

Κεφάλαιο 6

Διέγερση - Συντονισμός

1 Ταλαντωτής σε διέγερση

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με έναν ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή είτε χωρίς είτε με απόσβεση. Προφανώς ο δεύτερος είναι πιο ρεαλιστικό αντικείμενο, αλλά ο απλός ιδανικός (χωρίς ανάλωση) ταλαντωτής μας έδωσε τα εργαλεία τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να περιγράψουμε έναν πραγματικό ταλαντωτή ο οποίος όμως υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F(t). \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική εξίσωση βέβαια, αλλά τώρα είναι μη ομογενής. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ξέρουμε ότι η λύση της μπορεί να αναλυθεί σε δύο μέρη. Το ένα μέρος είναι η λεγόμενη *ομογενής λύση* που μηδενίζει το αριστερό μέλος της εξίσωσης· πρόκειται για την $x(t)$ που όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφει έναν αποσβυνόμενο αρμονικό ταλαντωτή. Μια σημαντική πληροφορία για τη συνέχεια της ανάλυσής μας είναι ότι η λύση αυτή σταδιακά θα εξασθενήσει τόσο πολύ ώστε μετά από τον χαρακτηριστικό χρόνο απόσβεσης του ταλαντωτή μπορεί με ασφάλεια να εκληφθεί ως μηδενική. Το άλλο κομμάτι της λύσης είναι η *μη ομογενής λύση* που κατ' ουσίαν περιγράφει τη λύση της πλήρους εξίσωσης, δηλαδή εκείνη τη συνάρτηση $x(t)$ που λύνει την (1) μονοσήμαντα χωρίς να εξαρτάται από καμιά ελεύθερη παράμετρο (όπως συμβαίνει με την ομογενή λύση). Πώς όμως θα μαντέψουμε τη λύση αυτής της δύσκολης διαφορικής εξίσωσης; Μην ξεχνάτε ότι η $F(t)$ είναι τυχαία.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης, όντας γραμμικό, χαρακτηρίζεται από εκθετικές –όπως μάθαμε– λύσεις και μάλιστα μιγαδικές. Μήπως να δοκιμάζαμε να βρούμε παρόμοιου τύπου λύσεις στην περίπτωση που και το δεξί μέλος είναι μια τέτοιου τύπου συνάρτηση; Προφανώς αυτό είναι μια ντρίπλα προκειμένου να καταφέρουμε (ίσως) να βρούμε κάποια απάντηση σε μια ειδική περίπτωση που προς το παρόν δεν φαίνεται να έχει καμία σχέση με το γενικό πρόβλημα. Ας το δοκιμάσουμε όμως:

$$m\ddot{z} + 2m\gamma\dot{z} + kz = F_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Προσέξτε ότι αντικαταστήσαμε τη ζητούμενη συνάρτηση $x(t)$ με τη μιγαδική συνάρτηση $z(t)$ αφού αποφασίσαμε εξαρχής να εργαστούμε στο πεδίο των μιγαδικών. Είναι εύκολο να φανταστεί κανείς ότι η ζητούμενη συνάρτηση $z(t)$ σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

αφού όλες οι παράγωγοι του αριστερού μέλους θα αφήσουν τη χρονική εξάρτηση της $z(t)$ αναλλοίωτη ώστε να ταιριάζει με τη χρονοεξάρτηση του δεξιού μέλους. Σε αντίθεση με τον ελεύθερο

αρμονικό ταλαντωτή του οποίου την συχνότητα τη βρήκαμε λύνοντας μια αλγεβρική εξίσωση, εδώ δεν χρειάστηκε καν να υπολογίσουμε τη συχνότητα: τη θέσαμε ίδια με αυτήν της διέγερσης χωρίς πολύ σκέψη· αν δεν το κάναμε πώς θα “συντονίζαμε” το αριστερό με το δεξί μέλος; Η αλγεβρική εξίσωση που θα χρειαστεί να λύσουμε στη συνέχεια θα αφορά την τιμή του z_0 μόνο.

Με απλή αντικατάσταση και διαγραφή του χρονοεξαρτώμενου όρου $e^{i\omega t}$ θα έχουμε

$$-m\omega^2 z_0 + 2im\gamma\omega z_0 + kz_0 = F_0. \quad (3)$$

δηλαδή

$$z_0 = \frac{F_0/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega} \quad (4)$$

όπου θέσαμε ως ω_0 την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή $\sqrt{k/m}$. Η λύση ήταν απλή και δεν μας ταλαιπώρησε καθόλου (ούτε καν λύσαμε κάποια πολυωνυμική εξίσωση). Ποιο ακριβώς φυσικό πρόβλημα όμως λύσαμε. Τι σημαίνει μια τέτοια μιγαδική λύση;

Ας πάρουμε το πραγματικό μέρος της διαφορικής εξίσωσης (2):

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t), \quad (5)$$

όπου $x(t) = \Re[z(t)]$. Αυτή είναι μια καθαρά φυσική διαφορική εξίσωση που περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος διεγείρεται από μια αρμονική δύναμη (με τη μορφή συνημιτόνου). Ποια είναι η λύση; Απλά, το πραγματικό μέρος της ακατάληπτης μιγαδικής λύσης που βρήκαμε προωτέρα για το γενικότερο μιγαδικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re \left[\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \Re \left[((\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega) e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} |Z| \Re [e^{i\phi} e^{i\omega t}] \\ &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} |Z| \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (6)$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα $|Z|$ και ϕ είναι το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $Z = (\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega$. Από τη μιγαδική ανάλυση γνωρίζουμε ότι

$$|w| = \sqrt{(\Re[Z])^2 + (\Im[Z])^2} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

και

$$\phi = \arg Z = \tan^{-1} \left(\frac{\Im[Z]}{\Re[Z]} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\gamma/\omega}{(\omega_0/\omega)^2 - 1} \right) \quad (7)$$

επομένως

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

με ϕ τη φάση που υπολογίστηκε στη σχέση (7). Ο λόγος που προτιμήσαμε να γράψουμε τη φάση με αρνητικό πρόσημο θα γίνει κατανοητός στη συνέχεια.

Παρατηρήσεις:

1. Το αποτέλεσμα που καταλήξαμε με αυτή την ανορθόδοξη τακτική (διατυπώνοντας δηλαδή το πρόβλημα σε μιγαδική μορφή) είναι ότι η κίνηση του ταλαντωτή με ανάλωση δεν είναι μια αποσβεσμένη ταλάντωση, αλλά μια τέλεια αρμονική κίνηση δίχως απώλειες.
2. Η αμείωτη ταλάντωση διενεργείται όχι με τη συχνότητα του ταλαντωτή, ούτε την ενεργή συχνότητα της εξασθενημένης ταλάντωσης, αλλά με τη συχνότητα του διεγέρτη. Οποιαδήποτε άλλη συχνότητα χάνεται.
3. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεν γραμμική συνάρτηση της διεγείρουσας δύναμης F_0 αλλά έχει μια πολύ πιο σύνθετη εξάρτηση από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης την οποία θα μελετήσουμε παρακάτω.
4. Η ταλάντωση του ταλαντωτή αν και έχει την ίδια περιοδικότητα με τη διέγερση δεν είναι συγχρονισμένος με αυτήν όπως πιστοποιεί η μη μηδενική φάση ϕ . Το αρνητικό μάλιστα πρόσημο της ϕ (γεγονός το οποίο είναι προφανές σε μικρές τιμές του ω που το όρισμα της $\tan^{-1}$ είναι θετικό) υποδηλώνει μια καθυστέρηση στην απόκριση του ταλαντωτή σε σχέση με τη διέγερση. Με άλλα λόγια ο ταλαντωτής φτάνει στο μέγιστο του πλάτους του αργότερα από τη στιγμή που η διεγείρουσα δύναμη φτάσει στη μέγιστη τιμή της.
5. Η λύση που γράψαμε δεν είναι η γενική λύση του προβλήματος παρά μόνο η ειδική λύση που λύνει τη μη ομογενή εξίσωση (5). Αν θέλαμε να είμαστε ακριβείς, έτσι ώστε η λύση που γράφουμε να είναι συμβατή με τις όποιες αρχικές συνθήκες καθορίζουν την κατάσταση του ταλαντωτή μας τη χρονική στιγμή $t = 0$, θα έπρεπε να προσθέσουμε δίπλα στην ειδική, λύση τη λύση της ομογενούς εξίσωσης με κατάλληλες παραμέτρους ώστε να ταιριάζει αυτή με τις αρχικές συνθήκες του πειράματός μας:

$$x_{\text{γεν}}(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi) + e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}) \quad (9)$$

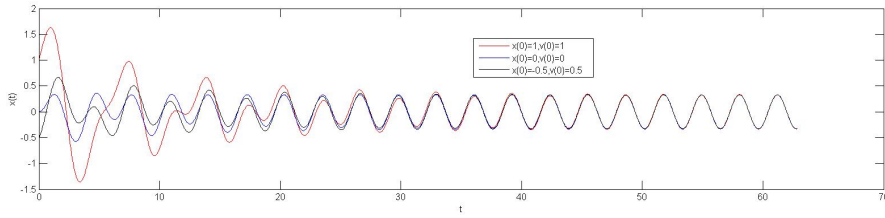
με

$$x(0) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\phi) + (A + B) \quad (10)$$

και

$$v(0) = -\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\omega \sin(\phi) + \left[A(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma) - B(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma) \right]. \quad (11)$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις οδηγούν στον υπολογισμό των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων A, B . **Προσέξτε** ότι οι τιμές που θα λάβουμε για τις A, B από τις παραπάνω σχέσεις δεν συμπίπτουν με αυτές που θα παίρναμε αν εξισώναμε τις αρχικές τιμές για το x και το v της ομογενούς μόνο λύσης με τα $x(0)$ και $v(0)$. Οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να τεθούν στη γενική λύση ενός προβλήματος.



Σχήμα 1: Και οι τρεις αρχικές συνθήκες που αναγράφονται στη λεζάντα, οδηγούνται τελικά στην ίδια ταλάντωση $x(t)$ μετά από κάποια μεταβατική περίοδο. Εδώ $F_0/m = 1$, $\omega = 2$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.1$.

Μολονότι κάναμε όλον αυτό τον κόπο για να γράψουμε τη γενική λύση, αυτή είναι κατ' ουσίαν υπερβολική και άχρηστη. Η μερική λύση είναι το μόνο που χρειαζόμαστε. Η ομογενής λύση είναι εκ φύσεως περιορισμένης εμβέλειας. Μετά από μερικούς χαρακτηριστικούς χρόνους του ταλαντωτή αυτή θα σβήσει. Το μόνο που θα μείνει είναι η ειδική λύση. Οι παράμετροι A, B που συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες εμπεριέχονται μόνο στο ομογενές κομμάτι της λύσης. Επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι καταδικασμένες σε λήθη. Όποια και αν είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος, αυτό, μετά από κάποια μεταβατική περίοδο (το εύρος της οποίας εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή ω_0, γ) θα κινείται σύμφωνα με τη λύση (8). Όλα τα χαρακτηριστικά πλέον της κίνησης σχετίζονται αποκλειστικά με τα στοιχεία της διεγείρουσας δύναμης (F_0, ω) και τις φυσικές παραμέτρους του ταλαντωτή (m, k, γ).

