

Κεφάλαιο 7

Διανύσματα

1 Τι είναι τα διανύσματα

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει τις επιπτώσεις των νόμων του Νεύτωνα σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Τώρα θα αναπτύξουμε τη μηχανική στο χώρο των τριών διαστάσεων. Είναι ιδιαιτέρως χρήσιμο και αποτελεσματικό να βασιστούμε στο διανυσματικό λογισμό για να περιγράψουμε και στη συνέχεια να μελετήσουμε τη θεωρία αυτή. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξηγήσουμε τι είναι τα διανύσματα και το λόγο που οι φυσικοί νόμοι μπορούν να γραφούν σε διανυσματική μορφή. Ο διανυσματικός λογισμός είναι αποτέλεσμα των εργασιών των Josiah Willard Gibbs και Oliver Heaviside¹.

Με το διανυσματικό λογισμό εισάγονται νέα σύμβολα στη φυσική και διαμορφώνεται έτσι μια νέα γλώσσα με την οποία μπορούμε να διατυπώσουμε τους φυσικούς νόμους. Μπορεί να σκέφτεστε ότι η εισαγωγή νέων συμβόλων είναι ένα τυπικό ή απλώς αισθητικό θέμα και ότι δεν έχει ιδιαίτερη ουσία, δεδομένου ότι τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν ακόμη και χωρίς τη χρήση των νέων αυτών συμβόλων. Για παράδειγμα ο Maxwell κατασκεύασε τις εξισώσεις του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, εξήγησε τους γνωστούς στην εποχή του νόμους των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων, προέβλεψε με τις εξισώσεις του την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δίχως τη χρήση διανυσμάτων. Μια τέτοια θεώρηση παραβλέπει όμως ότι όπως η γραφή είναι ουσιαστικό συστατικό για την ανάπτυξη της σκέψης έτσι και το είδος ή ακόμα και η τεχνολογία της γραφής έχει καίρια σημασία. Σκεφθείτε για παράδειγμα τη σημασία της εισαγωγής του συμβόλου της παραγωγίσιμης ή της ολοκλήρωσης στη ανάπτυξη της φυσικής. Όσο δε η αντίληψή μας για το φυσικό κόσμο ωριμάζει, μαζί εξελίσσεται και η μαθηματική γραφή· γίνεται περιεκτικότερη και απλούστερη και συνεπώς κομψότερη. Θα έλεγε μάλιστα κανείς ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλώς η γλώσσα της φυσικής, όπως είπε ο Γαλιλαίος, αλλά τα ίδια τα φυσικά φαινόμενα υπαγορεύουν τα μαθηματικά και διαμορφώνουν τη γραφή που χρησιμοποιούμε για να τα εξηγήσουμε.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τα διανύσματα είναι διότι μέσω αυτών, οι νόμοι της φυσικής παίρνουν μορφή που είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς και το φυσικό περιεχόμενο των νόμων προσδιορίζεται χωρίς να χρειάζεται να αναφερθούμε σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Για να καταλάβουμε καλύτερα την παραπάνω πρόταση ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m , υπό την επίδραση δύναμης με συνιστώσες

¹Ο Gibbs παρουσιάζει το 1898 τα διανύσματα σε ένα 85σέλιδο εγχειρίδιο για χρήση από τους φοιτητές του. Ο Heaviside παρουσιάζει τον λογισμό αυτό το 1892 στο άρθρο “*On the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field*”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A 183:423–80. Ο μαθητής του πρώτου Edwin Bidwell Wilson δημοσιεύει το 1901 το “*Vector Analysis: A Text-book for the Use of Students of Mathematics and Physics, based upon the lectures of Willard Gibbs*” το οποίο ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται ως εγχειρίδιο για την εκμάθηση του διανυσματικού λογισμού.

(F_x, F_y, F_z) σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με συντεταγμένες (x, y, z) . Η κίνηση του σωματιδίου εξελίσσεται σύμφωνα με τις δυναμικές εξισώσεις του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (1)$$

Η παράγωγος υπολογίζεται επί των χρονοεξαρτωμένων συντεταγμένων $(x(t), y(t), z(t))$ της θέσης του σωματιδίου. Επιλέγουμε τώρα ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (x', y', z') με διαφορετικό προσανατολισμό. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα απαιτεί η κίνηση του ίδιου σωματιδίου να ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_{x'}, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_{y'}, \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F_{z'}, \quad (2)$$

όπου $(F_{x'}, F_{y'}, F_{z'})$ οι συνιστώσες της δύναμης στο νέο σύστημα αναφοράς. Σημειώνουμε ότι για να γράψουμε το νόμο του Νεύτωνα στο νέο σύστημα αναφοράς έχουμε υποθέσει ότι η τιμή της μάζας, m , δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς, δηλαδή η τιμή της αδρανειακής μάζας δεν εξαρτάται από την διεύθυνση της κίνησης. Όταν η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς το φυσικό μέγεθος λέγεται *βαθμωτό* (scalar). Τα βαθμωτά φυσικά μεγέθη προσδιορίζονται από ένα μόνο πραγματικό αριθμό και ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος ανεξαρτήτως του προσανατολισμού του συστήματος αναφοράς. Η μάζα, το φορτίο, η θερμοκρασία και η πίεση σε κάποιο σημείο στο χώρο, είναι όλα παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών.

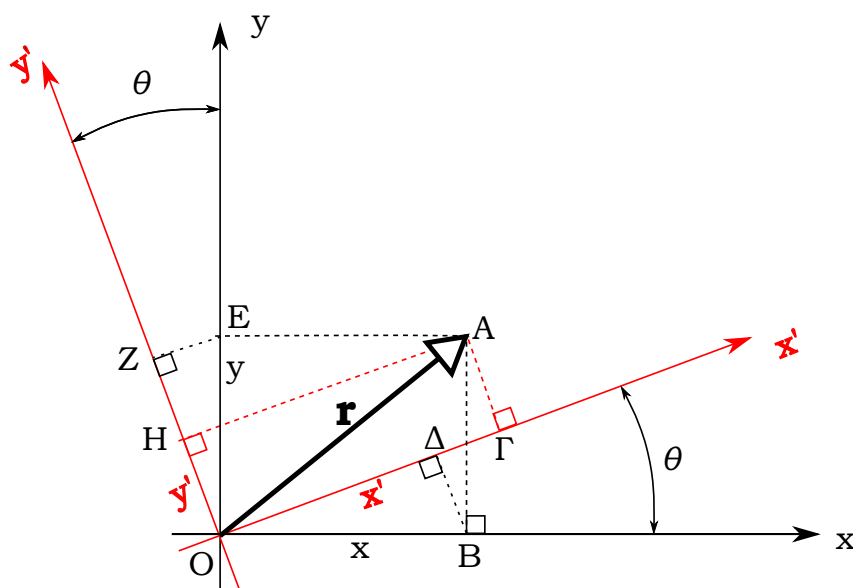
Στις εξισώσεις (1) και (2) οι συντεταγμένες του σωματιδίου διαφέρουν στα δύο συστήματα αναφοράς αλλά και οι συνιστώσες των δυνάμεων που ασκούνται είναι διαφορετικές. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα αν η κίνηση του σωματιδίου που πρόβλεπεται από τις (1) και (2) είναι η ίδια. Αν δεν είναι ίδια τότε ο νόμος του Νεύτωνα θα εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς και αντιθέτως αν είναι ίδια τότε ο νόμος του Νεύτωνα δεν θα εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς.

Για να εξετάσουμε πιο διεξοδικά το ζήτημα θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το δεύτερο σύστημα αναφοράς προκύπτει από το πρώτο με στροφή κατά σταθερή γωνία θ περί τον άξονα z . Συνεπώς, οι συντεταγμένες στα δύο συστήματα συνδέονται μέσω του (γραμμικού) μετασχηματισμού στροφής (βλ. Σχήμα 1):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (3)$$

Διαφορίζοντας την (3) μία φορά προκύπτει ότι οι συντεταγμένες της ταχύτητας του σωματιδίου στα δύο συστήματα

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad v_{x'} = \frac{dx'}{dt}, \quad v_{y'} = \frac{dy'}{dt}, \quad v_{z'} = \frac{dz'}{dt} \quad (4)$$



Σχήμα 1: Όπως φαίνεται από το σχήμα $x' = OG = OA \cos \theta + AB \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta$.
Όμοια $y' = OH = OZ - ZH = OE \cos \theta - AE \sin \theta = y \cos \theta - x \sin \theta$.

μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον εξής κανόνα:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \\ v_{y'} &= v_y \cos \theta - v_x \sin \theta, \\ v_{z'} &= v_z, \end{aligned} \quad (5)$$

και διαφορίζοντας την (5) άλλη μία φορά προκύπτει ότι οι συνισταμένες της επιτάχυνσης του σωματιδίου

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad a_{x'} = \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad a_{y'} = \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad a_{z'} = \frac{d^2 z'}{dt^2} \quad (6)$$

μετασχηματίζονται όπως ακριβώς και οι ταχύτητες:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \\ a_{y'} &= a_y \cos \theta - a_x \sin \theta, \\ a_{z'} &= a_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Δηλαδή οι συνιστώσες των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζονται οι συνιστώσες των θέσεων.

Αν η κίνηση του σωματιδίου είναι η ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς τότε οι συντεταγμένες της τροχιάς στα δύο συστήματα αναφοράς πρέπει να συνδέονται κάθε χρονική στιγμή με τις σχέσεις (3) και συνεπώς και οι επιταχύνσεις με τις σχέσεις (7). Πολλαπλασιάζοντας την

(7) με τη μάζα m και κάνοντας χρήση του νόμου του Νεύτωνα (1) και (2) όπως αποτυπώνεται σε κάθε σύστημα αναφοράς προκύπτει ότι για να είναι η τροχιά ίδια και στα δύο συστήματα οι συνιστώσες της δύναμης θα πρέπει να μετασχηματίζονται και αυτές με τον ίδιο κανόνα:

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\ F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Δηλαδή οι συνιστώσες της δύναμης θα πρέπει να μετασχηματίζονται στις στροφές ακριβώς όπως και οι συντεταγμένες της θέσης. Όταν συμβαίνει αυτό το φυσικό περιεχόμενο των νόμων του Νεύτωνα είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς. Το ίδιο συμπέρασμα θα προέκυπτε αν είχαμε εκτελέσει ένα γενικό μετασχηματισμό στροφής γύρω από οποιοδήποτε άξονα. Ο μετασχηματισμός αυτός θα είχε πιο περίπλοκη μορφή από τον (3), όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα, αλλά θα ήταν και αυτός γραμμικός ως προς τις διάφορες συνιστώσες και θα οδηγούμασταν, ακολουθώντας τα ίδια βήματα, και πάλι στο συμπέρασμα ότι για να είναι οι επιπτώσεις του νόμου του Νεύτωνα ανεξάρτητοι του προσανατολισμού του συστήματος αναφοράς απαιτείται οι συνιστώσες της δύναμης να μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες της θέσης.

Φυσικά μεγέθη που προσδιορίζονται από μία τριάδα πραγματικών αριθμών και έχουν επιπλέον την ιδιότητα να μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες της θέσης λέγονται *διανυσματικά μεγέθη*. Ισοδυνάμως ονομάζουμε *διανύσματα* τις τριάδες που μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες των χωρικών μετατοπίσεων. Αντιθέτως, *βαθμωτά μεγέθη* είναι αυτά που προσδιορίζονται από ένα πραγματικό αριθμό που παραμένει αναλλοίωτος στους μετασχηματισμούς των στροφών.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση, όντας μεγέθη παράγωγα της θέσης, είναι διανυσματικά μεγέθη διότι μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις. Ο διανυσματικός χαρακτήρας όμως της δύναμης δεν προκύπτει μέσω μαθηματικών πράξεων· προκύπτει κατόπιν διενέργειας πειραμάτων από τα οποία διαπιστώθηκε ότι οι συνιστώσες της δύναμης μετασχηματίζονται όπως και οι θέσεις και το γεγονός αυτό πρέπει να αποτυπωθεί ως ξεχωριστός θεμελιώδης νόμος. Ο Νεύτων ουσιαστικά προϋποθέτει ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος –δίχως να το γράφει εκπεφρασμένα– και επομένως ισχύει γι' αυτήν η αρχή της ανεξαρτησίας των δυνάμεων. Ο Νεύτων γράφει σχετικά: “Σώμα στο οποίο ασκούνται συγχρόνως δύο δυνάμεις διαγράφει τη διαγώνιο ενός παραλληλογράμμου στον ίδιο χρόνο που θα διέγραφε τις πλευρές του παραλληλογράμμου αν αυτές οι δυνάμεις ασκούσαν ξεχωριστά” (Πόρισμα 1 της Principia). Με άλλα λόγια οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα συμπεριφέρονται όπως και οι μετατοπίσεις: μπορούν να προστεθούν με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Δεχόμενοι αυτή την πρόταση μπορεί να αποδειχτεί ότι οι δυνάμεις μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις. Ας λάβουμε δύο συστήματα αναφοράς όπως στο Σχήμα 1 και ας υπολογίσουμε τις προβολές της δύναμης στο νέο σύστημα αξόνων. Αυτό απαιτεί τον προσδιορισμό των προβολών των δυνάμεων στους νέους άξονες που μπορεί να γίνει άμεσα αφού έχουμε υποθέσει ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα μπορούν να προστεθούν με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Θα

έχουμε τότε ότι $F_{z'} = F_z$ διότι ο άξονας z παραμένει ο ίδιος. Η δύναμη στον άξονα x' θα δίνεται από την προβολή στον άξονα αυτό (1) της δύναμης F_x που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x και (2) της δύναμης F_y που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα y , δηλαδή $F_{x'} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$. Ομοίως υπολογίζουμε την $F_{y'}$ από τις προβολές των F_x, F_y στον άξονα y' . Συνεπώς οι συνιστώσες της δύναμης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα (8), δηλαδή όπως και οι μετατοπίσεις.

Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης υποδεικνύει ότι αν ισχύει ο νόμος του Νεύτωνα σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, θα ισχύει και σε οποιοδήποτε άλλο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς προκύπτει από στροφή του αρχικού. Οι νόμοι του Νεύτωνα δεν εξαρτώνται δηλαδή από κάποια διεύθυνση στο χώρο και είναι αποτύπωση φυσικών νόμων που διέπουν ένα ισотροπικό κόσμο ο οποίος δεν έχει κάποιον προεξάρχοντα προσανατολισμό.

Αν συμβολίσουμε τώρα τις τρεις συνιστώσες της δύναμης με το σύμβολο²

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) ,$$

της ταχύτητας με το

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) ,$$

και της επιτάχυνσης με το

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) ,$$

τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

όπου με την ισότητα μεταξύ δύο διανυσμάτων εννοούμε ισότητα των συνιστωσών τους σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.

Η έκφραση του δεύτερου νόμου στη μορφή (9) για να έχει έννοια απαιτεί οι συνιστώσες του συμβόλου της δύναμης και του συμβόλου της επιτάχυνσης να μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όταν οι καρτεσιανοί άξονες στραφούν· αλλιώς δεν θα ισχύει ο ίδιος νόμος σε όλα τα συστήματα αναφοράς ανεξαρτήτως από την κατεύθυνση τους στο χώρο και θα έπρεπε μαζί με το νόμο να σημειώσουμε και σε ποιο ειδικό σύστημα ισχύει η εξίσωση. Επειδή όμως η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και μετασχηματίζεται όπως και οι συντεταγμένες της θέσης, ενώ το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση (είναι διανυσματικό μέγεθος και μετασχηματίζεται και αυτό όπως και οι συντεταγμένες της θέσης επειδή η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος), ο νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί με την συμβολική μορφή (9). Ο νόμος εκπεφρασμένος με τα νέα σύμβολα αφορά ισότητα διανυσμάτων και επομένως ισχύει χωρίς να χρειάζεται να προσδιορισθεί το σύστημα αναφοράς.

