρησιμοποιήσαμε στο μαγνητικό πεδίο

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{H} \tag{43}$$

με $\mathbf{H} = q\mathbf{E}/m$. Η τελευταία αυτή έκφραση αν και διαθέτει στο ομογενές της μέρος τη γραμμικότητα της αντίστοιχης εξίσωσης για το μαγνητικό πεδίο, το μη ομογενές της μέρος δύσκολα στριμώχνεται στο καλούπι παράλληλων και κάθετων μιγαδικών συνιστωσών. Για το λόγο αυτό θα ακολουθήσουμε ένα τέχνασμα προκειμένου να απαλλαγούμε από την πρόσθετη δυσκολία που επέφερε η παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου. Αντί να γράψουμε την εξίσωση για το $\mathbf{v}$ θα τη γράψουμε για το $\mathbf{v} - \mathbf{U}$ με $\mathbf{U}$ κάποιο κατάλληλο σταθερό διάνυσμα που θα προσδιορίσουμε αργότερα. Έτσι

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{U}) = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{U}) + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H}\,. \tag{44}$$

Η εξίσωσή μας θα απλοποιούνταν εξαιρετικά (και τη λύση της θα μπορούσαμε να τη διαβάσουμε στις προηγούμενες παραγράφους που αναφέρονταν σε αμιγές μαγνητικό πεδίο) αν

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

Δυστυχώς κάτι τέτοιο δεν ειναι εν γένει εφικτό αφού το $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{\Omega}$ και επομένως δεν μπορεί να σβήσει το τυχαίο $\mathbf{H}$ (εκτός και αν τα $\mathbf{\Omega}$ και $\mathbf{H}$ που έχουν τις διευθύνσεις των δύο πεδίων ήταν εξαρχής κάθετα). Θα συμβιβαστούμε λοιπόν φροντίζοντας να σβήσουμε μια από τις συνιστώσες του $\mathbf{H}$ ελπίζοντας αυτή που θα μείνει να μην είναι ιδιαίτερα προβληματική στην περαιτέρω ανάλυση. Δεδομένου του $\mathbf{\Omega}$ είναι λογικό να αναλύσουμε το $\mathbf{H}$ σε παράλληλη και κάθετη συνιστώσα στο $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{\Omega}}{\Omega^2}\mathbf{\Omega} + \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{\Omega}}{\Omega^2}\mathbf{\Omega}\right) .$$

Έτσι θα ρυθμίσουμε καταλλήλως το $\mathbf{U}$ ώστε να "φαγωθεί" η κάθετη συνιστώσα $\mathbf{H}_{\perp}$:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{0} .$$

Θα μας βοηθήσει ο εναλλακτικός τρόπος που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για να γράψουμε το διάνυσμα $\mathbf{b}$ στη γενική εξίσωση κίνησης στο μαγνητικό πεδίο (41). Συγκεκριμένα

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{\Omega})}{\Omega^2} ,$$

οπότε θέλουμε

$$\mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{U} + \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{\Omega}}{\Omega^2}\right) = \mathbf{0} .$$

Αυτή λύνεται αυτόματα αν θέσουμε

$$\mathbf{U} = -\frac{\mathbf{H} \times \mathbf{\Omega}}{\Omega^2} = \frac{\mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}}{\Omega^2} . \tag{45}$$

Μέσω της νέας αυτής διανυσματικής ποσότητας η εξίσωση κίνησης έχει λάβει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{H}_{\parallel} . \tag{46}$$

με $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$. Η μόνη διαφοροποίηση της νέας αυτής εξίσωσης από την (28) είναι η $\mathbf{H}_{\parallel}$ συνιστώσα η οποία ευτυχώς έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{\Omega}$ και επομένως δεν θα αλλοιώσει το δύσκολο κομμάτι της εξίσωσης που αφορά τη στροφή της κάθετης συνιστώσας του $\mathbf{v}'$ στο $\mathbf{\Omega}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\dot{\mathbf{v}}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel} \tag{47}$$

και

$$\dot{\mathbf{v}}'_\perp = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_\perp \ . \tag{48}$$

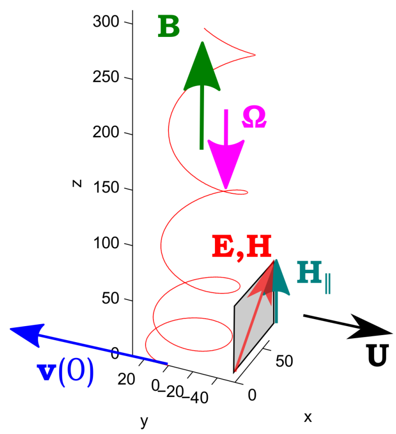
Τη δεύτερη εξίσωση την έχουμε ξαναλύσει, ενώ για την πρώτη τα πράγματα είναι εξαιρετικά απλά:

$$\mathbf{v}'_\parallel = \mathbf{v}'_\parallel(0) + \mathbf{H}_\parallel \ t.$$

Αν προχωρήσουμε τη λύση στην κατασκευή της τροχιάς θα έχουμε

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) - \mathbf{a}' + \mathbf{a}' \cos(\Omega t) + \mathbf{b}' \sin(\Omega t) + \mathbf{c}' \ t + \frac{1}{2}\mathbf{H}_\parallel \ t^2 \tag{49}$$