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η μη ομογενής λύση που κατασκευάσαμε είναι άσχετη με το ότι η δύναμη είναι συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Η λύση θα είναι ακριβώς ίδια ακόμη και αν η δύναμη ήταν ημιτονοειδής. Η παρατήρηση αυτή σχετίζεται με την επιλογή μας παραπάνω να λάβουμε το πραγματικό μέρος της (3). Αν παίρναμε το φανταστικό μέρος θα είχαμε τη λύση της

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t).$$

2 Συντονισμός

Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλονται τα χαρακτηριστικά της κίνησης του διεγερόμενου ταλαντωτή με τη συχνότητα της διέγερσης. Όπως είδαμε και παραπάνω το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται σύμφωνα με την έκφραση

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (12)$$

Από τη μορφή της έκφρασης αυτής παρατηρεί κανείς ότι για $\omega \ll \omega_0$

$$x_0 \Big|_{\omega \rightarrow 0} \simeq F_0/(m\omega_0^2) = F_0/k, \quad (13)$$

δηλαδή το πλάτος είναι όσο θα ήταν η επιμήκυνση του ελατηρίου αν ασκούσαν πάνω του δύναμη ίση με το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης. Αναμενόμενο; Μα φυσικά· αφού η συχνότητα της διέγερσης είναι σχεδόν μηδενική η μάζα δέχεται μια κατ' ουσίαν σταθερή δύναμη F_0 και το ελατήριο επιμηκώνεται αναλόγως.

Από την άλλη πλευρά, αν η συχνότητα της διέγερσης είναι εξαιρετικά μεγάλη, πολύ μεγαλύτερη από τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ω_0 , το πλάτος της ταλάντωσης του ταλαντωτή φθίνει ως

$$x_0 \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \simeq \frac{F_0/m}{\omega^2}. \quad (14)$$

Η διεγείρουσα δύναμη μεταβάλλεται τόσο γρήγορα που ο ταλαντωτής δεν προλαβαίνει να ανταποκριθεί και να ακολουθήσει την ταχύτερη εναλλαγή της φοράς της δύναμης.

Τέλος αν η συχνότητα της διέγερσης ρυθμιστεί να είναι ίση με τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ω_0 , το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

$$x_0 \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} = \left(\frac{\omega_0}{2\gamma}\right) x_0 \Big|_{\omega \rightarrow 0}, \quad (15)$$

δηλαδή πολύ μεγαλύτερο του “πλάτους της ταλάντωσης” σε σχεδόν σταθερή διέγερση, εφόσον ο ταλαντωτής παρουσιάζει πολύ μικρή απόσβεση.

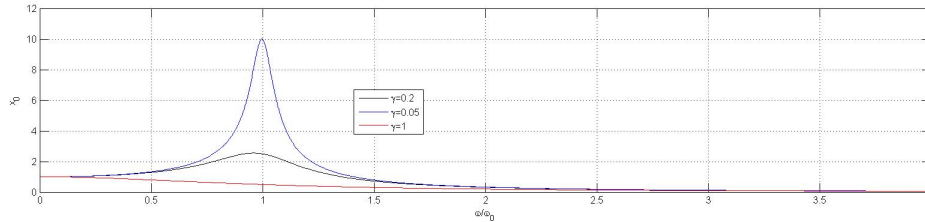
Από τις τρεις αυτές περιπτώσεις καταλαβαίνουμε ότι η καμπύλη που περιγράφει τη σχέση πλάτους – συχνότητας διέγερσης έχει κωδωνοειδή μορφή (βλ. σχήμα 2) με το μέγιστό της να εμφανίζεται σε μια συχνότητα κοντά στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Η αλήθεια είναι ότι για $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$ το άνοιγμα της καμπάνας είναι τέτοιο ώστε δεν υπάρχει μεγιστοποίηση του πλάτους σε κάποια ενδιάμεση συχνότητα (όπως θα δούμε παρακάτω). Ο απλούστερος τρόπος για τη μελέτη των χαρακτηριστικών της καμπύλης αυτής είναι να ξαναγράψει το πλάτος στη μορφή

$$x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [(1-y)^2 + cy]^{-1/2} \quad (16)$$

με $y \equiv (\omega/\omega_0)^2$ και $c \equiv (2\gamma/\omega_0)^2$. Η παραπάνω υπόρριξη ποσότητα είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $y^2 + (c-2)y + 1$ που εκ κατασκευής (ως άθροισμα δύο τετραγώνων στην αρχική μορφή (12)) δεν μπορεί να μηδενίζεται για καμιά τιμή του $y > 0$ (το y είναι εκ κατασκευής θετικό). Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η υπόρριξη ποσότητα (επομένως και το μεγαλύτερο πλάτος) είναι για $y_{\max} = (2-c)/2 = 1 - 2\gamma^2/\omega_0^2$. Όταν λοιπόν η παράμετρος $\gamma = \omega_0/\sqrt{2}$ η συχνότητα που το πλάτος μεγιστοποιείται είναι η μηδενική. Για γ μικρότερο από την τιμή αυτή κατωφλίου, η καμπύλη συντονισμού έχει το χαρακτηριστικό κωδωνοειδές σχήμα και η συχνότητα που εμφανίζεται το μέγιστο πλάτος είναι

$$\omega_{\text{συντ}} = \omega_0 \sqrt{y_{\max}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \quad (17)$$

δηλαδή σε μια συχνότητα κάπως μικρότερη της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή. Για $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$ η καμπύλη συντονισμού είναι γνησίως φθίνουσα και το μέγιστο πλάτος επιτυγχάνεται για $\omega = 0$.



Σχήμα 2: Η καμπύλη συντονισμού (πλάτος απόκρισης ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης) για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης (πολύ ασθενής απόσβεση $\gamma = 0.05$, μέτρια απόσβεση $\gamma = 0.2$, ισχυρή απόσβεση $\gamma = 1$). Πλάτος ίσον με 1 αντιστοιχεί στην τιμή $F_0/(m\omega_0^2)$.

Καθώς η παράμετρος γ τείνει στο μηδέν το πλάτος της ταλάντωσης απειρίζεται και ο απειρισμός αυτός εμφανίζεται ακριβώς στη φυσική συχνότητα. Εδώ όμως προκύπτει το εξής ζήτημα: Πώς καταφέρνει ο ταλαντωτής να φτάσει σε άπειρο πλάτος σε πεπερασμένο χρόνο (το χρόνο μετάβασης στη σταθερή κατάσταση της μη ομογενούς λύσης); Η απάντηση είναι ότι αν $\gamma = 0$ ο μεταβατικός χρόνος είναι άπειρος αφού ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $1/\gamma$ στην ασθενή απόσβεση. Ο ακριβής τρόπος που συμβαίνει αυτή η μετάβαση θα αποτελέσει ξεχωριστό εδάφιο παρακάτω.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην αρμονικά διεγερμένη ταλάντωση και ας επικεντρωθούμε στη φάση καθυστερημένης απόκρισης του ταλαντωτή (σε σχέση με τη διέγερση). Όπως είδαμε η φάση αυτή δίνεται από τη σχέση

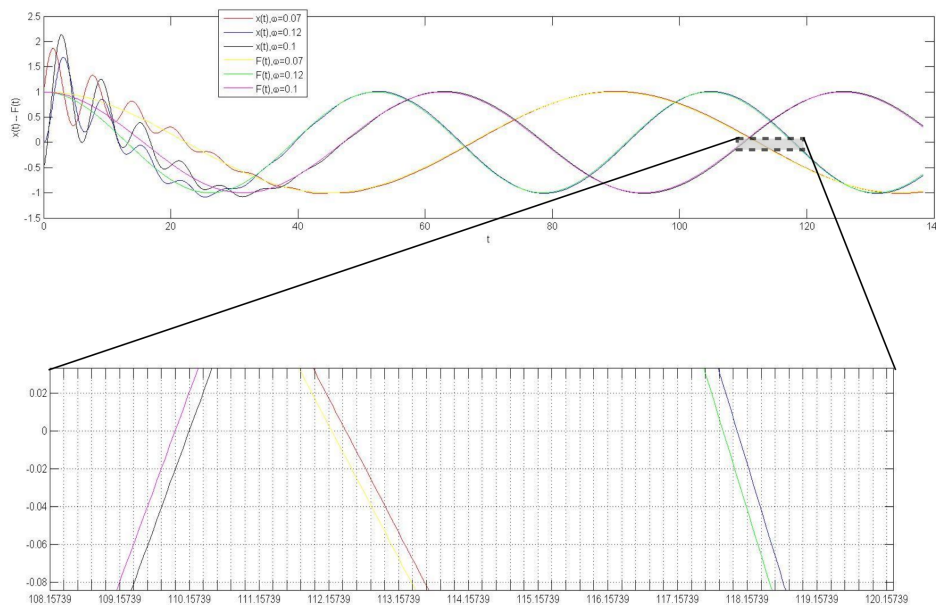
$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\gamma/\omega}{(\omega_0/\omega)^2 - 1} \right].$$

Για $\omega \rightarrow 0$ η φάση είναι $\phi \simeq -\tan^{-1}[2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)] \simeq -2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)$, δηλαδή ο ταλαντωτής καθυστερεί να φτάσει στο ακρότατο σημείο σε σχέση με τη διεγείρουσα δύναμη κατά μια

φάση που είναι ανάλογη της διεγείρουσας συχνότητας ω . Ο αντίστοιχος χρόνος καθυστέρησης είναι σταθερός και ανεξάρτητος από τη συχνότητα αυτή

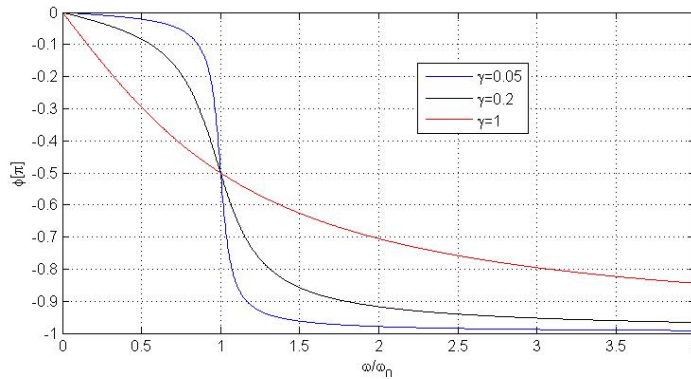
$$t_{\text{καθ}} = \frac{|\phi|}{\omega} = \frac{2\gamma}{\omega_0^2}. \quad (18)$$

Αυτό είναι εντυπωσιακό· ένας ταλαντωτής με φυσική συχνότητα ω_0 και παράμετρο απόσβεσης γ θα παρουσιάζει την ίδια αυτή χρονική καθυστέρηση ανεξάρτητα αν η αρμονική διέγερση έχει συχνότητα $\omega = 0.1\omega_0$ ή $\omega = 0.001\omega_0$!



Σχήμα 3: Τρεις διαφορετικές συχνότητες ($\omega = 0.07, \omega = 0.1, \omega = 0.12$) διεγείρουν το ίδιο σύστημα ($\omega_0 = 1, \gamma = 0.1$). Και οι τρεις περιπτώσεις φτάνουν γρήγορα στην τελική τους απόκριση. Και στις τρεις περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο μεγεθυμένο διάγραμμα η χρονική καθυστέρηση στην απόκριση είναι ίδια (παρατηρήστε τις χρονικές αποστάσεις των ζευγαριών των καμπυλών στον άξονα t).