²Ενώ στη χειρόγραφη γραφή συνήθίζεται να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\vec{F}$ για την αναπαράσταση ενός διανύσματος, εδώ θα επιλέξουμε την έντονη γραφή $\mathbf{F}$ η οποία συνήθίζεται στην επιστημονική βιβλιογραφία και καθιστά πιο παραστατική τη διαφορά διανυσματικών και μη διανυσματικών μεγεθών.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι κάθε τριάδα αριθμών δεν σχηματίζει διάνυσμα. Για να είναι διάνυσμα πρέπει να μετασχηματίζεται όπως και οι μετατοπίσεις. Π.χ. εάν το $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ είναι διάνυσμα, τότε η τριάδα $(a_x, 2a_y, a_z)$ δεν σχηματίζει διάνυσμα (δείξτε το). Επίσης διανύσματα μπορεί να είναι και πιο περίπλοκα αντικείμενα. Ξεχωριστό παράδειγμα είναι η τριάδα

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (10)$$

που σχηματίζει ένα διανυσματικό τελεστή, δηλαδή οι “συντεταγμένες” ή αλλιώς τα στοιχεία του τελεστή μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις. Πράγματι αν λάβω δύο συστήματα αναφοράς (x, y, z) και το στραμμένο σύστημα (x', y', z') , σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (3), τα στοιχεία της τριάδας

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right), \quad (11)$$

θα είναι, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, ίσα με:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial x}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους στις παραπάνω ισότητες πρέπει να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού (3). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο ίδιος μετασχηματισμός στροφής, αλλά όμως με γωνία $-\theta$, διότι αν ο (3) είναι στροφή περί τον άξονα z κατά γωνία θ που μετασχηματίζει τα (x, y, z) στα (x', y', z') , μια στροφή περί τον ίδιο άξονα κατά γωνία $-\theta$ μετασχηματίζει τα (x', y', z') στα (x, y, z) . Συνεπώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (3) είναι:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= y' \cos \theta + x' \sin \theta, \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (12)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι συνιστώσες του τελεστή (11) μετασχηματίζονται όπως ακριβώς μετασχηματίζονται και οι μετατοπίσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

και ο διαφορικός τελεστής (10) σύμφωνα με τον ορισμό, σχηματίζει διάνυσμα. Ο τελεστής συμβολίζεται ως ∇ και λέγεται ανάδελτα ή βαθμίδα. Όταν δράσει ο τελεστής αυτός σε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(\mathbf{r})$, το οποίο παραμένει αναλλοίωτο στις στροφές, τότε σχηματίζεται το διάνυσμα $\nabla\phi$ που ονομάζεται βαθμίδα του πεδίου ϕ .

2 Διανυσματική άλγεβρα

Τις βασικές ιδιότητες των διανυσμάτων τις γνωρίζετε. Θα εξετάσουμε όμως πάλι μερικά βασικά θέματα υπό το πρίσμα του ορισμού του διανύσματος που δόθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Επανερχόμαστε στον ορισμό της ισότητας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ με συντεταγμένες (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) αντίστοιχα, είναι ίσα

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} , \quad (13)$$

αν σε κάποιο σύστημα αναφοράς ισχύει:

$$a_x = b_x , \quad a_y = b_y , \quad a_z = b_z . \quad (14)$$

Προσέξτε ότι μολονότι η ισότητα (14) ελέγχεται μόνο σε ένα σύστημα αναφοράς, επειδή τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα και οι συντεταγμένες (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο στις στροφές, η ισότητα των συντεταγμένων (14) ισχύει σε όλα τα συστήματα αναφοράς και γράφεται χωρίς αναφορά πλέον στο σύστημα αναφοράς ως (13).

Με τον ορισμό της πράξης της πρόσθεσης διανυσμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα διανυσματικά μεγέθη. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι το άθροισμα των συντεταγμένων δύο διανυσμάτων ορίζει ένα νέο διάνυσμα, το οποίο και ορίζουμε ως άθροισμα των διανυσμάτων. Πράγματι, αν (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ τότε η τριάδα των αθροισμάτων $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ μετασχηματίζεται ως διάνυσμα, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Η πρόσθεση διανυσμάτων ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} ,$$

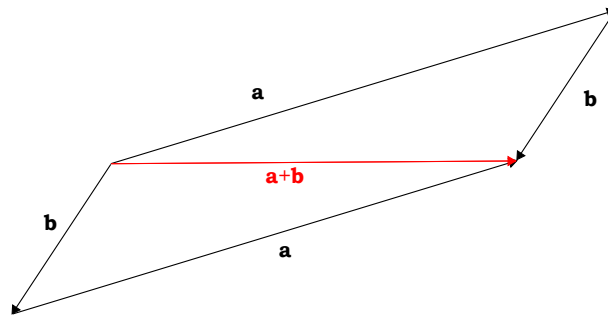
οπότε δεν έχει σημασία η σειρά που αθροίζουμε δύο διανύσματα, και επίσης την προσεταιριστική ιδιότητα

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} ,$$

οπότε το άθροισμα τριών ή και περισσότερων διανυσμάτων είναι καλώς ορισμένο και δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία προσθέτουμε τα διανύσματα. Έχοντας ορίσει το άθροισμα πολλών διανυσμάτων μπορούμε τώρα να ορίσουμε και το ολοκλήρωμα διανυσμάτων, π.χ. αν η ταχύτητα ενός σωματίου είναι $\mathbf{v}(t)$ τότε η συνολική μετατόπιση του σωματίου είναι $\int_0^t \mathbf{v}(t) dt$, ως άθροισμα των στοιχειωδών μετατοπίσεων $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$.

Τα διανύσματα επειδή συμπεριφέρονται όπως και οι μετατοπίσεις στο χώρο μπορούν να παρασταθούν όπως και οι μετατοπίσεις. Η πράξη της πρόσθεσης δύο διανυσμάτων μετατόπισης

a και **b** μπορεί εύκολα να επιτευχθεί χωρίς ουδεμία αναφορά σε σύστημα συντεταγμένων αν στο άκρο του διανύσματος **a** μεταφέρουμε την αρχή του διανύσματος **b**. Το άθροισμα $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ τότε θα είναι η συνολική μετατόπιση που προκαλείται αν κάνουμε τη μετατόπιση **a** ακολουθούμενη από τη μετατόπιση **b**. Το **c** τότε μπορεί να παρασταθεί με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα **a** και **b** η οποία ξεκινά από την αρχή του **a** και καταλήγει στην αιχμή του **b**, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 (ή από την αρχή του **b** μέχρι την αιχμή του **a** αν μεταφέρουμε την αρχή του **a** στο άκρο του **b**).



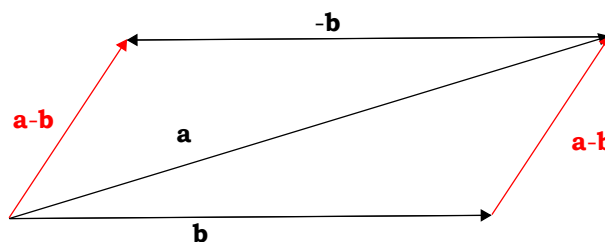
Σχήμα 2: Πρόσθεση διανυσμάτων. Λαμβάνοντας ένα σύστημα αναφοράς χρησιμοποιήστε τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων για να αποδείξετε το κανόνα πρόσθεσης του σχήματος.

Επίσης αν πολλαπλασιάσουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος **a** με κάποιο αριθμό k τότε πάλι θα έχουμε ένα νέο διάνυσμα. Πράγματι, αν (a_x, a_y, a_z) είναι διάνυσμα τότε και η τριάδα (ka_x, ka_y, ka_z) ορίζει ένα νέο διάνυσμα που το συμβολίζουμε $k\mathbf{a}$. Το διάνυσμα $k\mathbf{a}$ παριστάνει μια μετατόπιση που είναι k φορές μεγαλύτερη από την **a**. Αν ο αριθμός k είναι αρνητικός τότε το $k\mathbf{a}$ παριστάνει μια μετατόπιση που είναι $|k|$ φορές μεγαλύτερη από την **a** και έχει την αντίθετη φορά από αυτήν του **a**.

Έχοντας ορίσει το άθροισμα δύο διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό μπορούμε να ορίσουμε τη διαφορά δύο διανυσμάτων ως

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}.$$

Η αφαίρεση δύο διανυσμάτων παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Αφαίρεση διανυσμάτων ιδωμένη είτε ως ένα διάνυσμα που ξεκινά από το τέλος του αφαιρετέου **b** και φτάνει έως το τέλος του μειωτέου **a**, είτε ως το άθροισμα $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Αν οι συνιστώσες ενός διανύσματος είναι συναρτήσεις του χρόνου τότε η παράγωγος των συνιστωσών σχηματίζει πάλι ένα διάνυσμα το οποίο λέγεται χρονική παράγωγος του διανύσματος. Κατ' ουσίαν η χρονική παράγωγος ενός διανυσματικού μεγέθους προκύπτει από την αφαίρεση δύο διανυσμάτων σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές, προς το βαθμωτό μέγεθος του χρόνου που μεσολάβησε, στο όριο που το χρονικό αυτό διάστημα τείνει να γίνει μηδενικό. Έτσι η ταχύτητα

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

και η επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

είναι διανύσματα, τα οποία, με τη χρήση μιας υπερκείμενης τελείας προκειμένου να συμβολίσουμε τη χρονική παραγωγή, γράφονται αντίστοιχα και ως $\dot{\mathbf{r}}$ και $\ddot{\mathbf{r}}$. Ομοίως και η ορμή

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

είναι διανυσματικό μέγεθος.

3 Πίνακες στροφής και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων (3) ενός διανύσματος μπορεί να γραφεί συνοπτικά με τη χρήση πινάκων ως:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad (15)$$

όπου με $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ συμβολίζουμε τώρα τη στήλη των συντεταγμένων του διανύσματος, αντιστοίχως, στα δύο συστήματα αναφοράς,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{pmatrix},$$

και $\mathbf{R}$ είναι ο *πίνακας στροφής* (rotation matrix) (3) περί τον άξονα z κατά γωνία θ :³

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

³Ο πίνακας αυτός είναι ο λεγόμενος πίνακας *ενεργητικής στροφής*, ο οποίος σε δεδομένο σύστημα αναφοράς στρέφει το διάνυσμα στο οποίο δρα κατά γωνία θ . Υπάρχει όμως και ο πίνακας *παθητικής στροφής* ο οποίος κρατάει το διάνυσμα ακίνητο και στρέφει το σύστημα αναφοράς κατά γωνία θ . Αν η φορά των δύο αυτών στροφών είναι ίδια, τότε ο δεύτερος πίνακας έχει την ίδια ακριβώς μορφή με τον πρώτο, αλλά με παράμετρο $-\theta$ στη θέση της θ , αφού η ενεργητική και η παθητική στροφή έχουν αντίθετο αποτέλεσμα όσον αφορά στη στροφή διανύσματος σε σχέση με το σύστημα αναφοράς.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο πίνακας (16) είναι ορθογώνιος δηλαδή ότι ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I} ,$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας και $\mathbf{R}^\top$ ο ανάστροφος και $\mathbf{R}^{-1}$ ο αντίστροφος του $\mathbf{R}$.

Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύει εν μέρει και το αντίστροφο· δηλαδή ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι εν γένει μετασχηματισμοί στροφής. Για να εξετάσουμε το θέμα αυτό ως περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις και ως θεωρήσουμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Επειδή ο μετασχηματισμός έχει θεωρηθεί ορθογώνιος

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I} , \quad (17)$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας σε δύο διαστάσεις τώρα, τα 4 στοιχεία του πίνακα θα πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις ακόλουθες σχέσεις:

$$a^2 + c^2 = 1 , \quad ab + cd = 0 , \quad b^2 + d^2 = 1 . \quad (18)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει μία παράμετρο ελεύθερη, ενώ οι υπόλοιπες 3 δεσμεύονται από τις παραπάνω σχέσεις. Άρα οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις προσδιορίζονται από μία ελεύθερη παράμετρο⁴, θ . Αν θέσουμε

$$a = d = \cos \theta \quad \text{και} \quad b = -c = \sin \theta ,$$

τότε οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούνται και προκύπτει ο μετασχηματισμός της στροφής κατά γωνία θ σε δύο διαστάσεις:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (19)$$

που ισοδυναμεί με τον μετασχηματισμό στροφής (16) στις τρεις διαστάσεις περί τον άξονα z .⁵

Δεν έχουμε όμως εξαντλήσει όλες τις λύσεις. Επειδή ο $\mathbf{A}$ είναι ορθογώνιος η ορίζουσα του λαμβάνει μόνο τις διακριτές τιμές $+1$ ή -1 . Πράγματι λαμβάνοντας την ορίζουσα της (17) έχουμε

$$\det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = 1 ,$$

⁴Στο σημείο αυτό η παράμετρος θ δεν είναι η γωνία στροφής· είναι απλώς μια παράμετρος. Θα αποκτήσει το φυσικό περιεχόμενο γωνίας αμέσως παρακάτω.

⁵Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να θέσουμε $a = -d = \cos \theta$ και $b = c = \sin \theta$. Ένας τέτοιος πίνακας δεν θα αναπαριστά μια στροφή, αλλά αυτό που λίγο παρακάτω θα ονομάσουμε κατοπτρισμό.

και επειδή για κάθε πίνακα είναι: $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$, και η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το γινόμενο των ορίζουσών των πινάκων, έχουμε

$$\det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2 = 1$$

οπότε η ορίζουσα κάθε ορθογωνίου πίνακα είναι

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1 .$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας (19) έχει ορίζουσα +1, επομένως αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλους τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς χρειάζεται να προσθέσουμε και μια δεύτερη οικογένεια λύσεων⁶ με ορίζουσα -1 η οποία μπορεί να παραχθεί από το μετασχηματισμό του κατοπτρισμού $x \rightarrow x$ και $y \rightarrow -y$, ο πίνακας του οποίου είναι ο

$$\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας αυτός δεν μπορεί να αποτελεί στροφή αφού δεν υπάρχει καμία τιμή του θ για τον πίνακα (19) που να μπορεί να οδηγήσει στον $\mathbf{K}_y$. Οι κατοπτρισμοί αποτελούν μια ξεχωριστή κλάση ορθογώνιων μετασχηματισμών⁷.

Από τον πίνακα αυτό κατοπτρισμού και τους πίνακες στροφής της μορφής (19) μπορούν να προκύψουν όλοι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί στις δύο διαστάσεις. Έτσι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις αναγνωρίζονται ως στροφές ή γενικότερα ως στροφές με κατοπτρισμό. Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς σε τρεις διαστάσεις. Στις τρεις διαστάσεις, η δεύτερη οικογένεια λύσεων με ορίζουσα -1 εξαντλείται από ένα μόνο μετασχηματισμό κατοπτρισμού σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο ή από τον μετασχηματισμό ομοτιμίας (parity) $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ με πίνακα μετασχηματισμού:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (20)$$

Αν για παράδειγμα επιλέγαμε τον μετασχηματισμό κατοπτρισμού στο επίπεδο (x, y) (δηλαδή $z \rightarrow -z$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (21)$$

⁶Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα μέλος αυτής της οικογένειας αν είχαμε διαλέξει την εναλλακτική λύση της (18): $a = -d = \cos \theta$ και $b = c = \sin \theta$ που είδαμε στην υποσημείωση 5. Ένας τέτοιος πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι στροφή αφού $\mathbf{A}(\theta = 0) \neq \mathbf{I}$.