όπου $\mathbf{r}'$, η θέση του σωματιδίου σε ένα σύστημα $\Sigma_{\mathbf{U}}$ που κινείται σε σχέση με το αρχικό σύστημα



Σχήμα 6: Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και ηλεκτρικό πεδίο. Οι διευθύνσεις όλων των διανυσματικών πεδίων έχουν σχεδιασθεί. Η ελικοειδής τροχιά έχει τη φορά περιστροφής του $\boldsymbol{\Omega}$, το βήμα της ανήγει στην κατεύθυνση του $\mathbf{H}_\parallel$, και παρασύρεται (στραβώνει) στην κατεύθυνση του $\mathbf{U} \propto \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$. .

παρατήρησης του σωματιδίου με την ταχύτητα $\mathbf{U}$ που κατασκευάσαμε στην (45), αφού η $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου που παρατηρεί το σύστημα $\Sigma_{\mathbf{U}}$. Τα $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ δίνονται από τις ίδιες εκφράσεις με τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ παραπάνω αρκεί να αντικαταστήσει κανείς σε αυτές την $\mathbf{v}(0)$ με $\mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}(0) - \mathbf{U}$. Στο τέλος μπορεί κανείς να επανέλθει στο αρχικό σύστημα με έναν απλό μετασχηματισμό αλλαγής συστήματος αναφοράς:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{U} \ t \ .$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι υπάρχει μια καινούργια χρονική εξάρτηση στις τελικές σχέσεις εξαιτίας του όρου $\frac{1}{2}\mathbf{H}_\parallel \ t^2$. Αυτό οφείλεται στην παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο μαγνητικό πεδίο που φυσικά επιταχύνει το σωματίδιο, όπως θα ανέμενε κανείς, αφού σε αυτή την κατεύθυνση το μαγνητικό πεδίο δεν ασκεί καμία δύναμη.

Παράλληλα η $\mathbf{U}t$ κίνηση που συμβαίνει κάθετα στο επίπεδο μαγνητικού-ηλεκτρικού πεδίου (βλ. σχέση (45)) είναι μια νέα κίνηση εξαιτίας της εισαγωγής του ηλεκτρικού πεδίου. Το σωματίδιο εκτός από το να εκτελεί μια ελικοειδή κίνηση γύρω από το μαγνητικό πεδίο και να επιταχύνεται κατά μήκος του μαγνητικού εξαιτίας της παράλληλης συνιστώσας του ηλεκρικού, παρασύρεται και με ομαλή ταχύτητα κάθετα στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.

Ας σημειωθεί ότι στη Σχετικότητα όπου δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός δεν είναι δυνατό να βρούμε κατάλληλη ταχύτητα ώστε να σβήσουμε την κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι αρκετά μεγάλο (ηλεκτρικού τύπου πεδίο). Μπορούμε όμως σε αυτή την περίπτωση να βρούμε κατάλληλη ταχύτητα για να σβήσουμε το μαγνητικό πεδίο το κάθετο στο ηλεκτρικό. Η κατάσταση είναι τότε σαν αυτή που περιγράψαμε παραπάνω (με μοναδική διαφορά ότι ο βασικός άξονας –το $\mathbf{\Omega}$– θα έχει την διεύθυνση του $\mathbf{E}$ και όχι του $\mathbf{B}$). Αφού υπολογίσουμε την τροχιά στο σύστημα αυτό, μπορούμε να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 8

- Το εξωτερικό γινόμενο ορίζει επιφάνεια.
- Το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ορίζει όγκο παραλληλεπιπέδου με ακμές $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
- Η στροφορμή ορίζεται ως $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ και ορυθμός αλλαγής της ισούται με τη ροπή $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.
- Η εξίσωση $d\boldsymbol{\xi}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi}$ πριγράφει ομαλή περιστροφή του $\boldsymbol{\xi}$ γύρω από το $\boldsymbol{\omega}$ με γωνιακή ταχύτητα $|\boldsymbol{\omega}|$.
- Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια ορθή κυλινδρική έλικα που περιελίσσεται γύρω από της μαγνητικές δυναμικές γραμμές με σταθερό βήμα. Αν υπάρχει και ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, εκτός της επιπλέον επιτάχυνσης του φορτίου κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδιου, το σωματίδιο ολισθαίνει επίσης κάθετα στο επίπεδο του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου με σταθερή ταχύτητα.