Καθώς η συχνότητα της διέγερσης αυξάνει και γίνεται συγκρίσιμη με την ω_0 η φάση μεγαλώνει (αρνητικά) και για $\omega = \omega_0$ η φάση λαμβάνει τη χαρακτηριστική τιμή $-\pi/2$. Πέρα από αυτή τη συχνότητα το όρισμα της $\tan^{-1}$ στη σχέση (7) καθίσταται αρνητικό. Η $\tan^{-1}$ είναι πλειότιμη συνάρτηση και θα πρέπει κανείς να ορίσει καταλλήλως το πεδίο τιμών της. Προκειμένου να είναι συνεχής συνάρτηση η $\phi(\omega)$ είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι για $\omega > \omega_0$ η φάση παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$. Έτσι για $\omega \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow -\pi$, δηλαδή ο ταλαντωτής θα βρίσκεται σε αντίθετη φάση με τη διεγείρουσα δύναμη: όταν η δύναμη βρίσκεται στη μέγιστη θετική της τιμή, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική της. Όταν πιάσετε μια κούνια και αρχίσετε να την ταρακουνάτε πολύ γρήγορα μπορείτε να αισθανθείτε αυτή τη διαφορά φάσης κατά π . Στο διάγραμμα 4 φαίνεται η εξέλιξη της φάσης με τη συχνότητα της διέγερσης σε όλο το εύρος από πολύ μικρότερες μέχρι πολύ μεγαλύτερες συχνότητες σε σχέση με την ω_0 .



Σχήμα 4: Η συνάρτηση $\phi(\omega)$ για τρεις διαφορετικές αποσβέσεις ($\gamma = 0.05, \gamma = 0.2, \gamma = 1$). Και στις τρεις περιπτώσεις η καθυστέρηση φάσης είναι $\pi/2$ στη συχνότητα $\omega = \omega_0$.

Αν συγκρίνει κανείς το διάγραμμα του πλάτους της απόκρισης και της διαφοράς φάσης παρατηρεί ότι όσο πιο μεγάλη η απόσβεση τόσο πιο αργές είναι οι μεταβολές (και του πλάτους και της διαφοράς φάσης) κοντά στο συντονισμό ($\omega \simeq \omega_0$). Για να ποσοτικοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση ας επιστρέψουμε στην έκφραση (16). Το σχετικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$\left(y + \frac{c-2}{2}\right)^2 + \left[y + \left(\frac{c-2}{2}\right)^2\right]^2.$$

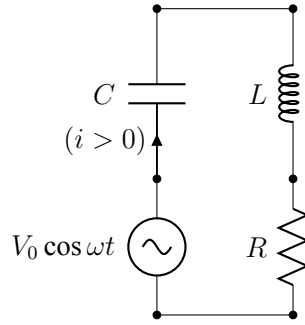
Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για $\gamma \ll \omega_0$, μια απόκλιση από τη συχνότητα συντονισμού κατά $\pm\gamma$ θα οδηγήσει σε $1/\sqrt{2}$ περίπου φορές μικρότερο πλάτος από το μέγιστο του συντονισμού. Αντίστοιχα η φάση θα είναι διαφορετική από το $-\pi/2$ του συντονισμού κατά περίπου $\pi/4$ αφού

$$\frac{2\gamma(\omega_0 \pm \gamma)}{\omega_0^2 - (\omega_0 \pm \gamma)^2} \simeq 1 + \mathcal{O}(\gamma/\omega_0)$$

Συνοπτικά λοιπόν ένας ταλαντωτής που διεγείρεται από μια αρμονική δύναμη ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη με πλάτος που εξαρτάται από τη σχέση της διεγείρουσας συχνότητας και της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή. Κοντά (αλλά όχι ακριβώς) στη φυσική συχνότητα το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται ενώ εκατέρωθεν αυτής το πλάτος είναι μικρότερο. Το εύρος της καμπάνας στην καμπύλη συντονισμού είναι 2γ . Παράλληλα υπάρχει μια καθυστέρηση φάσης στην απόκριση του ταλαντωτή σε σχέση με τη διεγείρουσα δύναμη. Η διαφορά φάσης μεγαλώνει με τη συχνότητα και καθίσταται ακριβώς ίση με $\pi/2$ για $\omega = \omega_0$. Σε απόσταση γ γύρω από αυτή τη συχνότητα η φάση μεταβάλλεται κατά $\pi/4$.

3 * Συσχέτιση με ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Θα ήταν εποικοδομητικό να δούμε τις αναλογίες ανάμεσα στις μηχανικές ταλαντώσεις με διέγερση και στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις εναλλασσόμενου ρεύματος. Ένα κύκλωμα που απο-



Σχήμα 5

τελείται από ένα ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L , μια ωμική αντίσταση R και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C συνδεδεμένα σε σειρά με μια πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος πλάτους V_0 και συχνότητας ω , διαρρέεται από ταλαντούμενο ρεύμα, το πλάτος του οποίου σχετίζεται με τη συχνότητα της πηγής και τα φυσικά χαρακτηριστικά που χαρακτηρίζουν τα τρία ηλεκτρικά στοιχεία του κυκλώματος. Πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t). \quad (19)$$

Στην παραπάνω σχέση $L di/dt$ είναι η τάση αυτεπαγωγής που εμφανίζεται στα άκρα του πηνίου όταν αυτό διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα, iR είναι η πτώση τάσης πάνω στην αντίσταση και Q/C είναι η τάση του πυκνωτή, ενώ $V_0 \cos(\omega t)$ είναι η αρμονικά μεταβαλλόμενη τάση της πηγής εναλλασσόμενου ρεύματος. Η σχέση μεταξύ ρεύματος i και φορτίου Q του πυκνωτή είναι $i = dQ/dt$ αφού αν ακολουθήσουμε τη συμβατική φορά που φαίνεται στο σχήμα ένα θετικό ρεύμα οδηγεί σε φόρτιση του πυκνωτή. Έτσι, ξαναγράφοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς το φορτίο του πυκνωτή καταλήγουμε στην

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos(\omega t).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ακριβώς ίδια με την (5) αρκεί να κάνει κανείς τις ακόλουθες αντικαταστάσεις φυσικών μεγεθών

$$Q \rightarrow x, \quad L \rightarrow m, \quad R \rightarrow 2m\gamma, \quad \frac{1}{C} \rightarrow k, \quad V_0 \rightarrow F_0.$$

Επομένως η λύση όσον αφορά στη χρονική εξέλιξη του φορτίου είναι της ίδιας μορφής με τη λύση για το μηχανικό ταλαντωτή (8). Μπορούμε λοιπόν κατευθείαν να γράψουμε

$$Q(t) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (20)$$

με

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right). \quad (21)$$

Συνήθως σε ένα κύκλωμα μας ενδιαφέρει το ρεύμα το οποίο το διαρρέει που σύμφωνα με τα προηγούμενα έχει τη μορφή

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{V_0 C \omega}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi). \quad (22)$$

Η εξάρτηση του πλάτους του ρεύματος από τη συχνότητα είναι ελαφρώς διαφορετικού τύπου από το αντίστοιχο πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης, εξαιτίας του επιπλέον παράγοντα ω στον αριθμητή. Η έκφραση για το πλάτος μεγιστοποιείται ακριβώς στη φυσική συχνότητα του κυκλώματος $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.¹ Επομένως κάτι που μας έδωσε την ευκαιρία να ανακαλύψουμε η μελέτη των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι ότι στις μηχανικές ταλαντώσεις η ταχύτητα (το αντίστοιχο του ρεύματος) και όχι η θέση παρουσιάζει μέγιστο πλάτος στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Αυτό συνεπάγεται μεγιστοποίηση του πλάτους σε μια μικρότερη της φυσικής συχνότητας συχνότητα.²

Μια εποπτική ανάλυση που χρησιμοποιούν συνήθως οι ηλεκτρολόγοι στην ανάλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος είναι αυτή των περιστρεφόμενων διανυσμάτων. Όλα τα αρμονικά μεταβαλλόμενα φυσικά μεγέθη παριστάνονται με ομαλά περιστρεφόμενα διανύσματα επί του επιπέδου, ενώ οι μετρούμενες τιμές αυτών αναπαρίστανται από τις προβολές τους σε κάποιον άξονα, συνήθως τον x .³ Η ταχύτητα, όντας η παράγωγος της θέσης που ως τελεστής μετατρέπει το $\cos(\omega t)$ σε $-\omega \sin(\omega t) = \omega \cos(\pi/2 + \omega t)$ και το $\sin(\omega t)$ σε $\omega \cos(\omega t) = \omega \sin(\pi/2 + \omega t)$, μπορεί λοιπόν να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα που προηγείται του διανύσματος της θέσης κατά γωνία $\pi/2$. Αντίστοιχα η επιτάχυνση μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα που προηγείται κατά γωνία π ως προς το διάνυσμα της ταχύτητας και επομένως κατά γωνία π ως προς το διάνυσμα της θέσης. Ως προς τη σχετική θέση των διανυσμάτων όλα τακτοποιήθηκαν. Τι συμβαίνει όμως ως προς τις διαστάσεις όλων αυτών των διανυσμάτων; Θα ήταν

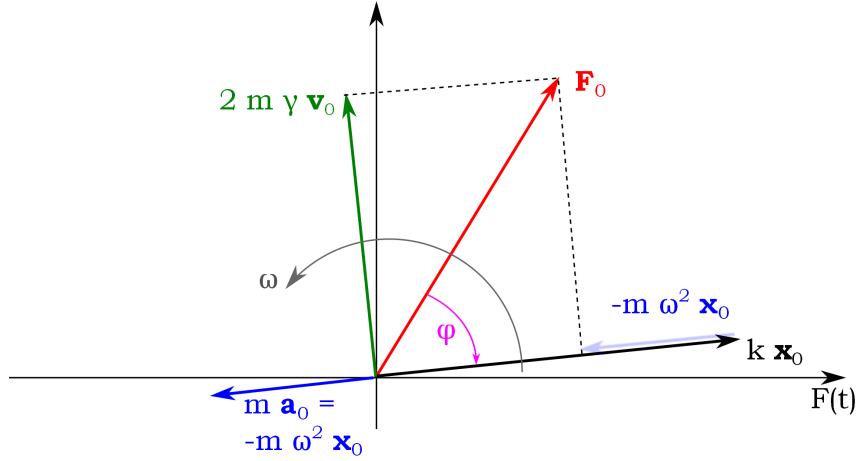
¹Είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αυτό παίρνοντας το αντίστροφο του κλάσματος του πλάτους το οποίο είναι

$$\frac{\sqrt{(\frac{1}{\omega} - LC\omega)^2 + (RC)^2}}{V_0 C}.$$

Το κλάσμα αυτό είναι εύκολο να δει κανείς ότι λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του όταν ο πρώτος τετραγωνικός παράγοντας στην υπόρριξη ποσότητα μηδενίζεται, δηλαδή όταν $\omega^2 = 1/(LC)$.

²Το αποτέλεσμα αυτό το είχαμε συναγάγει παραπάνω, αλλά κατόπιν μιας σχετικά μακροσκελούς ανάλυσης. Η μεγιστοποίηση του πλάτους της ταχύτητας $v_0(\omega) = \omega x_0(\omega)$ στη φυσική συχνότητα ω_0 ήταν πολύ πιο άμεση. Έτσι δεδομένου ότι η ω αυξάνεται μονοτόνως η $x_0(\omega)$ πρέπει να είναι φθίνουσα στο $\omega = \omega_0$ που η $v_0(\omega)$ καθίσταται στάσιμη. Η μεγιστοποίηση λοιπόν του $x_0(\omega)$, αν συμβαίνει, θα πρέπει να συμβαίνει σε μικρότερη της ω_0 συχνότητας.