⁷Υπό μια έννοια οι πίνακες κατοπτρισμού λειτουργούν σαν τη φανταστική μονάδα, όπου μόνο ο πολλαπλασιασμός δύο κατοπτρισμών μπορεί να μας οδηγήσει σε πραγματική στροφή.

τότε ο μετασχηματισμός ομοτιμίας, $\mathbf{P}$, (20) προκύπτει αν μετά τον κατοπτρισμό εκτελέσουμε στροφή, $\mathbf{R}$, (σχέση (16)) κατά γωνία π περί τον άξονα z με πίνακα $\mathbf{R}(\theta = \pi)$:⁸

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

διότι είναι:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Συνολικά, λοιπόν, η ομοτιμία, παρότι μοιάζει με στροφή υπό την έννοια ότι μετασχηματίζει ένα διάνυσμα διατηρώντας το μέτρο του διανύσματος στο οποίο δρα, δεν είναι στροφή, αφού το καινούργιο διάνυσμα που προκύπτει μετά τη δράση του δεν προκαλεί την ίδια σχετική μεταβολή σε όλα τα διανύσματα. Θα μπορούσε, για παράδειγμα, ένα διάνυσμα στον x άξονα να το στρέψει κατά γωνία π γύρω από τον y άξονα, αλλά μια τέτοια δράση δεν θα προκαλούσε την ανάκλαση που προκαλεί η ομοτιμία σε ένα διάνυσμα του y άξονα. Στις δύο διαστάσεις, όμως, η ομοτιμία κάνει ακριβώς ότι και η στροφή στο επίπεδο $x - y$ κατά γωνία π και επομένως είναι στροφή.

4 Διανύσματα και ψευδοδιανύσματα

Έχοντας εισαγάγει τους μετασχηματισμούς της στροφής $\mathbf{R}$ και της ομοτιμίας $\mathbf{P}$, ως διανυσματικά μεγέθη ορίζονται πλέον τα φυσικά μεγέθη που μετασχηματίζονται στους μετασχηματισμούς στροφής και ομοτιμίας (ή κάποιου κατοπτρισμού ως προς ένα επίπεδο) όπως και οι συντεταγμένες των μετατοπίσεων, δηλαδή το $\mathbf{a}$ είναι διάνυσμα αν οι συντεταγμένες $\mathbf{a}'$ μετά από μία στροφή είναι

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a},$$

και μετά από μετασχηματισμό ομοτιμίας

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Παραδείγματα διανυσμάτων αποτελούν η ορμή, η βαθμίδα ενός βαθμωτού μεγέθους και η δύναμη.

Ψευδοδιανύσματα ή πολικά διανύσματα (pseudovectors ή polar vectors) είναι τα φυσικά μεγέθη που μετασχηματίζονται στις στροφές όπως οι μετατοπίσεις αλλά παραμένουν αναλλοίωτα στους μετασχηματισμούς κατοπτρισμού ή ομοτιμίας. Μετασχηματίζονται δηλαδή ως:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}, \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

⁸Όπως βλέπουμε, η ομοτιμία $\mathbf{r} \xrightarrow{\mathbf{P}} -\mathbf{r}$ σε δύο διαστάσεις (και γενικά σε άρτιο πλήθος διαστάσεων) είναι τελικά μια αμιγής στροφή.

Ψευδοδιανύσματα είναι για παράδειγμα η στροφορμή, η γωνιακή ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο.

Ομοίως βαθμωτά μεγέθη είναι αυτά που παραμένουν αναλλοίωτα στις στροφές αλλά και στους μετασχηματισμούς ομοτιμίας ή κατοπτρισμού ενώ ψευδοβαθμωτά μεγέθη (pseudoscalars) είναι αυτά που παραμένουν αναλλοίωτα μόνο στις στροφές και αλλάζουν πρόσημο στους μετασχηματισμούς ομοτιμίας. Το γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους με ένα διανυσματικό μέγεθος παράγει ένα διανυσματικό μέγεθος ενώ το γινόμενο ενός ψευδοβαθμωτού με ένα διάνυσμα ή ενός βαθμωτού με ένα ψευδοδιάνυσμα παράγει ένα ψευδοδιανυσματικό μέγεθος. Τέλος το γινόμενο ενός ψευδοβαθμωτού με ένα ψευδοδιάνυσμα παράγει ένα διάνυσμα. Συμβολικά αν ψ, β συμβολίζουν ψευδοβαθμωτά ή βαθμωτά μεγέθη, αντίστοιχα, ενώ Ψ, Δ συμβολίζουν ψευδοδιανύσματα ή διανύσματα, αντίστοιχα, θα είναι

$$\begin{aligned}
 \beta\beta &= \beta \\
 \beta\psi &= \psi \\
 \beta\Delta &= \Delta \\
 \psi\Delta &= \Psi \\
 \beta\Psi &= \Psi \\
 \psi\Psi &= \Delta \\
 \Delta \cdot \Delta &= \beta \\
 \Delta \cdot \Psi &= \psi \\
 \Psi \cdot \Psi &= \beta \\
 \Delta \times \Delta &= \Psi \\
 \Delta \times \Psi &= \Delta \\
 \Psi \times \Psi &= \Psi,
 \end{aligned} \tag{22}$$

Το εξωτερικό γινόμενο (βλ. περισσότερα στο Κεφάλαιο 8) δημιουργεί ψευδοδιανύσματα από διανύσματα αφού αντιστρέφεται η φορά και των δύο διανυσμάτων του γινομένου του⁹.

Ένας φυσικός νόμος όταν γράφεται σε διανυσματική μορφή πρέπει να περιλαμβάνει ομοειδή φυσικά μεγέθη: πρέπει να έχει τη μορφή ισότητας μεταξύ διανυσμάτων ή μεταξύ ψευδοδιανυσμάτων. Επειδή οι φυσικοί νόμοι της μηχανικής, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού καθώς και οι περισσότεροι νόμοι που γνωρίζουμε έχουν και κατοπτρική συμμετρία ή συμμετρία ομοτιμίας, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ δεξιόστροφων και αριστερόστροφων καταστάσεων, θα πρέπει να είναι διανυσματικοί νόμοι. Ο κατοπτρισμός όμως συμβαίνει να μην αποτελεί θεμελιώδη συμμετρία της φύσης. Οι Yang και Lee το 1954 απέδειξαν πειραματικά ότι οι ασθενείς πυρηνικές αλληλεπιδράσεις δεν είναι αναλλοίωτες στους κατοπτρισμούς. Στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η ταχύτητα, $\mathbf{v}$, και η επιτάχυνση, $\mathbf{a}$, είναι διανύσματα ενώ η μάζα

⁹Θα μπορούσε κανείς να φτιάξει τον ακόλουθο γενικό μνημονικό κανόνα: Σε οποιοδήποτε “ψευδο”-μέγεθος αντιστοιχεί ένα “—” πρόσημο. Αν το αποτέλεσμα οποιουδήποτε γινομένου (εσωτερικού, εξωτερικού, ή με βαθμωτό) είναι “+” το αντίστοιχο παράγωγο μέγεθος είναι “κανονικό”, αλλιώς είναι “ψευδο”-μέγεθος.

είναι βαθμωτό μέγεθος (θεωρείται ότι είναι αναλλοίωτη και σε κατοπτρισμούς), όπως επίσης και η ορμή, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, είναι διανυσματικό μέγεθος. Συνεπώς, για να είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα διανυσματικός νόμος πρέπει και η δύναμη να είναι διάνυσμα, πρέπει δηλαδή να μετασχηματίζεται στους μετασχηματισμούς κατοπτρισμού ή ομοτιμίας όπως και οι μετατοπίσεις. Αυτή η πρόταση είναι θεμελιώδης αρχή και όπως αναφέραμε και προηγουμένως πρέπει να ελεγχθεί η ακρίβειά της πειραματικά. Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ δύο σωμάτων είναι διάνυσμα όπως και η ηλεκτρική δύναμη Coulomb σε φορτισμένο σωματίο καθώς και η δύναμη Lorentz όταν το φορτισμένο σωματίο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο¹⁰.

5 Μέτρο διανύσματος

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η στροφή του καρτεσιανού συστήματος που δίνεται από το μετασχηματισμό (3) αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$ η οποία δεν είναι άλλη από την απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή κατά τις στροφές ισχύει ότι:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Η πρόταση αυτή γράφεται υπό μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{r}^\top \mathbf{r} = \mathbf{r}'^\top \mathbf{r}'. \quad (23)$$

όπου $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}'$ είναι οι στήλες των συντεταγμένων της μετατόπισης προ και μετά στροφής αντίστοιχα. Η ισχύς της πρότασης αυτής είναι διαισθητικά προφανής διότι το $x^2 + y^2 + z^2$ είναι το τετράγωνο του μήκους της μετατόπισης $\mathbf{r}$, το οποίο αναμένεται να είναι βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή μέγεθος ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς. Η αναλλοιότητα (23) προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι οι στροφές, $\mathbf{R}$, είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί και αν $\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^\top \mathbf{r}' &= (\mathbf{R}\mathbf{r})^\top (\mathbf{R}\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r}^\top (\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) \mathbf{r} \quad ^{11} \\ &= \mathbf{r}^\top \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις, το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων κάθε διανύσματος παραμένει και αυτό αναλλοίωτο δηλαδή θα ισχύει αντίστοιχα με την (23) η:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{a} = \mathbf{a}'^\top \mathbf{a}', \quad (24)$$

¹⁰ Από την τελευταία παρατήρηση αντιλαμβανόμαστε ότι το μαγνητικό πεδίο πρέπει είναι ψευδοδιάνυσμα, προκειμένου μέσω του εξωτερικού γινομένου του με την ταχύτητα να δημιουργήσει τη δύναμη Lorentz που οφείλει να είναι διάνυσμα όπως όλες οι δυνάμεις.

¹¹ Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του αναστρέφου ενός γινομένου πινάκων $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

ή

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 . \quad (25)$$

Η (25) αποδεικνύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων ενός διανύσματος ορίζει ένα θετικά ορισμένο βαθμωτό μέγεθος το οποίο μας επιτρέπει να ορίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος ως:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (26)$$

Το μέτρο αυτό αναφέρεται και ως ευκλείδειο μέτρο και η τιμή του δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

Έχοντας εισαγάγει την έννοια του μέτρου διανύσματος, η απόσταση δύο σημείων που βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ είναι $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη διανυσματική έκφραση της βαρυτικής δύναμης που ασκείται μεταξύ ενός σημειακού σωματιδίου μάζας m_1 στη θέση $\mathbf{r}_1$ και σωματιδίου μάζας m_2 στη θέση $\mathbf{r}_2$ (βλ. Σχήμα 4). Η δύναμη που ασκείται στο 1 από το 2 είναι:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) , \quad (27)$$

ενώ η δύναμη που ασκείται στο 2 από το 1 είναι:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) .$$

Προσέξτε ότι δεν χρειάζονται αρνητικά πρόσημα στις παραπάνω εκφράσεις για να δηλωθεί ότι η δύναμη είναι ελκτική: η διεύθυνση της δύναμης που προσδιορίζει αν η δύναμη είναι ελκτική ή απωστική προσδιορίζεται από τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ή του αντιθέτου του. Παρατηρούμε, επίσης ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωματιδίων ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα:

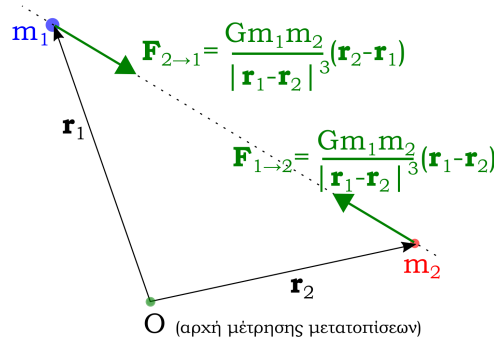
$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} .$$

Εισάγοντας την έννοια του μέτρου μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τα διανύσματα και να κατασκευάσουμε μοναδιαία διανύσματα δηλαδή διανύσματα που έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα διαιρώντας το διάνυσμα με το μέτρο του. Για παράδειγμα το διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

είναι μοναδιαίο: $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$. Το διάνυσμα αυτό $\hat{\mathbf{r}}$ ονομάζεται μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα με συντεταγμένες:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$



Σχήμα 4: Η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών m_1, m_2 στις θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ αντίστοιχα.

Συχνά τοποθετούμε ένα καπέλο “ $\cdot\hat{\cdot}$ ” πάνω στα μοναδιαία διανύσματα για να ξεχωρίζουν¹². Έτσι όλα τα διανύσματα μπορούν να διαχωριστούν στο μέτρο τους (βαθμωτό μέγεθος) και στην κατεύθυνσή τους μέσω του αντίστοιχου μοναδιαίου διανύσματος¹³:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{a}}.$$

Ομοίως, στη περίπτωση της βαρυτικής δύναμης χρησιμοποιήσαμε το μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\hat{\mathbf{r}}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|},$$

που έχει τη διεύθυνση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το σωματίο 2 με το 1, με κατεύθυνση προς το δεύτερο. Έτσι αν ξεχωρίσουμε το συνδυασμό αυτό διανυσμάτων από την έκφραση (27) η έκφραση θα πάρει την γνωστή μορφή αντιστρόφου τετραγώνου:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{r}}_{2 \rightarrow 1}.$$

Χρήσιμα μοναδιαία διανύσματα είναι τα διανύσματα βάσης του καρτεσιανού συστήματος με φορά τις διευθύνσεις των αξόνων (x, y, z) του καρτεσιανού συστήματος, αντιστοίχως τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ονομάζονται διανύσματα βάσης διότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ όπως θα δούμε παρακάτω.

6 Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Αφού έχουμε ορίσει το άθροισμα διανυσμάτων, μπορούμε μήπως κατ’ αναλογία να ορίσουμε και το γινόμενο διανυσμάτων; Αυτό αποδεικνύεται αβέβαιο και μάλλον ριψοκίνδυνο εγχείρημα. Για παράδειγμα αν τα (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) είναι διανύσματα, μήπως η τριάδα

¹²Στις διαλέξεις αυτές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό αυτό πάντα εκτός από τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ επί των τριών αξόνων, x, y, z , αντίστοιχα.

¹³Η γραφή αυτή μοιάζει με το διαχωρισμό ενός μιγαδικού στο μέτρο του και τη φάση του $z = |z|e^{i\theta}$.

$(a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z)$ ορίζει κάποιο διάνυσμα. Η απάντηση είναι κατηγορηματικά **όχι**, αλλά το άθροισμα των γινομένων των αντιστοιχών συντεταγμένων $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ορίζει ένα βαθμωτό φυσικό μέγεθος που έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του καρτεσιανού συστήματος! Δηλαδή, αν $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ και $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ σε ένα στραμμένο καρτεσιανό σύστημα τότε θα ισχύει ότι:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} . \quad (28)$$

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του προηγούμενου εδαφίου. Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται υπό μορφή πινάκων με τις σχέσεις $\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{R}$ ο ορθογώνιος πίνακας της στροφής μεταξύ των δύο συστημάτων, οπότε αντιστρέφοντας έχουμε $\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}' = \mathbf{R}^T \mathbf{a}'$ και $\mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{b}'$. Η αναλλοιώτητα της (28) στις στροφές αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{R}^T \mathbf{a}')^T (\mathbf{R}^T \mathbf{b}') \\ &= \mathbf{a}'^T ((\mathbf{R}^T)^T \mathbf{R}^T) \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T \mathbf{I} \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T \mathbf{b}' \\ &= a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} . \end{aligned}$$

Ορίζουμε λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και το συμβολίζουμε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ως εξής:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Η τελεία μεταξύ των διανυσμάτων *πρέπει* να γράφεται, διότι δεν συμβολίζει ένα σύννηθες γινόμενο, συμβολίζει το συγκεκριμένο γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων ενώ το μέγεθος $\mathbf{a} \mathbf{b}$ δεν έχει καν ορισθεί. Αντιθέτως δεν βάζουμε τελεία στο γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους με ένα διανυσματικό, π.χ. στο $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ που μπορεί να γραφεί και ως $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}$ που είναι το διανυσματικό μέγεθος που προκύπτει από το γινόμενο του βαθμωτού μεγέθους $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ με το διάνυσμα $\mathbf{c}$. Προσέξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{a}$ είναι διαφορετικά διανύσματα, τα οποία διαφοροποιούνται από τη θέση της τελείας: το πρώτο έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{c}$, ενώ το δεύτερο του $\mathbf{a}$.

Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων αφορά μόνο δύο διανύσματα¹⁴. Ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} ,$$

¹⁴Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ορισθεί ως μία διγραμμική απεικόνιση δύο διανυσμάτων στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή το ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ απεικονίζεται στον πραγματικό αριθμό $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και η απεικόνιση $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbf{a}$ για δεδομένο $\mathbf{b}$, καθώς και η απεικόνιση $\mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbf{b}$ για δεδομένο $\mathbf{a}$.

και δρα γραμμικά ως προς τη πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων:

$$\mathbf{a} \cdot (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} ,$$

όπου β και γ αριθμοί ή βαθμωτά μεγέθη.

Το ευκλείδειο μέτρο ενός διανύσματος προκύπτει πλέον αβίαστα ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με τον εαυτό του:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} .$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τετράγωνο αθροισμάτων διανυσμάτων ικανοποιεί μια αντίστοιχη ταυτότητα με αυτή του αθροίσματος αριθμών:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} . \end{aligned}$$

Από αυτή τη ταυτότητα μπορούμε να αποδείξουμε την αναλλοιότητα του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ στις στροφές βασιζόμενοι στην αναλλοιότητα του μέτρου ενός διανύσματος, παρατηρώντας ότι τα $|\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{b}|^2$ και $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$ είναι αναλλοίωτα στις στροφές πρέπει να είναι αναλλοίωτο και το $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ το οποίο βάσει της προηγούμενης ταυτότητας ισούται με το

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2) .$$

Εάν συμπεριλάβουμε και τους κατοπισμούς αντιλαμβανόμαστε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ότι το μεν εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος αλλά το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με ψευδοδιάνυσμα ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο ψευδοδιανυσμάτων ορίζει ένα βαθμωτό μέγεθος.

Για να αντιληφθούμε το γεωμετρικό νόημα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ λαμβάνουμε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με τον άξονα x στην διεύθυνση του $\mathbf{a}$ και το επίπεδο των αξόνων (x, y) να συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ (βλ. Σχήμα 5). Σε αυτό το σύστημα οι συντεταγμένες του $\mathbf{a}$ είναι $(a_x, 0, 0)$, του $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$ και συνεπώς $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$. Επιπλέον είναι $a_x = |\mathbf{a}|$, $b_x = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}| \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}| \cos \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$ και $b_y = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{j}} = |\mathbf{b}| \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = |\mathbf{b}| \sin \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$, όπου $\theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Συνεπώς προκύπτει ότι η τιμή του εσωτερικού γινομένου είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} . \quad (29)$$

Επειδή όμως το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος η (29) θα ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Μάλιστα, η γωνία $\theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$ μεταξύ των δύο διανυσμάτων αποδεικνύεται με αυτό τον

Σχήμα 5: Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ισούται με $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}}$.

τρόπο, όπως εξάλλου είναι αναμενόμενο, ότι είναι βαθμωτό μέγεθος και μπορεί να προσδιοριστεί μέσω του εσωτερικού γινομένου. Όταν η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι $\theta = \pm\pi/2$ τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Τα διανύσματα βάσης $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Συνεπώς επειδή

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_y, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_z,$$

κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα τρία λήμματα τα οποία είναι πολύ χρήσιμα.

Λήμμα 1. Εάν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$ είναι

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \tag{30}$$

τότε το διάνυσμα $\mathbf{b}$ θα είναι το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$.

Απόδειξη: Αν επιλέξουμε ως $\mathbf{a}$ το $(1, 0, 0)$ τότε η (30) συνεπάγεται ότι $b_x = 0$. Ομοίως η επιλογή $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ συνεπάγεται $b_y = 0$ και η επιλογή $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ συνεπάγεται $b_z = 0$. Συνεπώς το $\mathbf{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα. Με άλλα λόγια το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του χώρου είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Λήμμα 2. Εάν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$, η τριάδα (b_x, b_y, b_z) έχει την ιδιότητα σε κάθε σύστημα αξόνων η ποσότητα $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ να είναι αναλλοίωτη (να είναι δηλαδή ένα βαθμωτό μέγεθος) τότε η τριάδα (b_x, b_y, b_z) αποτελεί διάνυσμα¹⁵.

¹⁵ Εδώ προϋποτίθεται ότι γνωρίζουμε πως να βρούμε τις συνιστώσες του $\mathbf{b}$, (b_x, b_y, b_z) , σε κάθε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{R}$ μια στροφή των αξόνων που μετασχηματίζουν το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{a}'$ με $\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a}'$ και $\mathbf{a}$ είναι οι κολώνες των συντεταγμένων των $\mathbf{a}'$ και $\mathbf{a}$, αντίστοιχα. Η αναλλοiotητα του εσωτερικού γινομένου συνεπάγεται ότι $\mathbf{a}'^\top \mathbf{b}' = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$, άρα επειδή $\mathbf{a}'^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{R}^\top$ θα είναι:

$$\mathbf{a}^\top (\mathbf{R}^\top \mathbf{b}' - \mathbf{b}) = 0 .$$

Επειδή η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $\mathbf{a}$, θα είναι σύμφωνα με το Λήμμα 1, $\mathbf{R}^\top \mathbf{b}' - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, άρα

$$\mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{b} ,$$

δηλαδή το $\mathbf{b}$ είναι διάνυσμα.

Λήμμα 3. Εάν η συνιστώσα κάποιου φυσικού μεγέθους στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$, είναι $b_n = b_x n_x + b_y n_y + b_z n_z$, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ και (b_x, b_y, b_z) οι συνιστώσες του φυσικού μεγέθους σε τρεις ορθογώνιους άξονες, τότε το $\mathbf{b}$ είναι διάνυσμα.

Απόδειξη: Δεν θα δώσουμε τη γενικότερη απόδειξη διότι δεν έχουμε κατασκευάσει το γενικό μετασχηματισμό στροφής. Θα αρκεστούμε στην απόδειξη του διανυσματικού χαρακτήρα του $\mathbf{b}$ σε στροφές περί τον άξονα z . Έστω ότι κατά τη στροφή ο άξονας x μετασχηματίζεται στον x' και ο άξονας y στον y' . Λαμβάνουμε πρώτα το $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των x και x' , οπότε το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του x' . Συνεπώς από την υπόθεση η συνιστώσα στην διεύθυνση x' είναι:

$$b_{x'} = b_x \cos \theta + b_y \sin \theta .$$

Ομοίως λαμβάνοντας το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του y' : $\hat{\mathbf{n}} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, θα έχουμε ότι η συνιστώσα του $\mathbf{b}$ στη διεύθυνση y' είναι:

$$b_{y'} = -b_x \sin \theta + b_y \cos \theta .$$

Λαμβάνοντας τέλος $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ έχουμε ότι η συνιστώσα στην διεύθυνση z' είναι:

$$b_{z'} = b_z .$$

Συνεπώς οι συνιστώσες του $\mathbf{b}$ μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις και επομένως το $\mathbf{b}$ είναι πράγματι διάνυσμα.

7 Υπολογισμός της παραγώγου εσωτερικού γινομένου – Γεωμετρική ερμηνεία της βαθμίδας

Έστω $\mathbf{a}(t)$ και $\mathbf{b}(t)$ δύο χρονοεξαρτώμενα διανύσματα. Η παράγωγος του εσωτερικού γινομένου ικανοποιεί τον ίδιο κανόνα που ισχύει για την παράγωγο γινομένου συναρτήσεων, αφού

το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι τίποτε άλλο από άθροισμα γινομένων. Πράγματι επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= \frac{d(a_x b_x)}{dt} + \frac{d(a_y b_y)}{dt} + \frac{d(a_z b_z)}{dt} \\ &= \left(\frac{da_x}{dt} b_x + \frac{da_y}{dt} b_y + \frac{da_z}{dt} b_z \right) + \left(a_x \frac{db_x}{dt} + a_y \frac{db_y}{dt} + a_z \frac{db_z}{dt} \right) \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}.\end{aligned}$$

Επειδή όμως η παραπάνω ισότητα αφορά βαθμωτά μεγέθη, ο τύπος για την παραγωγή εσωτερικού γινομένου ισχύει σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Μια ειδική περίπτωση της σχέσης αυτής εμφανίζεται συχνά στη μηχανική. Υπολογίζουμε την παράγωγο του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ που είναι ίσο με το $a^2 = |\mathbf{a}|^2$, όπου $a = |\mathbf{a}|$ είναι το μέτρο του $\mathbf{a}$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Αφενός,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt},$$

και αφετέρου:

$$\frac{da^2}{dt} = 2a \frac{da}{dt},$$

και επειδή είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ έχουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = a \frac{da}{dt}. \quad (31)$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω σχέση το αριστερό σκέλος είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών (ή ψευδοδιανυσματικών) μεγεθών ενώ το δεξιό σκέλος είναι το σύννητες γινόμενο δύο βαθμωτών (ή ψευδοβαθμωτών) μεγεθών.

Ένα χρήσιμο πόρισμα της (31) που θα συναντήσουμε επανειλημμένα είναι το ακόλουθο: Εάν ένα διάνυσμα $\mathbf{a}$ που εξαρτάται από μια μεταβλητή, t , έχει σταθερό μέτρο, a , και συνεπώς είναι $\dot{a} = 0$, τότε από την (31) προκύπτει ότι

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0,$$

δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{a}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα, $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$.

Ας δούμε τώρα ποιο είναι το φυσικό και γεωμετρικό νόημα της βαθμίδας¹⁶ ενός βαθμωτού πεδίου $V(\mathbf{r})$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor η μεταβολή της τιμής του βαθμωτού πεδίου,

¹⁶Η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου ∇V συχνά γράφεται και ως $\text{grad}V$.

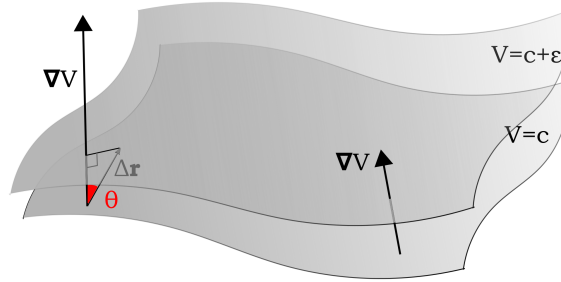
ΔV , όταν μετατοπιστούμε από το σημείο $\mathbf{r}$ κατά $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z + O(|\Delta \mathbf{r}|^2) \\ &= \nabla V \cdot \Delta \mathbf{r} + O(|\Delta \mathbf{r}|^2) .\end{aligned}\tag{32}$$

Συνεπώς η διαφορική μεταβολή του V ικανοποιεί τη σχέση:

$$dV = (\nabla V) \cdot d\mathbf{r} ,\tag{33}$$

η οποία μάλιστα μπορεί να ληφθεί και ως ορισμός της βαθμίδας. Πράγματι από το Λήμμα 2



Σχήμα 6: Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί δύο επιφάνειες σταθερού V . Σε δύο σημεία της κάτω επιφάνειας (χαμηλότερου V) έχει σχεδιαστεί το ∇V . Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια. Στα σημεία που οι ισο- V επιφάνειες είναι πυκνότερες το ∇V έχει μεγαλύτερο μέτρο.

του προηγούμενου εδαφίου προκύπτει ότι το ∇V είναι διάνυσμα δεδομένου ότι το dV είναι βαθμωτό μέγεθος (ως (απειροστή) διαφορά δύο βαθμωτών) και το $d\mathbf{r}$ διάνυσμα. Γεωμετρικά η σχέση αυτή μας υποδεικνύει ότι η βαθμίδα έχει τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια $V = c$, όπου c κάποια σταθερά. Πράγματι αν σχεδιάσουμε την επιφάνεια $V = c$ και την επιφάνεια $V = c + \epsilon$ βλέπουμε από την (32) ότι σε πρώτη τάξη η μετατόπιση $\Delta \mathbf{r}$ για να μεταφερθούμε από τη μία επιφάνεια στην άλλη ικανοποιεί την

$$\epsilon = \nabla V \cdot \Delta \mathbf{r} .$$

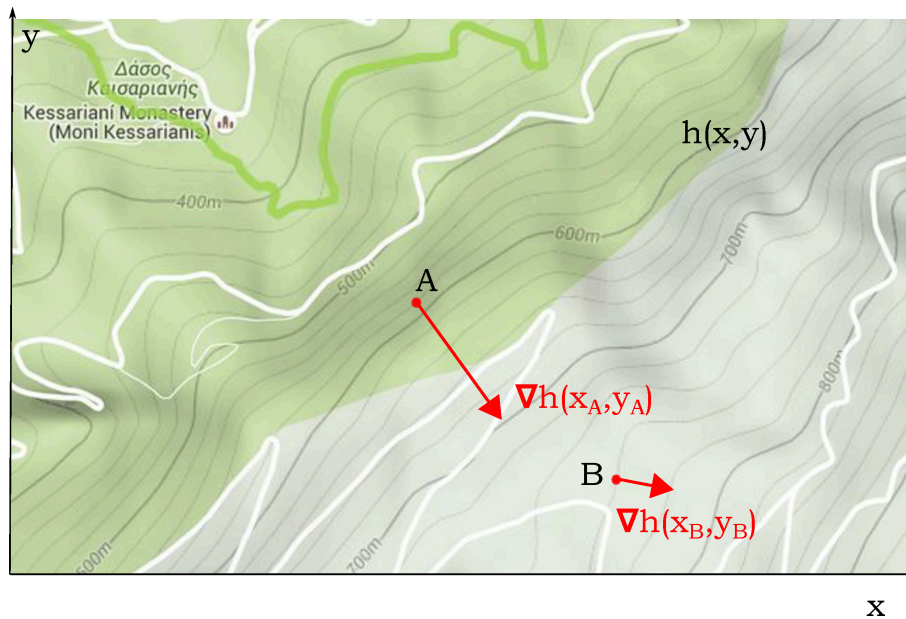
Το μέτρο της μετατόπισης $\delta = |\Delta \mathbf{r}|$ είναι σε πρώτη τάξη:

$$\delta = \frac{\epsilon}{|\nabla V| \cos \theta} ,$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ∇V με τη μετατόπιση $\Delta \mathbf{r}$ (βλ. Σχήμα 6). Όταν το δ γίνει ελάχιστο τότε η μετατόπιση είναι στη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια. Αυτό συμβαίνει όταν η γωνία μεταξύ βαθμίδας και μετατόπισης είναι $\theta = 0$, όταν δηλαδή η διεύθυνση της βαθμίδας και της κοντινότερης αυτής απόστασης ταυτίζονται. Συνεπώς η βαθμίδα, ∇V , έχει ως διεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια $V = c$. Η κατεύθυνση τώρα της ∇V είναι αυτή που δείχνει προς την αύξηση της τιμής του V . Το δε μέτρο της ∇V , σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις, είναι

$$|\nabla V| = \frac{\epsilon}{\delta_{\perp}},$$

όπου $\delta_{\perp}$ είναι η χωρική απόσταση (κάθετα στην επιφάνεια) δύο επιφανειών των οποίων οι τιμές του V διαφέρουν κατά ϵ . Επομένως το $|\nabla V|$ είναι μεγαλύτερο εκεί που οι επιφάνειες είναι πολύ κοντά και μικρό εκεί που οι επιφάνειες απέχουν περισσότερο. Αν η V σημειώνει το υψόμετρο σε ένα δισδιάστατο τοπογραφικό χάρτη, οι ισοϋψείς στο χάρτη αυτό (καμπύλες και όχι επιφάνειες) πυκνώνουν εκεί που το ύψος μεταβάλλεται απότομα και τότε η βαθμίδα του ∇V έχει μεγάλο μέτρο (βλ. Σχήμα 7).