³Στην πραγματικότητα η απεικόνιση αυτή είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών με διανύσματα στο μιγαδικό πεδίο.



Σχήμα 6: Το διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων για έναν μηχανικό ταλαντωτή. Όλα τα διανύσματα περιστρέφονται μαζί με συχνότητα ω . Η δύναμη αποτελεί τη συνισταμένη όλων των άλλων έγχρωμων διανυσμάτων. Έτσι το διάνυσμα της θέσης βρίσκεται κατά γωνία ϕ πίσω (προσέξτε τη φορά της) από τη δύναμη. Στον οριζόντιο άξονα προβάλλονται όλα τα διανύσματα προκειμένου να λαμβάνουμε τις στιγμιαίες τιμές όλων των χρονοεξαρτώμενων μεγεθών. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το διάνυσμα της ταχύτητας (πράσινο) βρίσκεται γωνία $\pi/2$ μπροστά από αυτό της θέσης και της επιτάχυνσης (μπλε) γωνία $\pi/2$ μπροστά από αυτό της ταχύτητας.

αρκετά προβληματικό να απεικονίζουμε στο ίδιο διάγραμμα φυσικές ποσότητες διαφορετικών διαστάσεων. Αν επανέλθουμε στη βασική διαφορική εξίσωση παρατηρούμε πως όλοι οι όροι της έχουν διαστάσεις δύναμης. Αν τα περιστρεφόμενα διανύσματα λοιπόν τα σχεδιάσουμε ώστε να έχουν μήκος ίσο με το πλάτος του αντίστοιχου μεγέθους πολλαπλασιασμένου με τις κατάλληλες παραμέτρους (τη θέση επί k , την ταχύτητα επί $2m\gamma$, την επιτάχυνση επί m και τη δύναμη επί 1) ώστε τα πάντα να έχουν διαστάσεις δύναμης τότε μπορούμε να “δούμε” τη διαφορική εξίσωση ως διανυσματικό άθροισμα εικονικών δυνάμεων:

$$\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}_0 + 2m\gamma\mathbf{v}_0 + k\mathbf{x}_0 \quad (23)$$

όπου τα $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{x}_0$ δεν αναπαριστούν κάποια διανύσματα του πραγματικού χώρου, αλλά κάποια εικονικά περιστρεφόμενα δισδιάστατα διανύσματα που σχηματίζουν τις γωνίες που αναφέραμε παραπάνω και των οποίων οι προβολές επί του άξονα x αναπαριστούν τα χρονοεξαρτώμενα αντίστοιχα μεγέθη που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση (8). Η διανυσματική εξίσωση που αναγράφεται παραπάνω εξασφαλίζει την εξίσωση των αντίστοιχων προβολών. Επειδή τα διανύσματα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{a}_0$ είναι αντιπαράλληλα το ένα στο άλλο, ενώ το $\mathbf{v}_0$ είναι κάθετο στα δύο πρώτα (όπως είπαμε παραπάνω) έχουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των μέτρων

$$F_0^2 = (kx_0 - ma_0)^2 + (2m\gamma v_0)^2.$$

Αν επιπλέον κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$a_0 = \omega^2 x_0, \quad v_0 = \omega x_0$$

οι οποίες συνάγονται από τις παραγωγίσεις των των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που είδαμε προωύτερα, τότε καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το πλάτος

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(k/m - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

που δεν είναι άλλο παρά το πλάτος της απόκρισης που βρήκαμε στο πρώτο εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου. Η δε καθυστερημένη φάση της απόκρισης δεν είναι άλλη από τη γωνία μεταξύ του διανύσματος $\mathbf{F}_0$ και του $\mathbf{x}_0$, δηλαδή

$$\tan(-\phi) = \frac{2m\gamma v_0}{kx_0 - ma_0} = \frac{2\gamma\omega}{(k/m) - \omega^2}$$

(βλ. σχήμα 6). Με βάση τη νέα οπτική γωνία το πλάτος της δύναμης είναι σταθερού μέτρου και αυτό που συμβαίνει καθώς αλλάζουμε τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι ότι τα υπόλοιπα διανύσματα (θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης) αναδιευθετούνται έτσι ώστε το διανυσματικό τους άθροισμα (μαζί με τους συντελεστές τους) να δίνει πάλι το $\mathbf{F}_0$. Καθώς το ω μεγαλώνει το παράλληλο στο $\mathbf{x}_0$ διάνυσμα μικραίνει ως $(k - m\omega^2)x_0$ ενώ το κάθετο διάνυσμα μεγαλώνει ως $2m\gamma v_0 = 2m\gamma\omega x_0$.

Αν σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y θέσουμε

$$y = 2m\gamma\omega x_0, \quad x = (k - m\omega^2)x_0$$

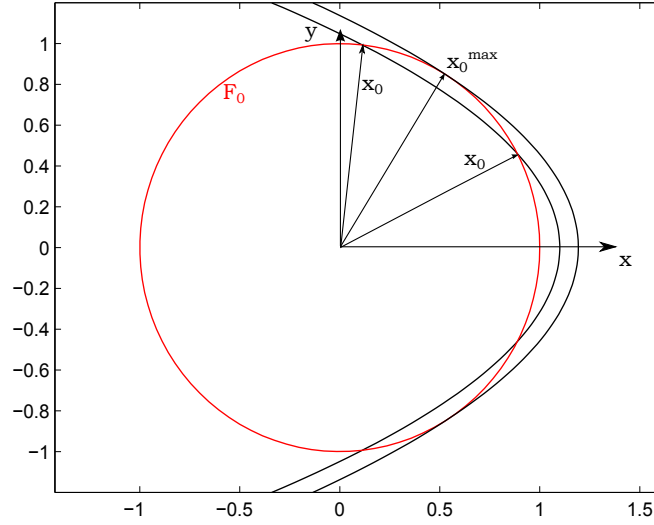
το γράφημα της μεταξύ τους σχέση είναι της μορφής

$$x = \left[k - m \left(\frac{y}{2m\gamma x_0} \right)^2 \right] x_0 = kx_0 - \frac{y^2}{4m\gamma^2 x_0}. \quad (24)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής και δεδομένου ότι το πλάτος F_0 ισούται με $\sqrt{x^2 + y^2}$ η τομή της παραβολής με τον κύκλο ακτίνας F_0 αντιπροσωπεύει τη γωνιακή θέση της δύναμης στο διάγραμμα περιστρεφόμεων διανυσμάτων (βλ. σχήμα 7). Ο άξονας x είναι ο άξονας του $\mathbf{x}_0$, ενώ ο άξονας y είναι ο άξονας του $\mathbf{v}_0$. Αν η τομή βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ($x > 0, y > 0$) αυτό σημαίνει πως $kx_0 - m\omega^2 x_0 > 0$, δηλαδή $\omega^2 < k/m = \omega_0^2$, ενώ αν η τομή βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο ($x < 0, y > 0$) αυτό σημαίνει πως $kx_0 - m\omega^2 x_0 < 0$, δηλαδή $\omega^2 > k/m = \omega_0^2$. Από τη μορφή της παραβολής είναι προφανές ότι το μέγιστο πλάτος (που αντιστοιχεί στην εξώτατη δυνατή παραβολή) δεν μπορεί παρά να εμφανίζεται στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή σε συχνότητα μικρότερη της φυσικής.

4 * Τυχαία διεγείρουσα δύναμη

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με αμιγώς αρμονικές (ημιτονικές, ή συνημιτονικές) δυνάμεις διέγερσης σε ένα ταλαντωτή. Προφανώς αυτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση δύναμης. Τυχαίνει όμως η εκτενής ανάλυση που κάναμε για την ειδική αυτή περίπτωση να εμπεριέχει όλη την ουσία για κάθε είδους χρονοεξαρτώμενη δύναμη. Ο λόγος είναι το θεώρημα Fourier:



Σχήμα 7: Στο διάγραμμα φαίνονται δύο παραβολές της μορφής (24). Καθώς αλλάζει κανείς το πλάτος της συχνότητας το πλάτος μεταβάλλεται και μαζί μεταβάλλεται η θέση και η μορφή της παραβολής. Το πλάτος προκύπτει από την τομή της παραβολής με τον κύκλο ακτίνας F_0 . Γενικά υπάρχουν δύο τέτοιες τομές για $y \propto \omega > 0$ (βλ. διανύσματα x_0) που αντιστοιχούν στα ίσα πλάτη απόκρισης σε δύο διαφορετικές συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας συντονισμού. Η απώτερη παραβολή (εξώτερη στο διάγραμμα) που εφάπτεται στον κύκλο αντιστοιχεί στο μέγιστο πλάτος $x_0^{\max}$ της ταλάντωσης το οποίο εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του διαγράμματος $x > 0, y > 0$ αντιστοιχεί σε συχνότητα μικρότερη της φυσικής συχνότητας.

Κάθε συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να γραφεί ως επαλληλία αρμονικών συναρτήσεων.

Αν η $f(t)$ είναι περιοδική η ανάλυση γίνεται σε αρμονικές ακέραιων πολλαπλασίων της περιόδου της f , ενώ αν δεν είναι περιοδική η ανάλυση θα γίνει σε αρμονικές όλων των δυνατών συχνοτήτων. Πιο συγκεκριμένα αν $f(t + T) = f(t)$ για κάθε t

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2\pi nt/T) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(2\pi nt/T)$$

όπου c_n, s_n κατάλληλοι συντελεστές⁴ που καθορίζουν το πλάτος της κάθε αρμονικής συνιστώσας. Οι c_n, s_n καθορίζονται από τη μορφή της f . Ομοίως, αν η f δεν είναι περιοδική⁵ μπορεί και

⁴Οι τιμές των c_n, s_n δίνονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$c_n = \frac{2 - \delta_{n0}}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt, \quad s_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi nt/T) dt.$$

⁵Οφείλει όμως να ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς ώστε να μπορούν να υπολογιστούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα. Συγκεκριμένα η f θα πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$.

πάλι να αναλυθεί σε αρμονικές με συνεχές πλέον φάσμα, αντί διακριτό όπως προηγουμένως. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega t} \tilde{f}(\Omega) d\Omega,$$

όπου $\tilde{f}(\Omega)$ είναι μια κατάλληλη μιγαδική συνάρτηση⁶, η μορφή της οποίας μπορεί να υπολογιστεί από την ίδια την f και η οποία μας δίνει μια πλήρη πληροφόρηση σχετικά με το φάσμα συχνοτήτων της ίδιας της f .

Κατόπιν αυτής της ανάλυσης μιας οποιασδήποτε συνάρτησης, μπορούμε να αναλύσουμε την ίδια τη διέγερση $F(t)$ που ασκείται στον ταλαντωτή. Η γραμμικότητα της εξίσωσης του ταλαντωτή μας εξασφαλίζει ότι η μη ομογενής λύση υπό τη δράση μιας γενικής χρονοεξαρτώμενης δύναμης θα είναι ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων του ταλαντωτή σε κάθε αρμονική συνιστώσα της δύναμης. Έτσι αν η εφαρμοζόμενη $F(t)$ είναι περιοδική, η γενική λύση του ταλαντωτή (μετά τη μεταβατική περίοδο προσαρμογής των αρχικών συνθηκών στην τελική κατάσταση) είναι

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[c_n \cos(2\pi n t/T + \phi_n) + s_n \sin(2\pi n t/T + \phi_n)] / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2\pi n/T)^2)^2 + (4\pi n\gamma/T)^2}} \quad (25)$$

όπου ϕ_n είναι η φάση καθυστέρησης που αντιστοιχεί στη συχνότητα της εκάστοτε αρμονικής $\omega_n = 2\pi n/T$. Στην περίπτωση πολύ ασθενούς απόσβεσης ($\gamma \ll \omega_0$) και $\omega_N \simeq \omega_0$, μόνο η αρμονική αυτή θα δώσει μεγάλο πλάτος απόκρισης (ισχυρός συντονισμός), ενώ όλες οι άλλες αρμονικές θα επιφέρουν ταλαντώσεις μηδαμινού σχετικού πλάτους. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σε αυτή την περίπτωση

$$x(t) \simeq \frac{[c_N \cos(2\pi N t/T + \phi_N) + s_N \sin(2\pi N t/T + \phi_N)] / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2\pi N/T)^2)^2 + (4\pi N\gamma/T)^2}} \quad (26)$$

για $|\omega_0 - 2\pi N/T| \ll \gamma$.