Σχήμα 7: Στο σχήμα φαίνεται ένας τοπογραφικό χάρτης μέρους του Υμητού. Στο χάρτη είναι χαραγμένες οι ισοϋψείς καμπύλες καθώς και η βαθμίδα του ύψους, $\nabla h(x, y)$ σε δύο σημεία· στο A με υψόμετρο 580 m και στο B με υψόμετρο 760 m. Στο A που οι καμπύλες είναι πυκνές και το υψόμετρο αλλάζει απότομα η ∇h έχει μεγάλο μέτρο, ενώ στο B που οι καμπύλες είναι αραιές και η πλαγιά του βουνού είναι λιγότερο απότομη, το $|\nabla h|$ είναι σαφώς μικρότερο.

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι η βαθμίδα της απόστασης σημείου από την αρχή των αξόνων, ∇r , είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$. Αυτό συμβαίνει διότι οι επιφάνειες $r = \text{σταθερό}$

είναι σφαίρες. Η κάθετος σε μία σφαίρα έχει ακτινική διεύθυνση οπότε η ∇r έχει την διεύθυνση του r , το δε μέτρο του ∇r είναι, αν θέσουμε $V = r$ στην (33):

$$|\nabla r| = \frac{dr}{dr} = 1 .$$

Συνεπώς

$$\nabla r = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} . \quad (34)$$

Προσπαθήστε να υπολογίσετε το ∇r και από τις καρτεσιανές συνιστώσες του r , $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8 Διανύσματα στη γεωμετρία

Στο εδάφιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ερμηνεία των διανυσμάτων για να κατασκευάσουμε, σε διανυσματική μορφή, την εξίσωση μιας σφαίρας, ενός επιπέδου, ενός κυλίνδρου και ενός κώνου.

- (i.) **Σφαίρα:** Τα σημεία της επιφάνειας μίας σφαίρας η οποία έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο $\mathbf{r}_0$, ισαπέχουν από το κέντρο. Συνεπώς κάθε σημείο της σφαίρας, που προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}$ ικανοποιεί την διανυσματική εξίσωση της σφαίρας:

$$|\mathbf{r}_{\text{σφ}} - \mathbf{r}_0| = R .$$

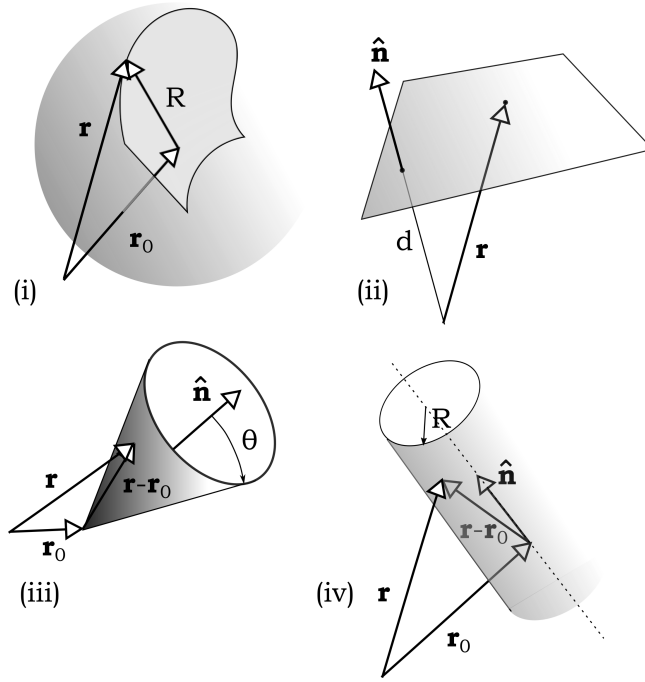
- (ii.) **Επίπεδο:** Επίσης επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η οποία σε κάθε σημείο της, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι ίδιο (έχει σταθερή διεύθυνση). Συνεπώς, ένα επίπεδο προσδιορίζεται πλήρως αν δοθεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε αυτό και η ελάχιστη απόσταση του επιπέδου από την αρχή των αξόνων. Εάν η ελάχιστη απόσταση είναι d και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο είναι $\hat{\mathbf{n}}$, τότε κάθε σημείο του επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mathbf{r}_{\text{επιπ}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d ,$$

διότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ της αρχής και των σημείων του επιπέδου δίδεται από το μήκος της καθέτου στο επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 8). Εναλλακτικά, το γεγονός ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα θα πρέπει να είναι σταθερό, ισοδυναμεί με το ότι η επιφάνεια $V(\mathbf{r}) = V_0$ που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο θα πρέπει να έχει $\nabla V / |\nabla V| = \hat{\mathbf{n}}$. Επομένως θα πρέπει η V να είναι μια γραμμική συνάρτηση του $\mathbf{r}$, δηλαδή θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$V(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + a_0$$

με $\mathbf{a}$ κάποιο κατάλληλο σταθερό διάνυσμα και a_0 κάποιο σταθερό αριθμό. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\nabla V = \mathbf{a}$. Συνεπώς θα πρέπει να είναι $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{n}}$. Επίσης η ελάχιστη



Σχήμα 8: Οι τέσσερις επιφάνειες, σφαίρα, επίπεδο, κώνος και κύλινδρος σε διανυσματική μορφή.

απόσταση που θα πρέπει να απέχει ένα σημείο της επιφάνειας αυτής από την αρχή είναι d , οπότε θα έχουμε

$$V_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{\min} + a_0 = |\mathbf{a}|d + a_0.$$

Δηλαδή $|\mathbf{a}| = (V_0 - a_0)/d$. Συνθέτωντας όλα τα παραπάνω στοιχεία θα λάβουμε την ακόλουθη εξίσωση για το επίπεδο

$$\frac{V_0 - a_0}{d} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + a_0 = V_0 \quad \text{με άλλα λόγια} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = d,$$

στην ίδια ακριβώς εξίσωση που καταλήξαμε παραπάνω.

- (iii.) **Κώνος:** Ένας κώνος με κορυφή το σημείο $\mathbf{r}_0$, άξονα στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ και άνοιγμα θ είναι ο τόπος όλων των σημείων $\mathbf{r}$ που η σχετική τους θέση ως προς το $\mathbf{r}_0$ σχηματίζει με το $\hat{\mathbf{n}}$ γωνία θ . Δηλαδή

$$\frac{(\mathbf{r}_{\text{κων}} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}_{\text{κων}} - \mathbf{r}_0|} = \cos \theta = \sigma_{\theta}. \quad (35)$$

- (iv.) **Κύλινδρος:** Ένας κύλινδρος ο άξονας του οποίου διέρχεται από το σημείο $\mathbf{r}_0$ και έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου $\hat{\mathbf{n}}$ χαρακτηρίζεται από σημεία που απέχουν από τον άξονα απόσταση R , ίση με την ακτίνα του κυλίνδρου. Επομένως $|\mathbf{r}_{\text{κυλ}} - (\mathbf{r}_0 + \lambda \hat{\mathbf{n}})| = R$, όπου λ είναι

κατάλληλος αριθμός που αντιστοιχεί στο $\mathbf{r}_{\text{κυλ}}$ το εγγύτερο σημείο του άξονα. Πρόκειται για το μήκος της προβολής του $\mathbf{r}_{\text{κυλ}} - \mathbf{r}_0$ στο $\hat{\mathbf{n}}$. Συνεπώς

$$|(\mathbf{r}_{\text{κυλ}} - \mathbf{r}_0) - \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{r}_{\text{κυλ}} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}| = R. \quad (36)$$

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό, δίνουμε μια χρήσιμη εφαρμογή του εσωτερικού γινομένου· τον προσδιορισμό της πλευράς ενός τριγώνου όταν είναι γνωστές οι άλλες δύο. Έστω τρίγωνο ABC . Η μετατόπιση από τη κορυφή A στη κορυφή B ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{c}$ που έχει μέτρο ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , c . Η μετατόπιση από το A στο C ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{b}$ που έχει μέτρο b , και η μετατόπιση από το B στο C ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ που έχει μέτρο a . Δίδεται και η γωνία του τριγώνου $\theta = \angle CAB$. Ζητείται να προσδιορισθεί το μήκος της τρίτης πλευράς a συναρτήσει των b , c και θ . Προς τούτο:

$$\begin{aligned} a^2 &= |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta, \end{aligned}$$

που είναι γνωστός ως νόμος των συνημιτόνων.

9 Το φυσικό νόημα της απόκλισης πεδίου

Στο εδάφιο 7 είδαμε ποια είναι η δράση του ∇ , το οποίο αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι διάνυσμα —ή έστω δρα ως διάνυσμα—, σε μια βαθμωτή συνάρτηση. Τώρα θα εξετάσουμε ποια είναι η δράση του ως εσωτερικό γινόμενο σε μια διανυσματική συνάρτηση, και τι σημαίνει το αποτέλεσμα της δράσης από γεωμετρική άποψη.

Όπως εξηγήσαμε στο παρόν Κεφάλαιο, δύο διανύσματα μπορούν να πολλαπλασιαστούν, μέσω εσωτερικού γινομένου, και να προκύψει ένα βαθμωτό μέγεθος¹⁷. Θα μελετήσουμε λοιπόν το αποτέλεσμα της δράσης του διανυσματικού τελεστή ∇ πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ υπό τη μορφή εσωτερικού γινομένου¹⁸:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

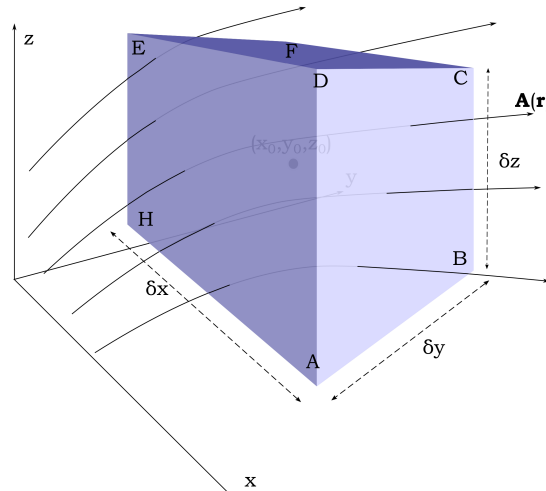
¹⁷Στα Κεφάλαια 8 και 9 θα εξετάσουμε άλλη μια μορφή γινομένου διανυσμάτων, το εξωτερικό γινόμενο, από το οποίο μπορεί να προκύψει ένα νέο διανυσματικό μέγεθος.

¹⁸Προφανώς ο τελεστής ∇ πρέπει να προηγείται της συνάρτησης $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ώστε να δράσει κάπου και να μας δώσει μια συνάρτηση. Το αντίστροφο διάταξης εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla$ αποτελεί και αυτό μια λογική κατασκευή και μάλιστα βαθμωτή, αλλά πρόκειται πάλι για τελεστή ο οποίος περιμένει να δράσει κάπου, και όχι για συνάρτηση, όπως το $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Ο τελεστής $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος στο σημείο $\mathbf{r}$ στη διεύθυνση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Προσοχή: η γραφή της τελείας που δηλώνει εσωτερικό γινόμενο είναι απαραίτητη και δεν θα πρέπει να παραλείπεται· αν δεν υπάρχει δεν θα ξέρουμε ποια ακριβώς πράξη γινομένου να εκτελέσουμε.

Το αποτέλεσμα δεν αποτελεί διάνυσμα (λόγω εσωτερικού γινομένου), αλλά μια νέα βαθμωτή ποσότητα η οποία ως τέτοια έχει αυθύπαρκτο γεωμετρικό νόημα και δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Ποιο όμως είναι αυτό;

Ας φανταστούμε το $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ως ένα διανυσματικό πεδίο που γεμίζει το χώρο και ας κατασκευάσουμε ένα μικρό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με κέντρο το σημείο $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και πλευρές $\delta x, \delta y, \delta z$ αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 9). Η ροή του πεδίου $\mathbf{A}$ μέσα από την επιφάνεια-σύνορο του



Σχήμα 9: Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $ABCDEFGH$ με διαστάσεις $\delta x \times \delta y \times \delta z$ είναι κεντραρισμένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) . Η ροή F που διαπερνά την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου $S(V)$ σχετίζεται με την απόκλιση του πεδίου $\nabla \cdot \mathbf{A}$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

παραλληλεπιπέδου ορίζεται ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$F = \int_{S(V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) , \quad (37)$$

όπου F είναι η ροή (βαθμωτό μέγεθος) του πεδίου, $S(V)$ είναι η επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου που περικλείει το χωρίο όγκου $V = \delta x \delta y \delta z$, και $d\mathbf{S}$ μια στοιχειώδης επιφάνεια¹⁹ του παραλληλεπιπέδου στη θέση $\mathbf{r}$ και στην οποία το διάνυσμα του πεδίου είναι $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Η ροή εμφανίζεται υπό τη μορφή εσωτερικού γινομένου, αφού όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο (το διάνυσμα της επιφάνειας είναι παράλληλο στο πεδίο) η ροή είναι μέγιστη, ενώ όταν είναι παράλληλη με το πεδίο (το διάνυσμα της επιφάνειας είναι κάθετο στο πεδίο) η ροή είναι μηδε-

¹⁹Μολονότι η επιφάνεια η επιφάνεια δεν φαίνεται να εμπεριέχει κάποιο διανυσματικό χαρακτήρα, θα δούμε στο Κεφάλαιο 8 ότι στις 3 διαστάσεις μπορεί κανείς αυθόρμητα να κατασκευάσει ένα διάνυσμα κάθετο σε μια επιφάνεια το μέτρο του οποίου να είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Η επιφάνεια ως διάνυσμα είναι προσανατολισμένη και ο προσανατολισμός της σχετίζεται με τις δύο πλευρές της επιφάνειας.

νική²⁰. Προφανώς από στοιχειώδη επιφάνεια σε στοιχειώδη επιφάνεια αλλάζει το πεδίο, αλλά λόγω της μικρής έκτασης του χωρίου (σε σχέση με την κλίμακα που συμβαίνουν αξιοσημείωτες μεταβολές του πεδίου $\mathbf{A}$) θα γράψουμε σε κάθε θέση το πεδίο ως ανάπτυγμα Taylor και θα κρατήσουμε μονάχα εκείνους τους όρους που θα μας δώσουν μια χρήσιμη πληροφορία. Έτσι

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta x + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta y + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta z + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (38)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι²¹ υπολογίζονται στο κέντρο του παραλληλεπιπέδου και τα $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ μετρούν τη μετατόπιση του εκάστοτε σημείου στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{A}$ από το κέντρο (x_0, y_0, z_0) . Οι δε όροι $\mathcal{O}(\Delta^2)$ είναι όροι διγραμμικοί ως προς τις μετατοπίσεις, δηλαδή όροι της μορφής $(\Delta x)(\Delta y), (\Delta z)^2$ κλπ.