Αντίστοιχα στην περίπτωση της μη περιοδικής διέγερσης θα η γενική λύση θα είναι

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i[\Omega t + \phi(\Omega)]} \frac{\tilde{f}(\Omega)/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} d\Omega.$$

Στην περίπτωση αυτή λόγω συνεχούς φάσματος η απόκριση του ταλαντωτή δεν θα είναι μονοχρωματική (χαρακτηριζόμενη από μια συχνότητα) αλλά θα αποτελείται από μια συνεχή κατανομή συχνοτήτων κεντραρισμένη γύρω από τη συχνότητα συντονισμού.

⁶ Η $\tilde{f}(\Omega)$ υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} f(t) dt$$

5 Η ροή ενέργειας κατά τη διέγερση

Στον ταλαντωτή με απόσβεση, δεν είχε τόσο νόημα να συζητήσουμε για την ενέργεια του συστήματος καθότι το σύστημα ήταν αναλωτικό και η ενέργεια ως άθροισμα κινητικής και δυναμικής δεν αποτελούν διατηρούμενο μέγεθος. Η γραμμική αντίσταση γνωρίζουμε ότι είναι μια *μη* συντηρητική δύναμη αφού είναι ταχυτητοεξαρτώμενη. Η αλήθεια είναι ότι ακόμη και γι' αυτό το σύστημα μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια ποσότητα που έχει τη μορφή της ενέργειας αλλά είναι σταθερή. Πρόκειται για την εκθετικά μειούμενη ενέργεια πολλαπλασιασμένη με τον κατάλληλο χρονοεξαρτώμενο εκθετικό παράγοντα ώστε οι χρονοεξαρτήσεις να αλληλοαναιρούνται.

Στην περίπτωση όμως του διεγερμένου ταλαντωτή η σταθερή κατάσταση του θα μπορούσε ίσως να συσχετιστεί με κάποιου είδους ενέργεια. Ποια μπορεί να είναι αυτή, αφού εκ φύσεως ο ταλαντωτής χάνει ενέργεια συνεχώς μέσω της γραμμικής αντίστασης; Δεδομένου ότι ο ταλαντωτής εκτελεί αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις κάποιας συχνότητας –η οποία όμως δεν είναι ούτε η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή, ούτε η διαμορφούμενη συχνότητα λόγω του συντελεστή απόσβεσης, αλλά η συχνότητα του διεγέρτη–, η κινητική και η δυναμική ενέργειά του ταλαντώνονται χωρίς όμως να διατηρούν σταθερό άθροισμα. Η δυναμική του ενέργεια είναι

$$E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \phi), \quad (27)$$

ενώ η κινητική είναι

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (28)$$

Παρατηρήστε ότι τα πλάτη των δύο ενεργειών δεν είναι τα ίδια ώστε να μπορεί κανείς να εκμεταλλευτεί την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ για να κατασκευάσει μια διατήρηση από την άθροιση των δύο ενεργειών.⁷ Και πάλι όμως μπορεί κανείς να φτιάξει μια ιδότυπη διατήρηση “ενέργειας” κατασκευάζοντας την ποσότητα

$$\mathcal{E} = \frac{E_{\text{δυν}}}{\omega_0^2} + \frac{E_{\text{κιν}}}{\omega^2},$$

που δεν έχει διαστάσεις ενέργειας αλλά είναι συμμετρική, ή την

$$\mathcal{E}' = E_{\text{δυν}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + E_{\text{κιν}},$$

που έχει μεν διαστάσεις ενέργειας αλλά δεν είναι συμμετρική, η τέλος την

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{E_{\text{δυν}}}{\omega_0^2} + \frac{E_{\text{κιν}}}{\omega^2} \right) \omega \omega_0,$$

⁷Μονάχα στην περίπτωση $\omega = \omega_0$ οι δύο αυτές ενέργειες αποκτούν ίδιο πλάτος και μπορούν να οδηγήσουν σε μια άμεση διατήρηση αθροισμένες.

που είναι και διαστατικά ενέργεια και διαθέτει συμμετρική γραφή.

Ας εξετάσουμε όμως πιο διεξοδικά γιατί η συνολική ενέργεια δεν διατηρείται αλλά ταλαντώνεται μεταξύ της μέγιστης κινητικής και της μέγιστης δυναμικής που η κάθε μια έχει διαφορετικό “ύψος”. Η αντίσταση προκαλεί συνεχή απώλεια ενέργειας από το σύστημα, η οποία συνήθως χάνεται υπό μορφή θερμότητας, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά κινητική ενέργεια μορίων που διαμεσολαβούν για να επιτευχθεί η αλληλεπίδραση του ταλαντωτή με το περιβάλλον του, πέραν αυτής του δυναμικού του ταλαντωτή. Είναι λογικό να φανταστεί κανείς ότι η ενέργεια αυτή με κάποιο τρόπο αναπληρώνεται από την εξωτερική διέγερση έτσι ώστε η συνολική ενέργεια (δυναμική συν κινητική) να μην μένει σταθερή αλλά να αυξομειώνεται μεταξύ δύο θετικών τιμών.

Η ενέργεια που χάνεται με την πάροδο του χρόνου είναι

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{αντ}}(t) &= \int_0^t F_{\text{αντ}} dx \\
 &= \int_0^t -2m\gamma v dx \\
 &= -2m\gamma \int_0^t v^2 dt \\
 &= -2m\gamma v_0^2 \int_0^t \sin^2(\omega t' + \phi) dt' \\
 &= -m\gamma \omega^2 x_0^2 \left[t' - \frac{\sin(2\omega t' + 2\phi)}{2\omega} \right]_0^t.
 \end{aligned} \tag{29}$$

όπου το “πλην” πρόσημο υποδεικνύει τη συνεχή απώλεια ενέργειας. Ο πρώτος όρος καταμετρά τη συνεχή μέση απώλεια ενέργειας ενώ ο δεύτερος όρος τις ταλαντώσεις της απώλειας καθώς άλλοτε ο ταλαντωτής τρέχει γρήγορα και έχει υψηλό ρυθμό απώλειας ενέργειας (αυτό συμβαίνει 2 φορές μέσα σε μια περίοδο) και άλλοτε κινείται αργά η σταματά και έχει χαμηλό ή μηδενικό ρυθμό απώλειας ενέργειας (και αυτό συμβαίνει 2 φορές μέσα σε μια περίοδο⁸).

Από την άλλη η ενέργεια που προσφέρεται στον ταλαντωτή από τη διεγείρουσα δύναμη

⁸Παράβαλε με το συντελεστή 2 στη συχνότητα της έκφρασης (29).

είναι

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\delta i \epsilon \gamma}(t) &= \int_0^t F(t) dx \\
&= \int_0^t F(t) v dt \\
&= F_0 \omega x_0 \int_0^t \cos(\omega t) [-\sin(\omega t + \phi)] dt \\
&= -F_0 \omega x_0 \int_0^t \cos(\omega t + \phi - \phi) \sin(\omega t + \phi) dt \\
&= -F_0 \omega x_0 \int_0^t \left[\cos(\omega t + \phi) \cos \phi + \sin(\omega t + \phi) \sin \phi \right] \sin(\omega t + \phi) dt \\
&= -\frac{F_0 x_0}{2} \left[-\cos \phi \frac{\cos(2\omega t' + 2\phi)}{2} + \sin \phi \left(\omega t' - \frac{\sin(2\omega t' + 2\phi)}{2} \right) \right]_0^t dt \quad (30)
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω ανάλυση αντί να αναλύσουμε το $\sin(\omega t + \phi)$ αναλύσαμε το $\cos(\omega t)$ προκειμένου να συγκρίνουμε με την αντίστοιχη χρονοεξάρτηση της απώλειας ενέργειας που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό για να είναι πιο εύκολη η σύγκριση θα υπολογίσουμε αναλυτικά τις ποσότητες $F_0 x_0 \cos \phi$ και $F_0 x_0 \sin \phi$:

$$F_0 x_0 \cos \phi = F_0 x_0 \frac{kx_0 - m\omega^2 x_0}{F_0} = mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2), \quad (31)$$

$$F_0 x_0 \sin \phi = -F_0 x_0 \frac{2m\gamma\omega x_0}{F_0} = -mx_0^2(2\gamma\omega). \quad (32)$$

Ο αμεσότερος τρόπος υπολογισμού των $\cos \phi$, $\sin \phi$ επιτυγχάνεται όχι μέσω της $\tan \phi$ που μπορεί να προκαλέσει διχογνωμία ως προς τα πρόσημα, αλλά μέσω του διανυσματικού διαγράμματος των περιστρεφόμενων διανυσμάτων που είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Προσέξτε ότι το πρόσημο του $\sin \phi$ είναι αρνητικό αφού η γωνία μετρά την καθυστέρηση (αρνητική) της απόκρισης σε σχέση με τη δύναμη. Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$\Delta E_{avt}(t) = -A \left[\omega t - \frac{\sin(2\omega t + 2\phi) - \sin(2\phi)}{2} \right]. \quad (33)$$

και

$$\Delta E_{\delta i \epsilon \gamma}(t) = A \left[\chi_1 \frac{\cos(2\omega t + 2\phi) - \cos(2\phi)}{2} + \omega t - \chi_2 \frac{\sin(2\omega t + 2\phi) - \sin(2\phi)}{2} \right] \quad (34)$$

με $A = m\gamma\omega x_0^2$,

$$\chi_1 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\gamma\omega}$$

και

$$\chi_2 = 1.$$

Στη γραφή αυτή είναι πλέον καθαρό ότι κατά μέσο όρο όση ενέργεια αφαιρεί η αντίσταση, τόση εισάγει η διεγείρουσα δύναμη. Προσθέτοντας τους δύο όρους καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση που μετρά τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος

$$\Delta E_{\text{ολ}}(t) = \frac{mx_0^2}{2}(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\cos(2\omega t + 2\phi) - \cos(2\phi)}{2}. \quad (35)$$

Το εύρος ταλάντωσης αυτής της ενέργειας είναι $mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/4$, δηλαδή μεταβάλλει συνολικά την ενέργεια κατά $\pm mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/2$ και αυξομειώνεται 2 φορές πιο γρήγορα από την ίδια την ταλάντωση. Στην πραγματικότητα η μεταβολή αυτή είναι που γεφυρώνει τη διαρκή μετάβαση από τη μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας $m\omega_0^2 x_0^2/2$ στη μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας $m\omega^2 x_0^2/2$ τέσσερις φορές μέσα σε ένα κύκλο: δύο από τη δυναμική (μέγιστη απομάκρυνση) στην κινητική (θέση ισορροπίας) και δύο από την κινητική στη δυναμική.

Μολονότι η ταλάντωση της συνολικής ενέργειας έχει πλάτος $mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/4$, η κάθε μία πηγή μεταφοράς ενέργειας –αυτή της αντίστασης και εκείνη της διέγερσης– εκτός του σταθερού ρυθμού εκροής της πρώτης και εισροής της δεύτερης, ταλαντώνουν την ενέργεια του ταλαντωτή με πλάτος $A/2$ η πρώτη και πλάτος $A\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}/2$ η δεύτερη. Τα δύο αυτά πλάτη μπορεί να ξεπερνούν το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή, αφού το ημιτονικό κομμάτι της ταλάντωσης εκροής της ενέργειας αναιρείται από το ημιτονικό κομμάτι της ταλάντωσης εισροής της ενέργειας και απομένει μονάχα το συνημιτονικό μέρος της εισροής να καθορίζει το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή.

Όσον αφορά στην εξάρτηση των ενεργειακών εισροών-εκροών από τη συχνότητα της διέγερσης, μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι για $\omega = \omega_0$, ο μεν ταλαντωτής διατηρεί σταθερή τη συνολική (κινητική+δυναμική) ενέργειά του, ενώ η διεγείρουσα δύναμη και η αντίσταση βρίσκονται σε απόλυτο συντονισμό έτσι ώστε ότι ενέργεια προσφέρει στιγμιαία στον ταλαντωτή η μια να την αφαιρεί η άλλη.

Αντίστοιχα στη συχνότητα συντονισμού που το πλάτος ταλάντωσης φτάνει στη μέγιστη τιμή του, το πλάτος ταλάντωσης $A\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}/2$ της ενέργειας που προσφέρεται από την εξωτερική δύναμη λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Ένας αρμονικός ταλαντωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια ανιχνευτική διάταξη για να εντοπιστεί ένα σήμα πολύ χαμηλής έντασης, μέσω του φαινομένου του συντονισμού. Τα ραδιοφωνα, ή οι τηλεοράσεις είναι κατ' ουσίαν τέτοιοι ηλεκτρικοί ταλαντωτές με πολύ στενό και επομένως υψηλή καμπύλη συντονισμού. Η ανιχνευτική τους δράση φανερώνεται ως επιλογή του εκάστοτε καναλιού. Και ένας κατάλληλος μηχανικός όμως ταλαντωτής θα μπορούσε να λειτουργήσει ως επιλογέας και ενισχυτής κάποιου μηχανικού σήματος που θα μπορούσε να τον διεγείρει. Η ιδέα αυτή προτάθηκε ως τρόπος ανίχνευσης των βαρυτικών κυμάτων. Τα βαρυτικά κύματα, την ύπαρξη των οποίων προβλέπει η Γενική θεωρία της Σχετικότητας, δημιουργούνται από κοσμικές πηγές υπερσυμπαγών αστροφυσικών σωμάτων καθώς αυτά κινούνται εξαιτίας της βαρύτητάς τους το ένα κοντά στο άλλο. Η δράση κάποιου βαρυτικού κύματος σε έναν αρμονικό ταλαντωτή λειτουργεί ως αρμονική διέγερση. Αν ο ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από πολύ

χαμηλό συντελεστή απόσβεσης, η σύμπτωση της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωστή με τη συχνότητα ενός βαρυτικού κύματος θα μπορούσε να οδηγήσει τον ταλαντωτή σε μια αρκετά μεγάλου πλάτους ταλάντωση ώστε να είναι μετρήσιμη. Τέτοιου είδους ανιχνευτές –ονομαζόμενοι και μπάρες λόγω σχήματος– λειτουργούν αυτή τη στιγμή σε διάφορα ερευνητικά κέντρα και Πανεπιστήμια ανά τον κόσμο αλλά δεν έχουν καταφέρει ακόμη να δώσουν κάποιο απτό αποτέλεσμα ανίχνευσης. Ο λόγος είναι ότι προκειμένου να επιτύχουν υψηλή ενίσχυση της ταλάντωσης εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο του συντονισμού, έχουν τόσο στενό συντονισμό ώστε η πιθανότητα σύμπτωσης της συχνότητας συντονισμού με τη συχνότητα του κύματος να καθίσταται εξαιρετικά απίθανη.

*** Παράγοντας Ποιότητας Q :** Ένας αδιάστατος συντελεστής που χρησιμοποιείται σε ταλαντωτικές διατάξεις όπου επιδιώκεται ο συντονισμός είναι το κλάσμα

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (36)$$

Το μέγεθος αυτό είναι τόσο μεγαλύτερο όσο πιο αποτελεσματικός ως προς το μέγεθος της απόκρισης είναι ο συντονισμός, αφού το αντίστροφο κλάσμα $2\gamma/\omega_0$ μετρά πόσο ασθενή απόσβεση παρουσιάζει ο ταλαντωτής και επομένως πόσο στενή και συνάμα ψηλή είναι η καμπύλη συντονισμού. Αν ένας ταλαντωτής που έχει υψηλό Q συντονιστεί και στη συνέχεια σβήσει η διέγερση, τότε ο χαρακτηριστικός χρόνος που θα χρειαστεί για να εκμηδενιστεί η ταλάντωσή του θα είναι

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \simeq T\omega_0/(2\pi)\gamma = T\frac{Q}{\pi} \quad (37)$$

όπου T είναι η περίοδος ελεύθερης ταλάντωσης του ταλαντωτή και ω_0 είναι η συχνότητα ταλάντωσης του ταλαντωτή δίχως απόσβεση η οποία συμπίπτει προσεγγιστικά με τη συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης ενός ταλαντωτή με πολύ ασθενή απόσβεση. Μπορούμε λοιπόν εναλλακτικά να δούμε τον παράγοντα ποιότητας ενός συντονισμένου ταλαντωτή ως ένα μέτρο του χρόνου απόσβεσής του (η απώλεια της ενέργειάς του) σε σχέση με την περίοδο ταλάντωσής του. Για παράδειγμα ένα κρυστάλινο ποτήρι κρασιού αντηχεί για πολύ ώρα αφότου το κτυπήσει κανείς με ένα σκληρό αντικείμενο, σε αντίθεση με ένα κοινό γυάλινο αντίστοιχου μεγέθους ποτήρι. Η διαφορά του υψηλού παράγοντα ποιότητας του πρώτου οφείλεται στην καθαρότητα του υλικού του κρυστάλλινου ποτηριού που του εξασφαλίζει χαμηλό συντελεστή απόσβεσης των ταλαντώσεων του “κύπελλου” του ποτηριού. Την ιδιότητα αυτή του ψηλού παράγοντα ποιότητας προσπαθούν κάποιες ερευνητικές ομάδες να επιτύχουν για τις μπάρες-ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων κατασκευάζοντάς τες από κρυσταλικά υλικά υψηλής καθαρότητας.

6 Συντονισμός ταλαντωτή χωρίς απόσβεση

Παρά το γεγονός ότι ένας ταλαντωτής χωρίς απόσβεση αποτελεί ένα μάλλον ιδεατό και μη ρεαλιστικό φυσικό σύστημα, θα θέλαμε να αναλύσουμε τον τρόπο που ένα τέτοιο σύστημα φτάνει στο συντονισμό, καθώς το σύστημα αυτό βάζει σε δοκιμασία τις μαθηματικές εκφράσεις

που αφορούν στο συντονισμό ενός μηχανικού συστήματος. Όπως είπαμε και παραπάνω, ένας διεγερόμενος ταλαντωτής θα χάσει βαθμιαία την ελεύθερα αποσβηνόμενη λύση του (τη λύση της ομογενούς εξίσωσης) η οποία καθορίζεται από τις οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες και θα καταλήξει να ταλαντώνεται με την ταλάντωση που του υπαγορεύει η διεγείρουσα δύναμη, με τη συχνότητα που αυτή έχει. Στο όριο που ο συντελεστής απόσβεσης του ταλαντωτή τείνει στο μηδέν, ο μεν χρόνος μετάβασης καθίσταται άπειρος, το δε πλάτος της απόκρισης κατά το συντονισμό γίνεται και αυτό άπειρο. Πώς ακριβώς όμως γίνεται αυτή η μετάβαση σε άπειρο πλάτος;

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση με έναν ταλαντωτή φυσικής συχνότητας ω_0 , με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = 0$, και διεγείρουσα δύναμη συχνότητας ω . Η διαφορική εξίσωση που θα διέπει το σύστημα θα είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (38)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t) + S \sin(\omega_0 t) + A \cos(\omega t + \phi) \quad (39)$$

όπου ο συντελεστής A και η γωνία ϕ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν την πλήρη διαφορική εξίσωση, ενώ οι συντελεστές C, S αφορούν στο ομογενές κομμάτι της λύσης και σχετίζονται άμεσα με τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Είναι εύκολο να δούμε είτε με απ' ευθείας αντικατάσταση της λύσης, είτε με τη χρήση των γενικών σχέσεων (12,7) που βρήκαμε παραπάνω, ότι

$$\phi = \begin{cases} 0, & \text{αν } \omega < \omega_0 \\ \pi, & \text{αν } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

και

$$A = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις θα μπορούσαν να συγχωνευτούν σε μια αν θέταμε

$$\phi = 0, \text{ και } A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Παρατηρήστε ότι η λύση αυτή παρουσιάζει μαθηματικά προβλήματα αν είναι $\omega_0 = \omega$. Θα δούμε όμως ότι δεν ισχύει το ίδιο για τη γενική λύση. Δεν είναι δύσκολο στο σημείο αυτό να δείξει κανείς ότι

$$C = x(0) - A, \text{ και } S = v(0)/\omega_0$$

οπότε συνολικά θα έχουμε

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (40)$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της συνάρτησης είναι ο προηγούμενος μαθηματικά προβληματικά όρος κατάλληλα τροποποιημένος ώστε να αρθεί πλήρως η ανωμαλία στο όριο $\omega \rightarrow \omega_0$. Για να γίνει αυτό ακόμη πιο απτό θα ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{F_0/m}{\omega_0 + \omega} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}. \quad (41)$$

Στο όριο $\omega \rightarrow \omega_0$ το τελευταίο απροσδιόριστο κλάσμα είναι απλώς η παράγωγος

$$\left. \frac{d \cos(\omega t)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -t \sin(\omega_0 t) .$$

Συνεπώς η ακριβής λύση του προβλήματος αν η συχνότητα της διέγερσης συμπίπτει με τη συχνότητα του ταλαντωτή, είναι

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) . \quad (42)$$

Ο τελευταίος όρος δείχνει ακριβώς τον τρόπο που ο ταλαντωτής συντονίζεται. Οι δύο πρώτοι όροι σχηματίζουν την ομογενή λύση η οποία δεν σβήνει με την πάροδο του χρόνου, αλλά γίνεται ολοένα και πιο ασήμαντη συγκριτικά, αφού η ίδια περιγράφει μια φραγμένη ταλάντωση σε αντίθεση με τον συντονιστικό τρίτο όρο που μεγαλώνει απεριόριστα. Μάλιστα μαθαίνουμε ότι η αύξηση του πλάτους εξελίσσεται γραμμικά με το χρόνο (όρος $F_0 t / (2m\omega_0)$). Επομένως έτσι καθίσταται άπειρο το πλάτος της ταλάντωσης μετά από άπειρο χρόνο.

Από μαθηματικής άποψης ο τελευταίος όρος της παραπάνω έκφρασης δεν είναι τίποτε άλλο από τη μεταμόρφωση της μη ομογενούς λύσης, αν η συνήθης λύση αυτής $\cos(\omega t)$ πάψει να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την ομογενή λύση $\cos(\omega_0 t)$, δηλαδή όταν το ω γίνει ίδιο με το ω_0 . Η μικρή διαφορά μεταξύ των δύο λύσεων, που θα μπορούσε να εκφραστεί μέσω της παραγώγου της λύσης ως προς ω , θα παίζει πλέον το ρόλο της νέας μη ομογενούς λύσης.

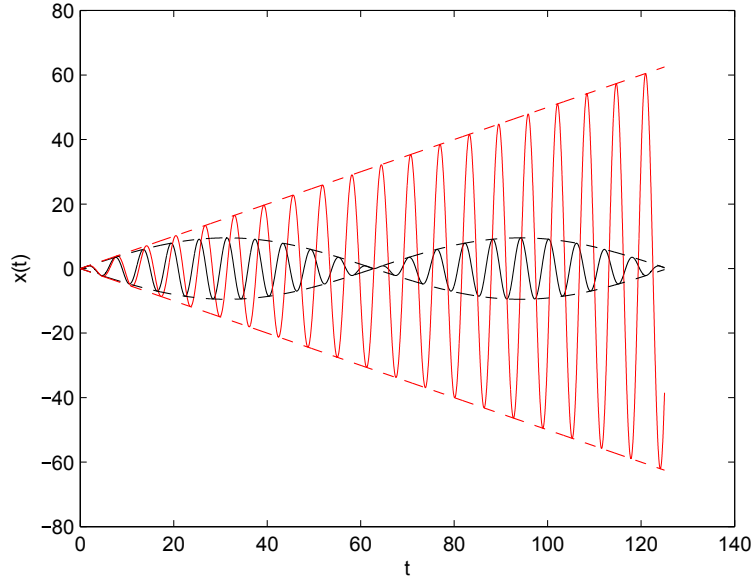
7 * Ροή ενέργειας στην κατάσταση στατιστικής ισορροπίας

Είδαμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ταλαντωτή είναι:

$$\frac{dE}{dt} = -2m\gamma \dot{x}^2 + F_0 \dot{x} \cos(\omega t) . \quad (43)$$

Αν τώρα ορίσουμε ως μέση τιμή μιας ποσότητας $A(t)$ τη συνάρτηση

$$\langle A(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{t+T} A(t') dt'}{T} , \quad (44)$$



Σχήμα 8: Στο διάγραμμα φαίνεται η χρονική εξέλιξη ενός ταλαντωτή χωρίς αναλωτικό όρο υπό την επίδραση μιας αρμονικής διέγερσης. Ο ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από φυσική συχνότητα $\omega_0 = 1$, ενώ οι αρχικές συνθήκες που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι $x(0) = v(0) = 0$. (i) Μαύρη συνεχής καμπύλη: ο ταλαντωτής διεγείρεται από αρμονική δύναμη συχνότητας $\omega = 1.1$. Το περίγραμμα της καμπύλης (διακεκομμένη μαύρη καμπύλη) περιγράφεται και αυτό από μια αρμονική ταλάντωση συχνότητας $(\omega - \omega_0)/2 = 0.05$. (ii) Κόκκινη συνεχής καμπύλη: Ο ταλαντωτής διεγείρεται από αρμονική δύναμη συχνότητας $\omega = 1$. Το περίγραμμα της καμπύλης (διακεκομμένη κόκκινη γραμμή) είναι η γραμμική συνάρτηση $F_0 t / (2m\omega_0)$. Στη δεύτερη περίπτωση το πλάτος μεγαλώνει επ' άπειρω.

τότε εφόσον η ενέργεια παραμένει πεπερασμένη, η μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της ενέργειας θα πρέπει να μηδενίζεται:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{t+T} (dE/dt') dt'}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E(t+T) - E(t)}{T} = 0, \quad (45)$$

όπως επίσης και οι μέσες τιμές

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = 0,$$

όντας παράγωγοι φραγμένων συναρτήσεων. Ισχύει επίσης η πολύ χρήσιμη σχέση ότι

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2,$$

αφού είναι $\cos^2(\omega t) = (1 + \cos(2\omega t))/2$ και προφανώς η μέση τιμή μιας σταθερής συνάρτησης είναι η σταθερή αυτή τιμή της συνάρτησης.

Έτσι, λαμβάνοντας τη μέση τιμή της (43), συμπεραίνουμε ότι η μέση ενέργεια που απορροφάται από τον ταλαντωτή ανά μονάδα χρόνου

$$I(\omega) = \langle F_0 \dot{x} \cos(\omega t) \rangle , \quad (46)$$

θα ισούται με το μέσο ρυθμό ανάλωσης ενέργειας από τον ταλαντωτή:

$$D(\omega) = 2m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle . \quad (47)$$

Αλλάζοντας την τιμή του συντελεστή τριβής γ , οι μέσες διακυμάνσεις των ταχυτήτων θα μεταβληθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι πάντα $I(\omega) = D(\omega)$. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει είναι αν όλες οι συχνότητες του ταλαντωτή διεγερθούν ισότιμα, δηλαδή, με ίδια πλάτη δυνάμεων διέγερσης, ποια θα είναι η μέση ενέργεια που απορροφά και αποβάλλει ο ταλαντωτής και σε ποιο βαθμό αυτή σχετίζεται με το συντελεστή τριβής. Γνωρίζουμε ότι οι διακυμάνσεις των πλατών και των ταχυτήτων θα είναι πολύπλοκες συναρτήσεις των γ, ω, ω_0 , οπότε θα περίμενε κανείς ότι το συνολικό αποτέλεσμα από διεγέρσεις διαφορετικών συχνοτήτων –αλλά ίδιας έντασης– θα είναι συνάρτηση του γ . Δεν είναι όμως· όπως θα δείξουμε, για ταλαντωτές χαμηλής απόσβεσης ($\gamma \ll \omega_0$), η συνολική ενέργεια που απορροφάται από τον ταλαντωτή εξαιτίας ισότιμων διεγέρσεων όλων των συχνοτήτων, και επομένως και η συνολική ενέργεια που καταναλώνεται από τον διεγερόμενο ταλαντωτή, είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητη του συντελεστή απόσβεσης.

Θα υπολογίσουμε τα $I(\omega)$ και $D(\omega)$, που όπως είπαμε είναι ίσα, και στη συνέχεια θα τα ολοκληρώσουμε σε όλες τις συχνότητες, θεωρώντας ότι ο ταλαντωτής μας δειγνύεται από πολλές εξωτερικές διεγέρσεις όλες πλάτους F_0 αλλά διαφορετικής συχνότητας ω (φανταστείτε ένα μοριακό δίπολο το οποίο υπόκειται σε ακτινοβολία λευκού χρώματος, δηλαδή φάσματος μη εξαρτώμενου από τη συχνότητα). Αφού $I = D$ αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\int_0^\infty D(\omega) d\omega . \quad (48)$$

Όμως

$$\begin{aligned} D(\omega) &= 2m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle \\ &= 2m\gamma \frac{(F_0/m)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \langle [\omega \sin(\omega t + \phi)]^2 \rangle \\ &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \end{aligned} \quad (49)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της παραπάνω συνάρτησης σε όλες τις συχνότητες ω από το 0 έως το ∞ , αν και εφικτός, είναι πολύπλοκος. Θα καταφύγουμε λοιπόν σε ένα προσεγγιστικό

υπολογισμό ο οποίος είναι τόσο ακριβέστερος όσο ο συντελεστής γ είναι πολύ μικρότερος από την ω_0 . Στην περίπτωση αυτή η κυρίως απορρόφηση ενέργειας συμβαίνει πολύ κοντά στο συντονισμό· συγκεκριμένα όταν η διαφορά της συχνότητας του διεγέρτη και του ταλαντωτή είναι τάξης γ , αφού ο συντελεστής γ χαρακτηρίζει το εύρος της καμπύλης συντονισμού. Για το λόγο αυτό θα αντικαταστήσουμε την παραπάνω πολύπλοκη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα (48) με την

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\omega) &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega_0^2}{(2\omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 + (2\gamma\omega_0)^2} \\ &= \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} .\end{aligned}\quad (50)$$

Το σκεπτικό που ακολουθήσαμε στην κατασκευή αυτής της νέας συνάρτησης είναι ότι μόνο η διαφορά $(\omega - \omega_0)$,⁹ που υπήρχε στον παρονομαστή στην αρχική σχέση (48), είναι ευαίσθητη σε μικρές μεταβολές της ω γύρω από την τιμή ω_0 . Όλοι οι άλλοι όροι ω στη σχέση (48) διαφοροποιούνται πολύ λίγο αν $\omega \simeq \omega_0$, και όταν αυτοί οι όροι διαφοροποιούνται πολύ, βρίσκμαστε ήδη μακριά από το συντονισμό οπότε η αντίστοιχη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα είναι αμελητέα. Η νέα αυτή προσεγγιστική συνάρτηση $\tilde{D}(\omega)$ που περιγράφει το ρυθμό πρόσληψης και απώλειας ενέργειας από τον ταλαντωτή, είναι γνωστή ως Λορεντζιανή συνάρτηση¹⁰ και χρησιμοποιείται για να περιγράψει διάφορες στατιστικές κατανομές και πιο συγκεκριμένα το προφίλ διαφόρων φασματικών γραμμών. Στο διάγραμμα 9 φαίνεται η διαφορά μεταξύ της Λορεντζιανής προσεγγιστικής καμπύλης $\tilde{D}(\omega)$ και της πραγματικής κατανομής $D(\omega)$.

Αν τώρα ολοκληρώσουμε την $\tilde{D}(\omega)$ σε όλες τις συχνότητες από 0 έως ∞ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty D(\omega) d\omega &\simeq \int_0^\infty \tilde{D}(\omega) d\omega \\ &= \frac{F_0^2}{4m} \int_0^\infty \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \\ &= \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\omega_0}^\infty \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \\ &\simeq \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\infty}^\infty \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \\ &= \frac{F_0^2}{4m} \pi .^{11}\end{aligned}\quad (51)$$

Στην προτελευταία σχέση αλλάξαμε το κάτω όριο της ολοκλήρωσης από $-\omega_0$ σε $-\infty$. Αν και δεν είναι ακριβής η τιμή του ολοκληρώματος μετά από αυτή την αλλαγή, η διαφοροποίηση που συνεπάγεται αυτή η προσέγγιση είναι μηδαμινή, καθότι για $\gamma \ll \omega_0$ το κομμάτι του ολοκληρώματος (από $-\infty$ ως $-\omega_0$) που προσθέσαμε για να λάβουμε ένα εύκολο υπολογίσιμο αποτέλεσμα

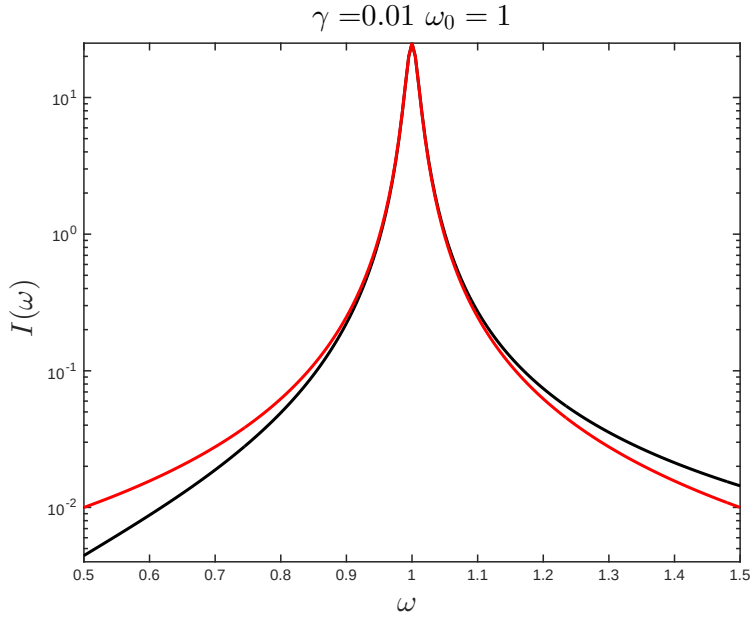
⁹Ο όρος $(\omega_0^2 - \omega^2)$ γράφτηκε προσεγγιστικά ως $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ για $\omega \simeq \omega_0$.

¹⁰Προς τιμήν του Hendrik Lorentz [1858-1923].

¹¹Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πολύ εύκολα, αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $x = \gamma \tan \phi$.

είναι μικρότερο από

$$\int_{-\infty}^{-\omega_0} \frac{\gamma dx}{x^2} = \frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1. \quad ^{12}$$



Σχήμα 9: Σύγκριση του ρυθμού απορρόφησης/απώλειας ενέργειας $I(\omega) = D(\omega)$, συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης ω , σύμφωνα με την ακριβή έκφραση (47) (μαύρη γραμμή) και την Λορεντζιανή προσέγγιση (50) (κόκκινη γραμμή) για $\gamma = 0.01$ και $\omega_0 = 1$. Προσέξτε ότι ο κατακόρυφος άξονας είναι λογαριθμικός, οπότε η διαφοροποίηση αν και φαίνεται σημαντική για $|\omega - \omega_0| \simeq 0.1 = 10\gamma$, ο ρυθμός απορρόφησης έχει πέσει σε αυτές κατά τουλάχιστον έναν παράγοντα 10 σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της κορυφής. Η Λορεντζιανή κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το ω_0 · όχι όμως και η πραγματική καμπύλη του ρυθμού απορρόφησης.

Το αποτέλεσμα είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η τιμή των ω_0 και γ δεν εμφανίζεται καθόλου στην τελική έκφραση, γεγονός το οποίο δηλώνει μια καθολικότητα, αν και προσεγγιστική. Αν ένας ταλαντωτής χαμηλής απόσβεσης, λοιπόν, διεγείρεται με ίδιες αρμονικές δυνάμεις σε όλες τις συχνότητες, αυτός απορροφά και απελευθερώνει υπό μορφή θερμότητας ίδια ποσότητα ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, ανεξαρτήτως της ιδιοσυχνότητάς του και του συντελεστή απόσβεσής του! Το σχετικό σφάλμα της παραπάνω έκφρασης για την συνολική απορρόφηση είναι μικρότερο του 2% για $\gamma/\omega_0 < 0.1$ δηλαδή για συστήματα με παράγοντα ποιότητας $Q > 5$.¹³

¹²Το ότι είναι ασήμαντο αυτό το κομμάτι φαίνεται καθαρά αν το συγκρίνουμε με το π που είναι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος από το $-\infty$ ως το $+\infty$.

¹³Στη φύση συναντώνται πολύ ψηλά Q . Στις υψηλές ενέργειες και σε οπτικά laser ο παράγοντας ποιότητας

Το μόνο που χρειάζεται για τον υπολογισμό του ρυθμού απορρόφησης/απώλειας είναι το μέτρο της διεγείρουσας δύναμης και η μάζα του ταλαντωτή. Οι διαστάσεις του τελικού αποτελέσματος είναι $[M \cdot L^2 \cdot T^{-4}]$, δηλαδή ενέργεια ανά μονάδα χρόνου στο τετράγωνο· όχι ενέργεια ανά μονάδα χρόνου όπως θα περίμενε κανείς από έναν ρυθμό απορρόφησης ενέργειας. Η αντίφαση αυτή προκλήθηκε από την ολοκλήρωση σε όλες τις συχνότητες και αίρεται αν αντικαταστήσουμε το F_0 με μια άλλη ποσότητα $F_0 T$ (που έχει διάσταση δύναμης επί χρόνου) και μετρά τη σταθερή κατανομή της δύναμης σε κάθε συχνότητα

$$F_0 T = \frac{dF}{d\omega} . \quad (52)$$

Με την αντικατάσταση αυτή, το αντίστοιχο αποτέλεσμα $\pi F_0^2 T / (4m)$, μετρά πράγματι ρυθμό απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου από τον ταλαντωτή.

Έτσι αν ένας ταλαντωτής, μάζας m , τοποθετηθεί μέσα σε μια δεξαμενή θερμότητας και διεγερθεί στοχαστικά από το περιβάλλον του με τυχαίες δυνάμεις κρούσης από τα μόρια του περιβάλλοντός του με μέση τιμή δυνάμεων αλληλεπίδρασης που ακολουθούν τη στατιστική κατανομή

$$\langle F(t)F(t') \rangle = F_0^2 T \delta(t - t') , \quad ^{14}$$

αυτός θα διεγερθεί ομοιόμορφα σε όλες τις συχνότητες και τελικά θα απορροφά ενέργεια από τη θερμική δεξαμενή με σταθερό ρυθμό $\pi F_0^2 T / (4m)$ και θα τον αποδίδει πάλι υπό μορφή θερμότητας πίσω στην δεξαμενή θερμότητας.

Όταν ο ταλαντωτής φτάσει σε θερμική ισορροπία με τη δεξαμενή, μέσα στην οποία είναι τοποθετημένος, θα έχει μέση κινητική ενέργεια ίση με

$$\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} k T_\theta , \quad (53)$$

όπου T_θ η θερμοκρασία της δεξαμενής και k η σταθερά του Boltzman. Η ενέργεια αυτή δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ενέργεια που προσροφάται και αποβάλλεται συνεχώς από τον ταλαντωτή, αλλά είναι η ενέργεια που διατηρεί κατά μέσο όρο ο ταλαντωτής. Έτσι παρόλο που η ποσότητα $D(\omega)$ εκφράζεται ως $2m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle$ (βλ. σχέση (47)), δηλαδή είναι $2\gamma k T_\theta$, αυτό δεν σημαίνει ότι ο ρυθμός αποβολής ενέργειας είναι σταθερός και ανεξάρτητος του ω , αλλά ότι

είναι της τάξης $Q = \mathcal{O}(10^{10})$. Ακόμη και κλασικά μακροσκοπικά αστροφυσικά συστήματα έχουν υψηλά Q . Για παράδειγμα το Q των ταλαντώσεων των θαλασσών λόγω της παλιρροϊκής διέγερσής των από τη Σελήνη έχει εκτιμηθεί ότι είναι $Q \approx 13$, ενώ των ταλαντώσεων των εξωτερικών πλανητών, οι οποίοι είναι ρευστοί, εκτιμάται ότι κυμαίνεται μεταξύ $10^4 < Q < 10^6$.

¹⁴Η δέλτα εξάρτηση δηλώνει την ανεξαρτησία δύο διαδοχικών κρούσεων. Η ποσότητα F_0 σχετίζεται με το μέγεθος των δυνάμεων κρούσης, ενώ το T με τη χρονική κλίμακα του ρυθμού των κρούσεων και έχει εισαχθεί για να ισορροπήσει τις μονάδες, δεδομένου ότι η συνάρτηση $\delta(t)$ έχει μονάδες αντιστρόφου χρόνου. Οι δέλτα-κατανομές έχουν φάσμα ανεξάρτητο της συχνότητας (βλ. μετασχηματισμό Fourier στο εδάφιο 6.4). Στη θεώρηση αυτή για τις μοριακές κρούσεις ο παράγοντας T με διαστάσεις χρόνου που βάλαμε πρωτύτερα (σχέση (52)) με το χέρι προκειμένου η τελική έκφραση για το ρυθμό απορρόφησης/απώλειας ενέργειας να έχει σωστές διαστάσεις, εισέρχεται τώρα με φυσικό τρόπο.

υπάρχει κάποια συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή του ρυθμού απώλειας. Στην πραγματικότητα, ο ταλαντωτής διεγείρεται από όλες τις συχνότητες με διαφορετικό πλάτος κάθε φορά και έχει αντίστοιχη απώλεια ενέργειας σε κάθε συχνότητα. Η μέση τιμή της διέγερσής του, όμως, εξαρτάται από τη θερμοκρασία της δεξαμενής. Η ποσότητα $F_0^2 T \pi / (4m)$ μετράει τη συνολική ροή ενέργειας προς και από τον ταλαντωτή από το θερμικό του περιβάλλον, ενώ η ποσότητα $2\gamma kT_\theta$ τη ροή ενέργειας ενός ταλαντωτή που κινείται με κινητική ενέργεια $kT_\theta/2$, όσο, δηλαδή, η μέση ενέργεια αυτού μέσα στη δεξαμενή θερμότητας.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 6

- Όταν ένας αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση διεγείρεται με αρμονική δύναμη οδηγείται τελικά (μετά από μια μεταβατική κατάσταση χρονικής διάρκειας $\sim 1/\gamma$) σε μια αμείωτη αρμονική ταλάντωση συχνότητας ίδιας με αυτή της διεγείρουσας δύναμης. Το πλάτος της ταλάντωσης και η διαφορά φάσης σε σχέση με τη διέγερση είναι ομαλές συναρτήσεις της συχνότητας της διέγερσης ω , της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή ω_0 και του συντελεστή απόσβεσης γ (κωδωνοειδής καμπύλη συντονισμού). Για $\gamma \ll \omega_0$ και $\omega \simeq \omega_0$ το πλάτος καθίσταται μέγιστο και η διαφορά φάσης $\pi/2$ (συντονισμός). Όσο πιο μικρό είναι το κλάσμα γ/ω_0 , τόσο πιο ψηλή και στενή είναι η καμπύλη συντονισμού.
- Οι αρχικές συνθήκες του ταλαντωτή «ξεχνιούνται» κατά τη διάρκεια της μεταβατικής περιόδου και η τελική ταλάντωση δεν εξαρτάται από αυτές.
- Η λύση επιτυγχάνεται εύκολα λύνοντας μια αλγεβρική εξίσωση –αντί μιας διαφορικής εξίσωσης– αρκεί να εισάγει κανείς μια υποθετική μιγαδική λύση $e^{i\omega t}$, της ίδιας δηλαδή μορφής με τη διεγείρουσα δύναμη.
- Η απόκριση ενός αρμονικού ταλαντωτή σε χρονομεταβαλλόμενη –αλλά όχι αρμονική– διέγερση υπολογίζεται από την επαλληλία των αποκρίσεων στις συνιστώσες Fourier της εν λόγω διέγερσης.
- Η ενέργεια κατά τη διάρκεια της διέγερσης «πηγαινοέρχεται» μεταξύ της διεγείρουσας πηγής και του ταλαντωτή, ενώ η τριβή συνεχώς (όχι με σταθερό ρυθμό όμως) αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.
- Η οριακή περίπτωση συντονισμού, χωρίς απόσβεση υπολογίζεται από το όριο της φυσικής λύσης (με δεδομένη αρχική θέση/ταχύτητα) και όχι από αυτό της μαθηματικής λύσης που οδηγεί σε απροσδιοριστία.
- Ένας αρμονικός ταλαντωτής σε στοχαστική διέγερση απορροφά κατά προσέγγιση ενέργεια με σταθερό ρυθμό ανεξάρτητο από τις παραμέτρους ω_0, γ του ταλαντωτή.