Στη μια έδρα του παραλληλεπιπέδου, την $ABCD$ που είναι παράλληλη στο επίπεδο $y-z$ και επομένως έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{i}$ (αφού ως θετική λαμβάνουμε συμβατικά την κατεύθυνση που κοιτάζει κάθετα στην επιφάνεια και προς το εξωτερικό μέρος της κλειστής επιφάνειας) το πεδίο έχει τη μορφή:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \xi + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \zeta + \mathcal{O}(\Delta^2),$$

και στον υπολογισμό της ροής οι μεταβλητές $\xi = y - y_0$ και $\zeta = z - z_0$ διατρέχουν τα διαστήματα $[-\delta y/2, +\delta y/2]$ και $[-\delta z/2, +\delta z/2]$, αντίστοιχα²². Κατά την ολοκλήρωση από τα διανύσματα $\mathbf{A}$ και τις μερικές παραγώγους αυτού θα παραμείνουν μόνο οι x -συνιστώσες εξαιτίας του εξωτερικού γινομένου με το μοναδιαίο $\mathbf{i}$ της επιφάνειας, οπότε

$$F_{ABCD} = \int_{-\delta y/2}^{+\delta y/2} \int_{-\delta z/2}^{+\delta z/2} d\xi d\zeta \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \left. \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \xi + \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \zeta + \mathcal{O}(\Delta^2) \right].$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό οι ολοκληρώσεις $\int \xi d\xi$ και $\int \zeta d\zeta$ θα δώσουν μηδέν λόγω συμμετρικών ορίων οπότε αυτό που θα μείνει θα είναι

$$F_{ABCD} = \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της ροής στην απέναντι έδρα $EFGH$ είναι ίσο με

$$F_{EFGH} = - \left[A_x(x_0, y_0, z_0) - \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z.$$

²⁰Ενας εναλλακτικός τρόπος να αντιλαμβάνεται κανείς τη ροή είναι με την καταμέτρηση των γραμμών ροής που διαπερνούν την επιφάνεια.

²¹Οι παράγωγοι δρουν σε ολόκληρο το διάνυσμα $\mathbf{A}$ δηλαδή σε κάθε συνιστώσα αυτού.

²²Εδώ αντικαταστήσαμε στην (38) τις μετατοπίσεις: $\Delta x = \delta x/2, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$.

όπου το αρχικό “-” οφείλεται στην κατεύθυνση της μιας επιφάνειας προς το $-\mathbf{i}$, ενώ το “-” στο ανάπτυγμα Taylor οφείλεται στο ότι μετράμε το πεδίο όχι μπροστά από το x_0 , αλλά πίσω από αυτό κατά $\delta x/2$. Το άθροισμα των ροών των δύο από τις έξι αυτών εδρών είναι

$$F_{ABCD} + F_{EFGH} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} \delta x + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} \delta x \delta y \delta z + \mathcal{O}(\delta^4). \quad (39)$$

Στο τελικό αποτέλεσμα, τους όρους ανώτερης τάξης τους γράψαμε $\mathcal{O}(\delta^4)$ αντί $\mathcal{O}(\Delta^4)$ αφού τα όρια των ολοκληρώσεων σχετίζονται με το μέγεθος των πλευρών και όχι με την οποιαδήποτε μετατόπιση Δx ή Δy ή Δz , η οποία λαμβάνει κάποια τιμή εντός του εύρους του παραλληλεπίπεδου προ ολοκληρώσεως. Τώρα πλέον μπορούμε κατ’ αναλογία να κατασκευάσουμε τις ροές σε όλα τα άλλα ζευγάρια απέναντι εδρών και να καταλήξουμε ότι η ολική ροή μέσα από την επιφάνεια είναι

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}_0} \right] \delta x \delta y \delta z + \mathcal{O}(\delta^4) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}_0} \delta V + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \quad (40)$$

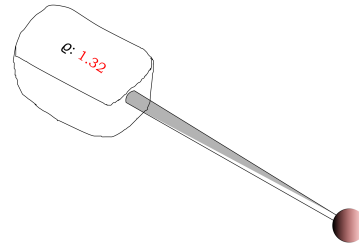
Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που σχετίζεται με το πεδίο και μετρά τη ροή είναι η τιμή του $\nabla \cdot \mathbf{A}$ υπολογισμένη στο κέντρο του χωρίου όγκου δV . Αν λοιπόν σχηματίσουμε το λόγο $F_{S(\delta V)}/\delta V$ και λάβουμε το όριο²³

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{F_{S(\delta V)}}{\delta V}, \quad (41)$$

αυτό το οποίο θα προκύψει είναι η τιμή του

$$\nabla \cdot \mathbf{A}|_{\mathbf{r}_0}.$$

Με άλλα λόγια η ποσότητα $\varrho(\mathbf{r})$, που ορίσαμε στην (37) και η οποία ονομάζεται *απόκλιση* του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$, μετρά τη ροή ανά μονάδα όγκου που διαπερνά μια μικροσκοπική κλειστή επιφάνεια γύρω από το σημείο $\mathbf{r}$. Η απόκλιση συμβολίζεται εκτός από $\nabla \cdot \mathbf{A}$ και $\text{div} \mathbf{A}$. Εμείς θα προτιμήσουμε τον πρώτο συμβολισμό που αναδεικνύει τον βαθμωτό χαρακτήρα του νέου μεγέθους.



Σχήμα 10: Μια διάταξη που θα μετρούσε την απόκλιση του πεδίου $\mathbf{A}$ σε κάποιο σημείο θα αποτελούνταν από μια μικροσκοπική σφαίρα, η επιφάνεια της οποίας θα ήταν ευαίσθητη σε ανίχνευση ροής του $\mathbf{A}$. Η συνολική ροή δια τον όγκο της σφαίρας θα αναγραφόταν στον πίνακα ενδείξεων του οργάνου.

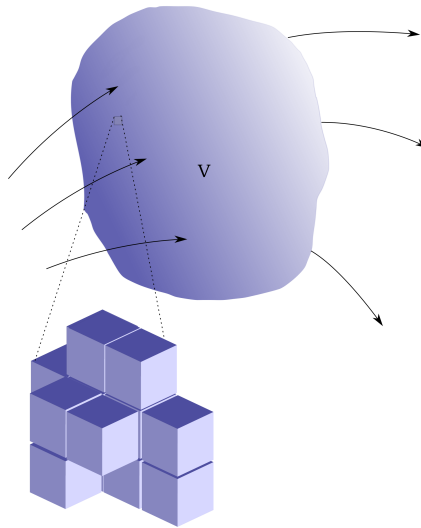
²³ Από τον υπολογισμό της ροής F και τη μορφή των όρων ανώτερης τάξης καταλαβαίνει κανείς ότι δεν αρκεί να στείλει οριακά το δV στο 0, αλλά θα πρέπει αυτό να γίνει ομοιόμοφα για όλες τις διαστάσεις του χωρίου $\delta x \rightarrow 0$, $\delta y \rightarrow 0$ και $\delta z \rightarrow 0$, ώστε οι όροι ανώτερης τάξης να μηδενίζονται σίγουρα.

Αν θέλαμε να κατασκευάσουμε ένα μηχανήμα το οποίο να μετρά την απόκλιση ενός πεδίου, θα έπρεπε να αποτελείται από ένα σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων με την επιφάνειά της καλυμμένη από έναν ευαίσθητο ανιχνευτή ικανό να μετρά ροή του πεδίου. Η βαθμονόμηση της ολικής ροής ως ηλεκτρικό σήμα διαιρεμένη δια τον όγκο του σφαιριδίου θα ήταν ικανή να μετρήσει την απόκλιση στο σημείο που θα την τοποθετούσαμε. Κατ'ουσίαν θα επρόκειτο για ένα ροόμετρο (βλ. Σχήμα 10).

Η σύνδεση της ροής του πεδίου διαμέσου της εξωτερικής επιφάνειας ενός στοιχειώδους όγκου και της απόκλισης, μάς επιτρέπει να μετράμε τη ροή ενός πεδίου επί μιας κλειστής επιφάνειας με έμμεσο τρόπο μετρώντας το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισής του, και αντίστροφα:

$$\int_{S(V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV. \quad (42)$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ουσιαστικά από τη σχέση (41) που όπως είπαμε μετράει την απόκλιση του πεδίου. Μπορεί να καταλάβει κανείς πώς το όριο των απειροστών όγκων οδηγεί στο πεπερασμένο αποτέλεσμα της (42) αν διαιρέσει τον πεπερασμένο όγκο V σε απειροστά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Τα εσωτερικά σύνορα αυτών θα συνεισφέρουν μηδενική ροή, αφού όση ροή εξέρχεται από την μια έδρα του ενός παραλληλεπιπέδου, τόση εισέρχεται στην κοινή έδρα του γειτονικού παραλληλεπιπέδου (βλ. ένθετο Σχήματος 11). Η μοναδική ροή που απομένει τότε σε ολόκληρο το πλήθος των παραλληλεπιπέδων είναι αυτή των εξωτερικών εδρών, δηλαδή η ροή στην εξωτερική επιφάνεια S του V . Η τελευταία σχέση αποτελεί το περιεχόμενο του θεωρήματος του Gauss το οποίο θα μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 13.



Σχήμα 11: Η σχέση (42) προκύπτει από τη σχέση ροής-απόκλισης. Προσθέτοντας τις αποκλίσεις από όλα στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα που συνθέτουν τον όγκο V λαμβάνουμε την ροή στις εξωτερικές έδρες αυτών, δηλαδή τη ροή στην επιφάνεια του όγκου V .

10 Διατήρηση της ενέργειας σωματιδίου

Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι στις μονοδιάστατες κινήσεις υπάρχει μια ιδιόμορφη ποσότητα που διατηρείται όταν η δύναμη εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση· η ενέργεια. Το ένα κομμάτι αυτής της ποσότητας σχετίζεται με την κίνηση του σωματιδίου

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

και ονομάζεται κινητική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ ορίζεται ως η ποσότητα (κατ' αναλογία με τη μονοδιάστατη κίνηση)

$$K = \frac{m}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) . \quad (43)$$

Η κινητική ενέργεια, όπως και κάθε άλλη μορφή ενέργειας είναι βαθμωτό μέγεθος.

Το έργο μιας σταθερής δύναμης, $\mathbf{F}$ που επιτελείται επί ενός σωματιδίου όταν αυτό μετατοπίζεται κατά $\mathbf{a}$ ορίζεται ως:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} .$$

Εάν το σωματίδιο κινείται επί κάποιας τροχιάς, εν γένει καμπύλης, το συνολικό έργο που ασκείται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό μεταβεί από το σημείο $\mathbf{r}_1$ στο $\mathbf{r}_2$ διαγράφοντας την καμπύλη γ είναι:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (44)$$

Προσέξτε ότι για να προσδιορισθεί το ολοκλήρωμα απαιτείται η εκ των προτέρων γνώση της τροχιάς, γ , που ενώνει το αρχικό με το τελικό σημείο. Η δύναμη βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα διότι μπορεί να μην είναι σταθερή. Αν η δύναμη είναι σταθερή το έργο της δύναμης είναι $W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, ανεξαρτήτως της διαδρομής, αφού τότε μπορούμε να την “βγάλουμε” έξω από το ολοκλήρωμα:

$$W = \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} .$$

Αν τώρα σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα με το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{v} \cdot \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} .$$

Το αριστερό μέλος ισούται με την χρονική παράγωγο της κινητικής ενέργειας (43)

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dK}{dt}$$

όπου η K ορίστηκε παραπάνω στην (43) και εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι η χρονική παράγωγος της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ που ασκεί η δύναμη επί του σωματίου:

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} .$$

Εάν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_1$ τη χρονική στιγμή t_1 και στην θέση $\mathbf{r}_2$ τη χρονική στιγμή t_2 ακολουθώντας την τροχιά γ τότε η διαφορά της κινητικής ενέργειας στις δύο αυτές θέσεις είναι:

$$\begin{aligned} K(t_2) - K(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dK}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W . \end{aligned} \quad (45)$$

Στην τρίτη κατά σειρά σχέση αλλάξαμε τη μεταβλητή από το χρόνο στη θέση επί της τροχιάς, γ , θέτοντας $\dot{\mathbf{r}} dt = d\mathbf{r}$. Συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ δύο θέσεων του σωματιδίου ισούται με το έργο της δύναμης που το μετακίνησε²⁴. Γενικά το έργο εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε το σωματίδιο. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να πούμε κάτι περισσότερο για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου.

Εμείς θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μία ειδική μορφή δυνάμεων οι οποίες λέγονται *συντηρητικές δυνάμεις*²⁵. Αυτές οι δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από τη θέση $\mathbf{r}$ και δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}$ και το χρόνο t και έχουν επιπλέον την ιδιότητα το έργο που ασκούν σε ένα σωματίδιο να είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή, γ . Η πρόταση αυτή συνεπάγεται (όπως θα δούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 10) ότι το έργο σε κάθε κλειστή διαδρομή γ , που ονομάζεται και κυκλοφορία της δύναμης, είναι πάντοτε μηδενικό:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (46)$$

Το $\oint_{\gamma}$ συμβολίζει το ολοκλήρωμα σε μία κλειστή διαδρομή γ . Η πρόταση αυτή ισχύει διότι αν το έργο της δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή, τότε το έργο στη μη τετριμμένη διαδρομή γ που αρχίζει από το A και καταλήγει στο A είναι το ίδιο με το έργο στην τετριμμένη διαδρομή που αποτελείται μόνο από το σημείο A και είναι εκ κατασκευής μηδενικό.

²⁴ Αν πολλές δυνάμεις δρουν στο σωματίδιο και εξαιτίας όλων αυτών συμβαίνει η μετακίνηση το έργο είναι το έργο όλων των δυνάμεων.

²⁵ Στο Κεφάλαιο 10 θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά το αντικείμενο των συντηρητικών δυνάμεων κάνοντας χρήση του εξωτερικού γινομένου

Αποτελεί θεμελιώδη ιδιότητα ότι αυτές οι δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως η βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης, $V(\mathbf{r})$, που ονομάζεται δυναμική ενέργεια²⁶, δηλαδή οι συντηρητικές δυνάμεις έχουν αναγκαστικά τη μορφή:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) . \quad (47)$$

Όταν η δύναμη έχει τη μορφή της (47), το έργο δεν εξαρτάται πράγματι από τη διαδρομή διότι:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \nabla V \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} dV \\ &= - [V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)] . \end{aligned} \quad (48)$$

Στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (33). Συνεπώς από την (45) προκύπτει:

$$K(t_1) + V(t_1) = K(t_2) + V(t_2) ,$$

και επειδή οι χρόνοι t_1 και t_2 είναι αυθαίρετοι, προκύπτει ότι η ποσότητα

$$E = K + V , \quad (49)$$

παραμένει σταθερή κατά τη κίνηση και ονομάζεται ενέργεια.

Αποδείξαμε στην (48) ότι το έργο μίας συντηρητικής δύναμης εξαρτάται μόνο από τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου της διαδρομής και είναι παντελώς ανεξάρτητο από τη διαδρομή που συνδέει το $\mathbf{r}_1$ με το $\mathbf{r}_2$, ακόμη και αν η διαδρομή αυτή απομακρύνεται πολύ από τη γειτονιά του αρχικού και του τελικού σημείου. Αυτή η ιδιότητα των συντηρητικών δυνάμεων μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια αμέσως αν γνωρίζουμε τη δύναμη, $\mathbf{F}$, αντιστρέφοντας με τον τρόπο αυτό την (47). Αν το έργο της δύναμης δεν εξαρτάται από τη διαδρομή τότε για δεδομένο $\mathbf{r}_0$ το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

²⁶Συχνά στη Φυσική χρησιμοποιείται ο όρος δυναμικό αντί της δυναμικής ενέργειας. Το δυναμικό είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από το πεδίο της δύναμης μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο και όχι από το σωματίδιο αυτό καθαυτό. Η σχέση του δυναμικού με τη δυναμική ενέργεια –η οποία εξαρτάται από το σωματίδιο– είναι ότι το δυναμικό ισούται με τη δυναμική ενέργεια προς το “φορτίο” που φέρει το σωματίδιο έτσι ώστε να αισθάνεται το πεδίο της δύναμης. Για την περίπτωση της βαρυτικής δύναμης το φορτίο είναι η μάζα, ενώ για το πεδίο Coulomb, το φορτίο είναι το ηλεκτρικό φορτίο.

είναι συνάρτηση μόνο του $\mathbf{r}$ (και δεν εξαρτάται από όλα τα ενδιάμεσα σημεία τα οποία έχουν παρεμβληθεί στην ολοκλήρωση²⁷) και το ολοκλήρωμα:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (50)$$

που δίνει τη δυναμική ενέργεια είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση του $\mathbf{r}$. Το σημείο $\mathbf{r}_0$ είναι ένα αυθαίρετο σημείο αναφοράς που χρησιμεύει απλώς για την βαθμονόμηση της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή για τον καθορισμό του μηδενός της δυναμικής ενέργειας. Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση (50) συνεπάγεται την (47):

$$\nabla V(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) .$$

Η πρόταση αυτή αποτελεί γενίκευση σε πολλαπλές διαστάσεις της πιο γνώριμης αντίστοιχης πρότασης σε μία διάσταση. Αν το $V(x)$ είναι το δυναμικό της δύναμης $f(x)$ σε μία διάσταση :

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(x') dx'$$

και η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση προκύπτει από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού ότι:

$$f(x) = - \frac{dV}{dx} .$$

Γι' αυτό το λόγο σε μία διάσταση όλες οι δυνάμεις της μορφής $f(x)$ είναι συντηρητικές (πάντοτε ισχύει η (46)) και οδηγούν πάντοτε σε διατήρηση της ενέργειας

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) .$$

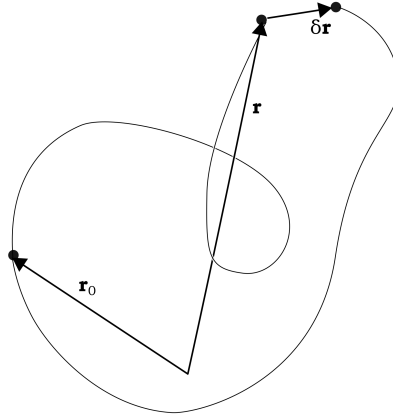
Για να υπολογίσουμε τη βαθμίδα της V από τη σχέση (50), υπολογίζουμε τη μεταβολή $\delta V(\mathbf{r})$ σε μικρή μετατόπιση $\delta \mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \delta V &= V(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \\ &= - \left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \\ &= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \end{aligned} \quad (51)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει διότι το ολοκλήρωμα επί της κλειστής διαδρομής: $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ (βλ. Σχήμα 12) είναι μηδενικό:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = 0 .$$

²⁷Οπότε δεν χρειάζεται να αναγράφεται και η τροχιά επί της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση.



Σχήμα 12: Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης στην κλειστή διαδρομή $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ είναι μηδέν.

Αν τώρα στην (51) αλλάξουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και θέσουμε $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r}$, η ανεξαρτησία της τιμής του ολοκληρώματος από τη διαδρομή, μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} d\epsilon \\
 &= \int_0^1 [\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \epsilon(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots] \cdot \delta\mathbf{r} d\epsilon \\
 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} \int_0^1 d\epsilon + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2) \\
 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2)
 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε ότι στο όριο $\delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ αφενός μεν:

$$dV(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} ,$$

ενώ από τον ορισμό της ∇V είναι

$$dV(\mathbf{r}) = \nabla V \cdot d\mathbf{r} .$$

Η ισότητα αυτών των δύο εκφράσεων του $dV(\mathbf{r})$ για κάθε $d\mathbf{r}$ συνεπάγεται την $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Για την απόδειξη της διατήρησης της ενέργειας (49) απαιτείται και η δύναμη και η δυναμική ενέργεια να είναι χρονοανεξάρτητα. Αν το δυναμικό, $V(\mathbf{r}, t)$, είχε χρονική εξάρτηση τότε η

παράγωγος ως προς το χρόνο της ενέργειας δεν μηδενίζεται και ισούται με:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{dK}{dt} + \frac{dV}{dt} \\
 &= m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla V \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
 &= \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla V \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t},
 \end{aligned}$$

αφού $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = -\nabla V$.

11 Συντηρητικές κεντρικές δυνάμεις

Οι κεντρικές δυνάμεις της μορφής:

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (52)$$

είναι συντηρητικές. Στην παραπάνω έκφραση $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ είναι η θέση του σωματιδίου, r είναι η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Το κέντρο της δύναμης έχει υποθεθεί εδώ ότι βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η διεύθυνση της δύναμης είναι στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το σωματίδιο με το σώμα, για αυτό και ονομάζεται κεντρική αυτού του τύπου η δύναμη. Όπως έχει διατυπωθεί ο νόμος της δύναμης, το σωματίδιο έλκεται προς το κέντρο όταν $f(r) < 0$ και απωθείται από το κέντρο όταν $f(r) > 0$. Όλες οι κεντρικές δυνάμεις, όπως θα συζητήσουμε και στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων (Κεφάλαιο 12), δεν είναι αναγκαστικά συντηρητικές. Αν η βαθμωτή συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ εξαρτάται και από τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης τότε η κεντρική δύναμη δεν είναι αναγκαστικά συντηρητική.

Χαρακτηριστικές κεντρικές δυνάμεις είναι η ελκτική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο στο χώρο από ένα γραμμικό ελατήριο:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = -kr\hat{\mathbf{r}}.$$

και η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται σε σωματίδιο μάζας m όταν στην αρχή των αξόνων υπάρχει ακλόνητη σημειακή μάζα M :

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Οι δύο απλές αυτές κεντρικές δυνάμεις έχουν εξέχοντα ρόλο στη Φυσική. Επιπλέον, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 13, οδηγούν και σε εξαιρετικά απλές τροχιές με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία του έργου των κεντρικών δυνάμεων (52) από τη διαδρομή υπολογίζουμε το έργο σε κάποια διαδρομή, γ , που συνδέει το $\mathbf{r}_1$ με το $\mathbf{r}_2$:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} f(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}, \quad (53)$$

και αποδεικνύουμε ότι το έργο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$d\mathbf{r} = d(r\hat{\mathbf{r}}) = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\hat{\mathbf{r}},$$

δηλαδή, μία διαφορική μετατόπιση του διανύσματος θέσης μπορεί να επιτελεστεί με μία μετατόπιση μέτρου dr κατά την ακτινική διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ και μία μετατόπιση $r d\hat{\mathbf{r}}$ σε διεύθυνση κάθετη στο $\hat{\mathbf{r}}$, επειδή το $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο και συνεπώς θα είναι

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = 0$$

όπως δείξαμε και στο εδάφιο 7. Συνεπώς

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = dr \quad (54)$$

Η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να αποδειχθεί αμέσως διαιρώντας με r την ταυτότητα (31) (αν αντί για $\mathbf{a}$ είχαμε $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr.$$

Έτσι το έργο της κεντρικής δύναμης (52) μετατρέπεται σε ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα ως προς την πραγματική μεταβλητή r :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr,$$

που εξαρτάται μόνο από τα άκρα της ολοκλήρωσης.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι κεντρικές δυνάμεις της μορφής (52) είναι συντηρητικές και η δυναμική τους ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V = - \int_{r_0}^r f(r) dr. \quad (55)$$

Στη φύση οι κεντρικές δυνάμεις είναι της μορφής (52) με την συνάρτηση f να εξαρτάται μόνο από την απόσταση του σωματιδίου r από το κέντρο της δύναμης και να μην εξαρτάται από τη διεύθυνση της θέσης του σωματιδίου. Εάν υπήρχε εξάρτηση από την διεύθυνση του σωματιδίου τότε θα παραβιάζονταν η ισοτροπία του χώρου, θα μπορούσαμε δηλαδή με μετρήσεις της δύναμης να προσδιορίζουμε τον προσανατολισμό μας στο χώρο. Είναι ενδιαφέρον ότι στην περίπτωση κεντρικών δυνάμεων απαιτείται και η ισοτροπία του χώρου προκειμένου να έχουμε διατήρηση της ενέργειας του σωματιδίου.

Συνηθίζεται να λαμβάνεται ως r_0 η απόσταση στην οποία η κεντρική δύναμη μηδενίζεται. Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, λαμβάνοντας $r_0 = 0$, προκύπτει η δυναμική ενέργεια:

$$V = k \frac{r^2}{2} .$$

Στην περίπτωση της βαρύτητας, λαμβάνοντας $r_0 = \infty$, προκύπτει η δυναμική ενέργεια:

$$V = -\frac{GmM}{r} .$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι οι παραπάνω δυναμικές ενέργειες παράγουν τις αντίστοιχες δυνάμεις χρησιμοποιώντας την παρακάτω ταυτότητα:

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \nabla r = f'(r) \hat{\mathbf{r}} ,$$

όπου $f'(r) \equiv df/dr$. Η ταυτότητα αυτή μας δίνει την r -συνιστώσα του ∇ σε σφαιρικές συντεταγμένες, αφού η συνάρτηση στην οποία υποθέσαμε ότι δρα είναι συνάρτηση μόνο του r . Η πλήρης μορφή του ∇ στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (56)$$

(Προσπαθήστε να εξαγάγετε το παραπάνω αποτέλεσμα γράφοντας τη σχέση (33) σε σφαιρικές συντεταγμένες. Δοκιμάστε να ανακαλύψτε και την αντίστοιχη έκφραση για το ∇ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.)

12 Αθροιστική σύμβαση - Τανυστές

Ένα διάνυσμα προσδιορίζεται στον τριδιάστατο χώρο με τρεις αριθμούς, τις συντεταγμένες του ως προς κάποιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Συνήθως ονομάζουμε αυτές τις συνιστώσες x, y, z συντεταγμένες του διανύσματος. Αντ' αυτού μπορούμε να τις αριθμούμε οπότε θα τις ονομάζουμε με τον αριθμό του άξονα που αντιστοιχεί στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη συντεταγμένη. Οπότε το διάνυσμα $\mathbf{a}$ προσδιορίζεται και από τις συντεταγμένες του a_i όπου $i = 1, 2, 3$ και η ισότητα $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ γράφεται και ως $a_i = b_i$, υπονοώντας ότι, αφού δεν διευκρινίζεται ποια είναι η τιμή του i , το i παίρνει κάθε δυνατή τιμή. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων γράφεται τότε:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i .$$

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης εμφανίζεται δύο φορές και επειδή αθροίζεται σε όλες τις δυνατές τιμές θα μπορούσε να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα π.χ. θα μπορούσαμε να γράψουμε

το εσωτερικό γινόμενο ισοδυνάμως ως $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j$. Τα ζεύγη επαναλαμβανόμενων δεικτών που εμφανίζονται σε άθροισμα γινομένων συντεταγμένων λέγονται *εικονικοί δείκτες* (dummy indices)²⁸. Οι δείκτες που δεν επαναλαμβάνονται δηλώνουν τη συγκεκριμένη συντεταγμένη του διανύσματος. Στις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων δεικτών σε γινόμενα συντεταγμένων το σύμβολο του αθροίσματος μπορεί και να παραληφθεί και να συμφωνηθεί ότι όταν εμφανίζονται ζευγάρια δεικτών σε γινόμενα συνισταμένων διανυσμάτων οι δείκτες αυτοί είναι εικονικοί και υπονοείται η άθροισή τους. Η σύμβαση αυτή λέγεται *αθροιστική σύμβαση* ή *σύμβαση του Einstein*. Με την αθροιστική σύμβαση το εσωτερικό γινόμενο γράφεται απλώς ως:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i .$$

Χρειάζεται όμως προσοχή να μην επαναλαμβάνεται το ίδιο γράμμα δείκτη πάνω από δύο φορές, διότι η έκφραση τότε δεν θα έχει σαφές νόημα, π.χ. η έκφραση $a_i b_i c_i d_i$ στερείται διανυσματικού νοήματος αφού αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ διανύσματα το άθροισμα

$$a_x b_x c_x d_x + a_y b_y c_y d_y + a_z b_z c_z d_z$$

δεν αποτελεί κάποια βαθμωτή ποσότητα. Αν θέλαμε να γράψουμε την έκφραση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) ,$$

με την αθροιστική σύμβαση θα έπρεπε να την γράψουμε

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = a_i b_i c_j d_j ,$$

κάνοντας χρήση δύο διαφορετικών εικονικών δεικτών με τη σύμβαση ότι ο κάθε εικονικός δείκτης που επαναλαμβάνεται αθροίζεται οπότε το $a_i b_i c_j d_j$ είναι το διπλό άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_i c_j d_j .$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η σειρά των στοιχείων του γινομένου δεν έχει καμία σημασία αφού πρόκειται για γινόμενο αριθμών· επομένως το παραπάνω διπλό εσωτερικό γινόμενο θα μπορούσε να γραφεί και

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = c_j a_i d_j b_i .$$

Ένα άλλο παράδειγμα: Έστω $\mathbf{R}$ ένας μετασχηματισμός στροφής. Τότε με αθροιστική σύμβαση οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο μετασχηματισμένο σύστημα αναφοράς θα είναι:

$$a'_i = R_{ij} a_j ,$$

²⁸Dummy index σημαίνει κατά λέξη βουβός δείκτης ή δείκτης που υπάρχει μόνο κατ' όνομα. Θα μπορούσε να μεταφραστεί μη δηλωτικός δείκτης, ή δείκτης μπαλαντέρ, αλλά μάλλον πιο κοινή είναι η μετάφραση που αναφέρεται στο κείμενο την οποία πρότεινε φοιτητής του Φυσικού Αθηνών.

όπου, R_{ij} , το στοιχείο της i -οστής γραμμής και της j -οστής στήλης του πίνακα στροφής και a'_i οι τρεις συντεταγμένες του διανύσματος στο νέο σύστημα αξόνων. Παρατηρήστε ότι με αυτή τη γραφή το όνομα των αξόνων παραμένει πάντοτε 1, 2, 3· αυτό που αλλάζει στους μετασχηματισμούς είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος οι οποίες τονίζονται αφού αναφέρονται σε νέους άξονες που δεν έχουν σχέση με τους αρχικούς, οι συντεταγμένες δηλαδή μετασχηματίζονται στις (a'_1, a'_2, a'_3) . Το αποτέλεσμα αυτό αφορά ένα νέο διάνυσμα το $\mathbf{a}'$ και θα πρέπει να διακρίνεται από το $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ που αποτελεί ανάλυση του αρχικού διανύσματος $\mathbf{a}$ σε νέους άξονες (παθητική στροφή).

Όπως όταν γράφουμε a_i εννοούμε τις τρεις συντεταγμένες του διανύσματος, $\mathbf{a}$, έτσι και όταν γράφουμε

$$a_i b_j ,$$

εννοούμε τους 9 αριθμούς που σχηματίζονται από όλα τα δυνατά γινόμενα των συνιστωσών των δύο διανυσμάτων που συνιστούν τον 3×3 πίνακα με στοιχείο στην i -οστή γραμμή και j -οστή στήλη το $a_i b_j$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι 3^N αριθμοί

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N}$$

όπου $i_1, i_2, \dots, i_N$ αριθμοί από το 1 ως το 3, σχηματίζουν έναν $\underbrace{3 \times 3 \times \cdots 3}_N$ υπερκύβο. Επειδή κάθε γράμμα του αντικειμένου αυτού μετασχηματίζεται ως διάνυσμα σε στροφές των αξόνων οι 3^N αυτοί αριθμοί μετασχηματίζονται σε στροφές των αξόνων με τον εξής τρόπο:

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_N j_N} a_{j_1} b_{j_2} \cdots z_{j_N} , \quad (57)$$

χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση σύμφωνα με την οποία όλοι οι δείκτες που επαναλαμβάνονται αθροίζονται, οπότε η παραπάνω έκφραση είναι συντομογραφία των N αθροισμάτων:

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_N j_N} a_{j_1} b_{j_2} \cdots z_{j_N} .$$

Γενικότερα όταν οι 3^N αριθμοί που συμβολίζονται με

$$T_{i_1 \cdots i_N}$$

μετασχηματίζονται σε στροφές των αξόνων σύμφωνα με τη σχέση (57) τότε λέγεται ότι σχηματίζουν ένα ταυστή N τάξης, και αποτελούν γενίκευση των διανυσμάτων τα οποία είναι στην ουσία ταυστές πρώτης τάξης (ενώ τα βαθμωτά μεγέθη μηδενικής τάξης).

Ποιο φυσικό μέγεθος άραγε θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με έναν ταυστή τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του 2; Θα καθυστερήσουμε λίγο την απάντηση παίζοντας λίγο με ταυστές που προκύπτουν αβίαστα στη διανυσματική ανάλυση και κάνουν τη ζωή μας ευκολότερη (αρκεί να εξασκηθούμε πρώτα στη γυμναστική των δεικτών).

Ο τανυστής δ_{ij} : Ας ξεκινήσουμε με έναν τανυστή 2ης τάξης (πίνακα 3×3) που εμφανίζεται συχνά στη μαθηματική ανάλυση φυσικών προβλημάτων. Πρόκειται για το μοναδιαίο πίνακα **I**. Με δείκτες ο τανυστής αυτός συμβολίζεται με το δέλτα του Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j. \end{cases}$$

(Δείξτε ότι ο δ_{ij} είναι πράγματι τανυστής 2ης τάξης χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας του πίνακα στροφών).

Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ και οι συνιστώσες ενός διανύσματος μπορούν να γραφούν με τη χρήση του δ_{ij} ως εξής:

$$a_i = \delta_{ij} a_j,$$

δηλαδή το δ_{ij} λειτουργεί ως φίλτρο που επιλέγει το δείκτη που δεν αθροίζεται. Η $\delta(x)$ που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 είναι η συνεχής εκδοχή του δ_{ij} σε άπειρες διαστάσεις, διότι η διακριτή εκδοχή του

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_j) \delta(x_j - x_i) dx_j = f(x_i),$$

σε 3 διαστάσεις είναι, χωρίς αθροιστική σύμβαση (ώστε να διακρίνεται το σύμβολο που αντικαθιστά το ολοκλήρωμα), η:

$$\sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ji} = f_i.$$

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j.$$

Ομοίως επειδή το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα είναι 3 θα έχουμε ότι

$$\delta_{ii} = 3$$

και όχι 1, όπως αφελώς θα απαντούσε κάποιος αμελώντας την αθροιστική σύμβαση.

Μια πολλή χρήσιμη ταυτότητα που εμφανίζεται συχνά όταν παραγωγίζουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι η

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Έχουμε δείξει ότι η βαθμίδα $\nabla \phi$ σχηματίζει ένα διάνυσμα με συνιστώσες τις $\partial \phi / \partial x_i$. Ας υπολογίσουμε τη βαθμίδα ∇r της ακτινικής απόστασης r ενός σημείου από την αρχή των αξόνων

με χρήση δεικτών. Η απόσταση r με δείκτες και αθροιστική σύμβαση γράφεται ως: $r = \sqrt{x_i x_i}$ οπότε

$$\begin{aligned}
 (\nabla r)_i &= \frac{\partial \sqrt{x_j x_j}}{\partial x_i} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} \\
 &= \frac{1}{r} x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \\
 &= \frac{1}{r} x_j \delta_{ji} \\
 &= \frac{x_i}{r} .
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε έναν διαφορετικό δείκτη j στην έκφραση της απόστασης κατά την παραγωγή για να μην εμφανιστούν τρεις ίδιοι δείκτες και καταστεί η γραφή ασαφής. Καταλήγουμε έτσι στο αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω στο παρόν Κεφάλαιο:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} ,$$

δηλαδή η βαθμίδα της ακτινικής απόστασης είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, που συμβολίζουμε και ως $\hat{\mathbf{r}}$. Επίσης ορίζουμε τη Λαπλασιανή (Laplacian) ως τον βαθμωτό τελεστή που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Για να εξασκηθούμε περαιτέρω στους δείκτες θα δείξουμε ότι αν $r \neq 0$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \text{ }^{29} .$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i}{r^3} \right) \\
 &= -\frac{1}{r^3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \frac{3x_i x_i}{r^5} \\
 &= -\frac{\delta_{ii}}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 .
 \end{aligned}$$

²⁹Στο Κεφάλαιο 13 θα δείξουμε ότι η Λαπλασιανή αυτή είναι στην πραγματικότητα μια δέλτα συνάρτηση αφού αν και 0 παντού έχει περίεργες ιδιότητες όταν ολοκληρώνεται.

Ο τανυστής ϵ_{ijk} : Ένας άλλος πολύ χρήσιμος τανυστής είναι ο καλούμενος *πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 3ης τάξης ϵ_{ijk}* που είναι μηδέν εάν δύο τουλάχιστον δείκτες είναι ίσοι (21 μηδενικά στοιχεία από τα 27 συνολικά) και έχει 6 μη μηδενικά στοιχεία. Από αυτά, τα 3 λαμβάνουν την τιμή +1 όταν το (i, j, k) αποτελεί κυκλική μετάθεση των $(1, 2, 3)$, δηλαδή το (i, j, k) είναι ένας από τους ακόλουθους συνδυασμούς $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$. Τα υπόλοιπα 3 λαμβάνουν τη τιμή -1 όταν το (i, j, k) αποτελεί κυκλική μετάθεση των $(2, 1, 3)$, δηλαδή όταν το (i, j, k) είναι ένας από τους ακόλουθους συνδυασμούς $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$. Έτσι μερικά στοιχεία του ϵ_{ijk} είναι:

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{122} = 0, \epsilon_{321} = -1, \epsilon_{231} = +1.$$

(Προσπαθήστε να αποδείξετε ότι το περίεργο αυτό αντικείμενο είναι πράγματι τανυστής, δηλαδή ότι

$$\epsilon_{abc} = R_{ai} R_{bj} R_{ck} \epsilon_{ijk},$$

ελέγχοντας αν το αποτέλεσμα είναι μηδενικό όταν δύο δείκτες από τους (abc) είναι ίδιοι.)

Θεωρήστε τώρα το $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ το οποίο ορίζει μία τριάδα αριθμών, δεδομένου ότι οι δείκτες j και k είναι εικονικοί (αθροίζονται). Η τριάδα αυτή είναι:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{1jk} a_j b_k, \epsilon_{2jk} a_j b_k, \epsilon_{3jk} a_j b_k) &= (\epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2, \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3, \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned} \quad (58)$$

Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τριάδας προκύπτει από το προηγούμενο με κυκλική μετάθεση των $(1, 2, 3)$. Σε επόμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 8) θα αποδείξουμε ότι η τριάδα αυτή σχηματίζει διάνυσμα αν οι τριάδες a_i και b_i είναι συντεταγμένες διανυσμάτων.

Επίσης μπορείτε να επιβεβαιώσετε εκτελώντας τις πράξεις ότι η ορίζουσα του 3×3 πίνακα A_{ij} είναι:

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}.$$

Τέλος μια πολύ χρήσιμη ταυτότητα είναι η ακόλουθη που αφορά τους $3^4 = 81$ αριθμούς:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (59)$$

Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση πρέπει να εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $j = l$ και $k = m \neq j$ τότε και τα δύο ϵ έχουν το ίδιο πρόσημο (ή είναι μηδέν), οπότε όταν το i λάβει την τρίτη τιμή (διαφορετική από τα j και k) το γινόμενο $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}$ θα γίνει ίσο με +1. Αν όμως $j = m$ και $k = l \neq j$ τα δύο ϵ έχουν αντίθετο πρόσημο οπότε όταν το i λάβει την τρίτη τιμή (διαφορετική από τα j και k) το γινόμενο $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}$ θα γίνει ίσο με -1 . Από τις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν τα πρόσημα των γινομένων των δ . Μέσω αυτής της ταυτότητας μπορούμε να αποδείξουμε αρκετά σύνθετες διανυσματικές ταυτότητες στις οποίες εμπλέκεται η βαθμίδα ∇ .

Αν και τα δύο παραδείγματα τανυστών που είδαμε παραπάνω μοιάζουν καθαρά μαθηματικά αντικείμενα, στη Φυσική υπάρχουν πολλά μεγέθη τα οποία έχουν τη δομή τανυστή και οι εξισώσεις στις οποίες εμπλέκονται είναι τανυστικές εξισώσεις, στις οποίες τα τανυστικά αντικείμενα

του αριστερού μέλους οφείλουν να ταυτίζονται με τα τανυστικά αντικείμενα του δεξιού μέλους. Μια τέτοια εξίσωση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$T_{ij} = a_i b_j$$

με $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξης) και $\mathbf{T}$ τανυστή δεύτερης τάξης, αλλά δεν θα μπορούσαμε ποτέ να δεχτούμε μια εξίσωση της μορφής

$$a_i = T_{ij} .$$

Ένα φυσικό μέγεθος το οποίο συμπεριφέρεται ως τανυστής 2ης τάξης είναι η πίεση, αφού μια επιφάνεια μπορεί να πιεστεί με τρεις τρόπους: μια κάθετα στην επιφάνεια και δύο στους δύο άξονες παράλληλα με την επιφάνεια (διατμητική τάση). Όντας τρεις οι δυνατές επιφάνειες (στα 3 επίπεδα), είναι 9 οι ανεξάρτητες συνιστώσες της πίεσης ενός ρευστού:

$$p_{ij} = F_j / S_i$$

όπου F_j είναι η j συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στην επιφάνεια S_i η οποία είναι κάθετη στην i κατεύθυνση.

Ένα άλλο φυσικό μέγεθος που περιγράφεται και πάλι από τανυστή 2ης τάξης είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού³⁰. Στα πρώτα μαθήματα μηχανικής που παίρνει κανείς διδάσκεται ότι η ροπή αδράνειας είναι ένα μέγεθος που περιγράφει την αδράνεια ενός αξονικά συμμετρικού στερεού σε περιστροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται ως ακολούθως

$$I = \int_V dm r_{\perp}^2$$

όπου $r_{\perp}$ η απόσταση του dm από τον άξονα συμμετρίας. Τι συμβαίνει όμως αν το αντικείμενο περιστραφεί γύρω από κάποιο άλλο άξονα; Η απάντηση είναι ότι πρέπει να ληφθούν υπόψη όλες οι ακόλουθες 9 ποσότητες

$$I_{ij} = \int_V dm x_i x_j . \quad (60)$$

Αν για παράδειγμα ο άξονας συμμετρίας του αντικειμένου είναι ο z , τότε $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$, οπότε $I = I_{11} + I_{22} = \tilde{I}_{33}$ (βλ. υποσημείωση 28). Η πλήρης μελέτη όμως του τρόπου με τον οποίο θα κινηθεί το σώμα στο χώρο, ακόμη και αν είναι ελεύθερο από δυνάμεις, απαιτεί τη γνώση και των 9 ποσοτήτων I_{ij} .

³⁰Ο πραγματικός τανυστής της ροπής αδράνειας ενός στερεού που υπεισέρχεται στις σχέσεις που αφορούν τη δυναμική των στερεών σωμάτων δεν είναι ακριβώς αυτός που δίνεται παρακάτω στη σχέση (60), αλλά ο

$$\tilde{I}_{ij} = \delta_{ij} I_{kk} - I_{ij} ,$$

με τη βοηθητική χρήση του τανυστή δέλτα του Kronecker.

Οι τανυστές είναι αντικείμενα εξέχουσας σημασίας στη Γενική Σχετικότητα, όπου όλες οι σχέσεις που συνδέουν φυσικά μεγέθη είναι τανυστικές. Για παράδειγμα η βασική εξίσωση της Σχετικότητας που συνδέει την καμπύλωση του χώρου (που περιγράφεται από τον τανυστή καμπυλότητας $G_{\alpha\beta}$) με την πυκνότητα ύλης-ενέργειας (που περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\alpha\beta}$) έχει την τανυστική μορφή

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 7

- Τα διανύσματα του τριδιάστατου χώρου δεν είναι απλώς διατεταγμένες τριάδες αριθμών. Έχουν ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων γεωμετρική υπόσταση και επομένως θα πρέπει να υπακούουν σε κάποιους κανόνες μετασχηματισμού των συντεταγμένων τους σε αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Συγκεκριμένα πρέπει να αλλάζουν όπως και το διάνυσμα θέσης σε στροφές του συστήματος συντεταγμένων.
- Ορίζονται οι πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση διανυσμάτων μέσω του κανόνα του παραλληλογράμμου. Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων είναι διττός. Το εσωτερικό γινόμενο παράγει βαθμωτά μεγέθη, ενώ το εξωτερικό νέα διανύσματα. Κανενός άλλου είδους «πολλαπλασιασμός» δεν μπορεί να έχει φυσικό (γεωμετρικό) νόημα.
- Ο διανυσματικός τελεστής ανάδελτα ∇ είναι ένα διάνυσμα.
- Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ενός διανύσματος σε στροφές του συστήματος αναφοράς είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{RR}^T = \mathbf{I}$. Εκτός πάο τους πίνακες στροφής ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι και οι μετασχηματισμοί ομοτιμίας που προκαλούν κατοπτρισμό των διανυσμάτων. Τα διανύσματα που συμπίπτουν με τα κατοπτρικά τους ονομάζονται ψευδοδιανύσματα (π.χ. ροπή).
- Το $\nabla\Phi(\mathbf{r})$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια σταθερού Φ .
- Η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$ μετράει την τοπική ροή του πεδίου σε μια κλειστή απειροστή επιφάνεια προς τον στοιχειώδη όγκο που αυτή περικλείει. Το θεώρημα του Gauss μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ροή ενός διανυσματικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια από το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης του πεδίου.
- Οι συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως η κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού πεδίου.
- Γενίκευση των διανυσμάτων αποτελούν οι τανυστές με D^k συνιστώσες, όπου D η διάσταση του χώρου και k η τάξη του τανυστή. Τα διανύσματα είναι τανυστές τάξης 1. Οι εξισώσεις της Φυσικής είναι εξισώσεις μεταξύ τανυστών ίδιας τάξης.
- Εξαιρετικής σημασίας τανυστές (στις 3 διαστάσεις) αποτελούν οι δ_{ij} (δέλτα του Kronecker) και ϵ_{ijk} (πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής).