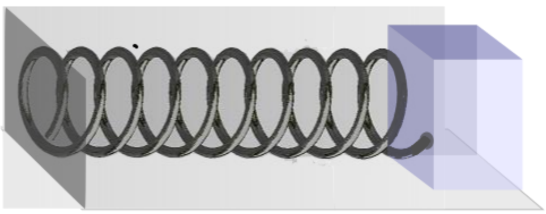
Κεφάλαιο 5
Αρμονικές Ταλαντώσεις

1 Ο αρμονικός ταλαντωτής

Ο αρμονικός ταλαντωτής αποτελεί ένα από το πλέον σημαντικά συστήματα στη Φυσική. Δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι είναι το σημαντικότερο φυσικό σύστημα και ότι όλος ο φυσικός κόσμος περιγράφεται σε θεμελιώδες επίπεδο από ένα πεδίο αρμονικών ταλαντωτών.

Εμβληματικό μοντέλο για τον αρμονικό ταλαντωτή αποτελεί μία μάζα προσδεδεμένη στο άκρο ενός γραμμικού ελατηρίου και η οποία κινείται σε οριζόντιο δάπεδο δίχως να ασκείται καμία δύναμη τριβής μεταξύ του δαπέδου και του σώματος (βλ. σχήμα). Το ελατήριο λέγεται γραμμικό διότι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα είναι ευθέως ανάλογη της επιμήκυνσης (ή επιβράχυνσης), x, του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος, δηλαδή είναι $F = -kx$, όπου $k > 0$ η σταθερά του ελατηρίου (γνωστή και ως σταθερά του Hooke). Το $x = 0$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας του ταλαντωτή. Τα σημεία ισορροπίας χαρακτηρίζονται από μηδενική δύναμη έτσι ώστε αν το σώμα βρεθεί σε ένα τέτοιο σημείο με μηδενική ταχύτητα θα παραμείνει για πάντα σε αυτό. Για αυτό το λόγο τα σημεία ισορροπίας λέγονται και σταθερά σημεία (fixed points). Αν η μάζα μετατοπισθεί λίγο από το σημείο ισορροπίας τότε η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο επαναφέρει το σώμα, λόγω του αρνητικού προσήμου της δύναμης, στο σημείο ισορροπίας, στο οποίο επιστρέφει με μη μηδενική ταχύτητα, οπότε συνεχίζει την κίνησή του μέχρις ότου ακινητοποιηθεί εκ νέου και επιστρέψει και πάλι στο αρχικό σημείο. Με τον τρόπο αυτό, όπως ήδη γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο, το σώμα θα εκτελέσει μια περιοδική ταλάντωση.



Ας αναλύσουμε τώρα την κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Η εξίσωση κίνησης της μάζας του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$m\ddot{x} = -kx \; , \tag{1}$$

και η κίνηση $x(t, x_0, v_0, k/m)$ προσδιορίζεται όταν δωθούν η αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0 του σώματος. Επιλέξαμε να γράψουμε τη λύση στη μορφή $x(t, x_0, v_0, k/m)$ αντί της απλούστερης γραφής, $x(t)$, για να τονίσουμε ότι η κίνηση είναι επίσης συνάρτηση των x_0, v_0 και των φυσικών παραμέτρων του προβλήματος k, m μέσω του συνδυασμού $\omega^2 = k/m$ και όχι ξεχωριστά από την καθεμία. Έτσι για κάθε αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0 προκύπτει μοναδική τροχιά για έναν δοσμένο ταλαντωτή. Επιπλέον η $x(t, x_0, v_0, \omega^2)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς όλες τις μεταβλητές της. Η συνέχεια και διαφορισιμότητα των λύσεων ως προς τις αρχικές συνθήκες και τις παραμέτρους αποτελεί την βάση των διαταρακτικών μεθόδων και έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία, διότι βεβαιώνει ότι πάντοτε η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος έχει σε κάθε χρονική στιγμή συνεχή και διαφορίσιμη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες και τις παραμέτρους του συστήματος.

Πλαίσιο: 1

Μια κλασσική κατασκευή της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή

Η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$V = -\int_0^x F(x')\, dx' = kx^2/2$$

και έτσι η διατήρηση της ενέργειας οδηγεί στη σχέση ότι

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{k}{2}x_0^2 \, ,$$

ή

$$\dot{x} = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

με $\omega = \sqrt{k/m}$ και

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad . \tag{2}$$

Συνεπώς

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \pm\omega \int_0^t d\tau \, ,$$

και θέτοντας $\xi = a\cos\psi$ βρίσκουμε

$$x(t) = a\cos\left(\mp\omega t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right) \quad , \tag{3}$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$x(t) = a\cos(\omega t + \phi) \tag{4}$$

με

$$\phi = \tan^{-1}\frac{v_0}{\omega x_0} \; . \tag{5}$$

Το αρνητικό πρόσημο στην σχέση (3) απορροφήθηκε στην (4) με κατάλληλη επιλογή της αρχικής φάσης. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο τιμές του $\cos^{-1}(x_0/a)$, μία για τη λύση με το $+\omega t$ και μία για τη λύση με το $-\omega t$. Και οι δύο επιλογές οδηγούν στην ίδια λύση. Εμείς επιλέξαμε τη μια από αυτές μέσω της (28). Η αρχική φάση όπως ορίστηκε έχει και αυτή πρόβλημα, αφού για $v_0 \to -v_0$ και $x_0 \to -x_0$ η φάση μέσω της (28) είναι ίδια. Αν είμασταν πιο ακριβείς θα έπρεπε να προσδιορίσουμε επιπλέον στον ορισμό της φάσης ότι $\phi \in (0, \pi)$ για $v_0 > 0$ και $\phi \in (\pi, 2\pi)$ για $v_0 < 0$.

Η περιοδικότητα της κίνησης στη μορφή της (4) αναδύεται μέσω της περιοδικότητας του συνημιτόνου. Η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από το σημείο ισορροπίας, ή αλλιώς το πλάτος της ταλάντωσης, συνδέεται με τις αρχικές συνθήκες μέσω της (27) και απ' ότι φαίνεται δεν επηρεάζει καθόλου την περίοδο $2\pi/\omega$ της κίνησης.

Χρησιμοποίωντας τη διατήρηση της ενέργειας, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση $x(t, x_0, v_0, \omega^2)$ (βλ. Πλαίσιο 5.1). Αντ' αυτού στο κεφάλαιο αυτό θα ακολούθησουμε άλλο τρόπο για να προσδιορίσουμε την κίνηση προκειμένου να αναδείξουμε έναν νέο τρόπο μελέτης της εξέλιξης των φυσικών συστημάτων.

Η υπάρξη και η μοναδικότητα της τροχιάς ενός φυσικού συστήματος, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, διασφαλίζεται από την πρόταση ότι υπάρχει μοναδική λύση στο σύστημα των διαφορικών εξίσωσεων

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu) \ , \ \text{ με } i = 1, \cdots, n \ , \tag{6}$$

όπου μ δομένες παράμετροι, όταν οι n^2 παράγωγοι $\partial f_i/\partial x_j$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x_i σε όλο το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f_i[1]. Υπό αυτές τις συνθήκες η λύση θα είναι και συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση των αρχικών συνθηκών. Αν επιπλέον οι f_i είναι συνεχείς (και διαφορίσιμες) συναρτήσεις των μ τότε και η λύση θα είναι αντίστοιχα συνεχής (και διαφορίσιμη) συνάρτηση των παραμέτρων μ. .

Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή η εξίσωση κίνησης(μετατρέπεται σε σύστημα πρωτοταξίων διαφορικών εξισώσεων θέτοντας $x = x_1$ και $v = \dot{x} = x_2$, οπότε η (1) μετατρέπεται στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}_1 = x_2 \ \ , \ \ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \ , \tag{7}$$

με $\omega^2 = k/m$, ένα φυσικό μέγεθος με μονάδες αντιστρόφου τετραγώνου του χρόνου. Η (7) ως μια ειδική περίπτωση του συστήματος (6) με $n = 2$, ικανοποιεί προφανώς όλες τις προϋποθέσεις για την ύπαρξη μοναδικής λύσης, η δε λύση εξαρτάται συνεχώς και διαφορισίμως από τις αρχικές συνθήκες και την παράμετρο ω (στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις είναι οι $f_1(x_1, x_2) = x_2$ και $f_2(x_1, x_2) = -\omega^2 x_1$).

Είναι προφανές ότι κάθε μηχανικό σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων μπορεί να γραφεί ως ένα σύστημα πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων άρτιου πλήθους και στη συνέχεια να προσδιοριστεί η εξέλιξη του συστήματος ως η μοναδική τροχιά στον αντίστοιχο φασικό χώρο που περνά από το το αρχικό σημείο το οποίο καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες.

[1] Μπορείτε να βρείτε τη σχετική απόδειξη σε ένα καλό βιβλίο διαφορικών εξισώσεων. Προτείνουμε το κεφ. 4 του Arnol'd *Ordinary Differential Equations.*

2 Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή

Ο αρμονικός ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από μια ιδιαίτερη ιδιότητα που τον καθιστά ξεχωριστό ανάμεσα στα διάφορα φυσικά συστήματα. Η εξίσωση κίνησής του είναι γραμμική. Μία εξίσωση λέγεται γραμμική αν οι λύσεις της εξίσωσης ικανοποιούν την αρχή της γραμμικής υπέρθεσης: δηλαδή εάν x_1 και x_2 ικανοποιούν την εξίσωση κίνησης, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ για κάθε πραγματική τιμή των α_1, α_2 ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης. Πράγματι αν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις κάποιου αρμονικού ταλαντωτή, αν δηλαδή ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0\ ,\ m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0\ ,$$

τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ θα αντιστοιχεί σε λύση του αρμονικού ταλαντωτή, διότι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) \\ &= \alpha_1 m\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \alpha_2 m\frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ &= -\alpha_1 k x_1 - \alpha_2 k x_2 \\ &= -k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= -kx\ . \end{aligned}$$

Η απόδειξη βασίστηκε στη γραμμικότητα του τελεστή της δευτέρας παραγώγου καθώς και στη γραμμικότητα της συγκεκριμένης συνάρτησης της δύναμης. Δηλαδή αν συμβολίσουμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο με τον τελεστή $\mathcal{L} = d^2/dt^2$ τότε ο τελεστής είναι γραμμικός επειδή σχύει ότι:

$$\mathcal{L}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \alpha_1 \mathcal{L}(x_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(x_2)\ . \tag{8}$$

Γράψαμε τον τελεστή με καλλιγραφικά στοιχεία για να τον αντιδιαστείλουμε με τις συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν σημεία σε σημεία. Οι τελεστές, αντιθέτως, απεικονίζουν συναρτήσεις σε συναρτήσεις και ο ορισμός (8) αναφέρεται στη δράση του τελεστή $\mathcal{L}$ επί των συναρτήσεων x_1 και x_2. Π.χ. ο τελεστής $\mathcal{P} = d/dt$ απεικονίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$, στη συνεχή συνάρτηση $\dot{x}(t) = dx/dt$, δηλαδή αν $x(t) = \sin t$ τότε $\mathcal{P}(\sin t) = \cos t$. Ο τελεστής $\mathcal{Q} = \int_0^t$ απεικονίζει την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $x(t)$ στη συνεχή συνάρτηση $g(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$, δηλαδή αν $x(t) = 2t$ τότε $\mathcal{Q}(2t) = t^2$. Τέλος, ο σταθερός τελεστής ${}_k = k$, όπου k κάποιος πραγματικός αριθμός, απεικονίζει οποιαδήποτε συνάρτηση $x(t)$ στη συνάρτηση $g(t) = k\ x(t)$.

Γραμμικοί τελεστές είναι οι τελεστές οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (8) σε κάποιο χώρο συναρτήσεων. Και οι τρεις τελεστές που αναφέραμε παραπάνω είναι γραμμικοί. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ όμως του οποίου η δράση είναι $\mathcal{L}(f) = (df/dt)^2$ είναι μη γραμμικός αφού $\mathcal{L}(f+g)$ δεν ισούται εν γένει με $\mathcal{L}f + \mathcal{L}g$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στον τελεστή του αρμονικού ταλαντωτή:

$$\mathcal{L} = m\frac{d^2}{dt^2} + k\ , \tag{9}$$

δηλαδή τον τελεστή που απεικονίζει την συνάρτηση $x(t)$ στην

$$\mathcal{L}(x) = m\ddot{x} + kx$$

τότε η εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί με μεγάλη οικονομία να διατυπωθεί ως:

$$\mathcal{L}(x) = 0 \ .$$

Επειδή ο τελεστής (21) που διέπει τη κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή είναι γραμμικός, δηλαδή ικανοποιεί την (8), ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ένα γραμμικό φυσικό σύστημα. Γενικά θα λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό αν διέπεται, με την έννοια της (2), από κάποιο γραμμικό τελεστή.

Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες για τις λύσεις του ταλαντωτή. Αν η $x(t)$ είναι μία λύση του αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση $\mathcal{L}(x) = 0$, τότε μπορούμε αμέσως να προσδιορίσουμε μία απειρία άλλων λύσεων. Για κάθε α, η $\alpha x(t)$ θα είναι και αυτή λύση, διότι

$$\mathcal{L}(\alpha x) = \alpha\mathcal{L}(x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς, αν $x(t)$ είναι η κίνηση που προκύπτει με αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0, τότε η αρχική θέση kx_0 και ταχύτητα kv_0 παράγει τη κίνηση $kx(t)$. Αν τώρα έχουμε βρεί δύο λύσεις: την x_1 και την x_2 τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός που σχηματίζεται από αυτές είναι λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Θα δείξουμε ότι πράγματι η $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ είναι λύση:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1\mathcal{L}(x_1) + \alpha_2\mathcal{L}(x_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \ .$$

Αυτή η ιδιότητα μας καθιστά ικανούς να περιγράφουμε την κίνηση του ταλαντωτή με ιδιαίτερη οικονομία. Για να καταλάβουμε αυτή την κατασκευή πρέπει να δούμε την εξέλιξη του ταλαντωτή στο χώρο που ορίζουν οι θέσεις x και οι ταχύτητες $v = \dot{x}$ (δηλαδή τον φασικό χώρο). Στο χώρο αυτό μπορεί να δοθεί δομή δισδιάστατου διανυσματικού χώρου αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο του επιπέδου την κατάσταση:

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} ,$$

και ορίζοντας την πράξη πρόσθεσης δύο καταστάσεων ως

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} ,$$

και του πολλαπλασιασμού με κάποιο πραγματικό αριθμό λ:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \ .$$

Μία βάση του χώρου αυτού θα μπορούσαν να αποτελέσουν οι καταστάσεις

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

και

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Κάθε στοιχείο του επιπέδου είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, π.χ.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι κάθε σημείο μπορεί να προκύψει ως γραμμικός συνδυασμός δύο στοιχείων του χώρου τα οποία μπορούν να ληφθούν ως βάση.

Κάθε αρχική συνθήκη του ταλαντωτή συνδεεται με έναν διαφορετικό γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης και επομένως οδηγεί σε μια μοναδική τροχιά στο χώρο των φάσεων η οποία αποτελεί μια λύση της εξίσωσης κίνησης που σέβεται τις δομένες αρχικές συνθήκες.

Η λύση αυτή μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε δύο οποιοσδήποτε ανεξάρτητες λύσεις του ταλαντωτή. Με τον όρο ανεξάρτητες εννοούμε δύο λύσεις οι οποίες δεν είναι η μία πολλαπλάσιο της άλλης. Για παράδειγμα οι δύο λύσεις, που αφορούν στις αρχικές συνθήκες των (10,11):

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\ \sin\omega t \end{pmatrix},\ \psi_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ \cos\omega t \end{pmatrix}, \tag{12}$$

είναι ανεξάρτητες, ενώ οι

$$\tilde{\psi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\ \sin\omega t \end{pmatrix},\ \tilde{\psi}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos\omega t \\ \sqrt{2}\omega\ \sin\omega t \end{pmatrix}, \tag{13}$$

δεν είναι ανεξάρτητες.

3 Λύση του αρμονικού ταλαντωτή, βάσει της γραμμικότητάς του

Τις λύσεις του προηγούμενου εδαφίου τις κατασκευάσαμε παρατηρώντας απλώς ότι

$$\frac{d}{dt}(-\omega\sin\omega t) = -\omega^2\cos\omega t$$

και

$$\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t = -\omega^2\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

δηλαδή ότι και οι δύο ικανοποιούν την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε αυτές τις λύσεις συατηματικά βασιζόμενοι στη γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή.

Η εξίσωσή του σε επίπεδο πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων είναι όπως είδαμε παραπάνω

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\Psi \tag{14}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Η εξίσωση αυτή θυμίζει καταπληκτικά την βασικότατη εξίσωση της φυσικής $\dot{\psi} = a\psi$ η οποία έχει ως λύση την $\psi(t) = e^{at}\psi_0$, μόνο που τώρα πρόκειται για μια αντίστοιχη εξίσωση πινάκων. Μολαταύτα, ας εξετάσουμε γιατί αυτή που γράψαμε είναι η λύση της αντίστοιχης μονοδιάστατης πρωτοβάθμιας διαφορικής εξίσωσης. Προς τούτο ας γράψουμε τη λύση αναλύοντας τι πραγματικά συμβολίζει η εκθετική συνάρτηση.

$$e^{at}\psi_0 = \left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots + \frac{(at)^n}{n!} + \ldots\right]\psi_0\,.$$

Αν παραγωγίσουμε αυτή τη συνάρτηση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{at}\psi_0) &= \frac{d}{dt}\left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots + \frac{(at)^n}{n!} + \ldots\right]\psi_0 \\
&= \left[a + \frac{2a^2t}{2!} + \frac{3a^3t^2}{3!} + \ldots + \frac{na^nt^{n-1}}{n!} + \ldots\right]\psi_0 \\
&= a\left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + + \ldots + \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right]\psi_0 \\
&= ae^{at}\psi_0\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

δηλαδή η εν λόγω έκφραση αποτελεί λύση της $\dot{\psi} = a\psi$ λόγω της ακριβούς μορφής της εκθετικής συνάρτησης. Αν λοιπόν ορίσουμε το αντίστοιχο της εκθετικής συνάρτησης για τετραγωνικούς πίνακες $\mathbf{A}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!} + \ldots\,, \tag{17}$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος $\dim(\mathbf{A}) \times \dim(\mathbf{A})$ πίνακας, τότε ακριβώς η ίδια μορφή λύσης θα "δουλεύει" ορθά και για το αντίστοιχο σύστημα πρωτοβάθμιων εξισώσεων που περιγράφεται μέσω της μορφής που συναντήσαμε παραπάνω για την περιγραφή της δυναμικής του αρμονικού ταλαντωτή $\frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{A}\Psi$, δηλαδή η λύση θα έχει τη μορφή

$$\Psi(t) = e^{\mathbf{A}t}\Psi(0)\,. \tag{18}$$ [2]

Γεννάται τώρα το ερώτημα, πώς θα υπολογίσουμε τον 2×2 πίνακα $e^{\mathbf{A}t}$; Ας ξεκινήσουμε να υπολογίσουμε κάποιους όρους του αναπτύγματος (17) για τον εν λόγω πίνακα $\mathbf{A}$ του αρμονικού ταλαντωτή (βλ. (15)):

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{I} \,,$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. Αυτή η εξαιρετική ιδιότητα ο $\mathbf{A}^2$ να είναι πολλαπλάσιος του μοναδιαίου πίνακα, οπότε από το σύνολο των $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \ldots$ γραμμικά ανεξάρτητοι να είναι μόνο 2, οι $\mathbf{I}, \mathbf{A}$ (και όχι 4 όπως θα περίμενε κανείς από ένα αντικείμενο που αποτελείται από 4 στοιχεία) αποτελεί την ουσία του θεμελιώδους θεωρήματος της γραμμικής άλγεβρας των Cayley-Hamilton, και αφορά όχι μόνο τον συγκεκριμένο πίνακα $\mathbf{A}$ αλλά κάθε 2×2 πίνακα.[3] Βασισμένοι σε αυτή την ιδιότητα η εκθετική συνάρτηση του εν λόγω πίνακα, σε μορφή σειράς μπορεί να μαζευτεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \ldots \\
&= \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^4}{4!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) + \\
&\quad \left(\mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5 t^5}{5!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) \\
&= \left(\mathbf{I} + \frac{(-\omega^2)\mathbf{I} t^2}{2!} + \frac{(-\omega^2)^2 \mathbf{I} t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-\omega^2)^n \mathbf{I} t^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) + \\
&\quad \left(\mathbf{A}t + \frac{(-\omega^2)\mathbf{A} t^3}{3!} + \frac{(-\omega^2)^2 \mathbf{A} t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-\omega^2)^n \mathbf{A} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) \\
&= \mathbf{I} \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{\omega^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) + \\
&\quad \mathbf{A} \left(t - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \frac{\omega^4 t^5}{5!} + \ldots (-1)^n \frac{\omega^{2n} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) \,. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Στις δυο τελευταίες σειρές μέσα στις παρενθέσεις αναγνωρίζει κανείς το ανάπτυγμα του $\cos \omega t$ και του $(\sin \omega t)/\omega$, δηλαδή

$$e^{\mathbf{A}t} = \cos \omega t \, \mathbf{I} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Ιδού οι λύσεις που μαντέψαμε παραπάνω (12) που προκύπτουν ως από τις αρχικές καταστάσεις (10,11). Είναι οι στήλες του (20), ή αλλιώς το αποτέλεσμα της δράσης του $e^{\mathbf{A}t}$ στις αρχικές καταστάσεις (10,11).

---

[2] Προσέξτε ότι εν αντιθέσει με την $e^{at}\psi_0$, όπου δεν είχε καμία σημασία η σειρά γραφής της εκθετικής συνάρτησης και της αρχικής κατάστασης, στην περίπτωση με τους πίνακες η σειρά παίζει ρόλο. Αν ήταν γραμμένα τα στοιχεία της (18) με ανάποδη σειρά δεν θα ήταν εφιστός ο πολλαπλασιασμός των αντίστοιχων πινάκων.

[3] Γενικά για πίνακες $N \times N$, γραμμικά ανεξάρτητοι είναι N και όχι N^2 πίνακες.

Αν και η κατασκευή αυτή μοιάζει περισσότερο με ένα περίεργο μαθηματικό κατασκεύασμα παρά με μια "φυσική" λύση, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μάλλον είναι πιο κοντά στο φυσικό μηχανισμό εξέλιξης ενός φυσικού συστήματος, παρά η "μαγική" εύρεση της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή ως εκείνη η συνάρτηση που επαληθεύει τη σχετική διαφορική εξίσωση.

4 Πώς μπορουμε να ελέγξουμε εάν ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό.

Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι γραμμικός επειδή η εξέλιξη του διέπεται από γραμμικούς τελεστές. Γενικότερα θα λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό αν διέπεται από γραμμικούς τελεστές.

Ο τελεστής του αρμονικού ταλαντωτή που είδαμε παραπάνω

$$\mathcal{L} = m\frac{d^2}{dt^2} + k \ , \tag{21}$$

είναι προφανώς γραμμικός αφού

$$\mathcal{L}\left(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\right) = \alpha_1\left(m\frac{d^2}{dt^2}x_1 + kx_1\right) + \alpha_2\left(m\frac{d^2}{dt^2}x_2 + kx_2\right) = 0 + 0 = 0. \tag{22}$$

Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή προέκυψε από τη γραμμικότητα της δεύτερης παραγώγου η οποία εμφανίζεται σε όλα τα μηχανικά συστήματα, αλλά κυρίως από την ιδιαίτερη μορφή της δύναμης στον ταλαντωτή η οποία είναι από μόνη της γραμμική (σε αντίθεση με όλες τις άλλες δυνάμεις):

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = -k((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1(-kx_1) + \alpha_2(-kx_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2). \tag{23}$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να παρασυρθεί κανείς και να βγάλει το βιαστικό συμπέρασμα, ότι η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση φυσικού συστήματος και επομένως δεν έχει κάποια ιδιαίτερη αξία μεταξύ των υπολοίπων φυσικών συστημάτων. Ακόμη περισσοτερο, θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς ότι το εν λόγω φυσικό σύστημα έχει επιλεχθεί σκόπιμα, επειδή έχει μια εύκολα κατασκευάσιμη λύση (λόγω γραμμικότητας). Η πραγματικότητα είναι ότι ακριβώς αυτή η ιδιότητα της γραμμικότητας που τον καθιστά εύκολα επιλύσιμο αποτελεί και το στοιχείο εκείνο που του προσδίδει μια πολύ πιο ευρεία σπουδαιότητα. Σχεδόν κάθε φυσικό σύστημα έχει κάποιο (ή κάποια) σημείο(α) ισορροπίας. Στα σημεία αυτά η δύναμη μηδενίζεται και αν το φυσικό σύστημα τοποθετηθεί εκεί με μηδενική ταχύτητα θα παραμείνει για πάντα εκεί. Τι θα συμβεί όμως αν το σύστημα μετατοπιστεί ελαφρά από αυτό το σημείο; Το ερώτημα αυτό μπορεί να μετατραπεί στο ακόλουθο μαθηματικό πρόβλημα: Αν μια συνάρτηση μηδενίζεται στο σημείο x_0, τι τιμή παίρνει η συνάρτηση στο παραπλήσιο σημείο $x \simeq x_0$; Η απάντηση σύμφωνα με το θεώρημα Taylor είναι

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0)$$

το οποίο απλώς λέει ότι η συνάρτηση πολύ κοντά στο σημείο x_0 συμπεριφέρεται γραμμικά (το γράφημά της είναι σε πολύ καλή προσέγγιση μια ευθεία γραμμή) ως προς την απόσταση $x - x_0$ με κλίση ίση με την παράγωγο της συνάρτησης στο x_0. Μάλιστα, η ακρίβεια της παραπάνω πρότασης είναι τόσο πιο καλή όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο σημείο x_0.[4] Επομένως η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή περιγράφει πολύ καλά τη συμπεριφορά όλων των φυσικών συστημάτων κοντά στο σημείο ισορροπίας τους. Ακριβέστερα περιγράφει τα φυσικά συστήματα κοντά σε ευσταθή σημεία ισορροπίας τους, όπου η παράγωγος της δύναμης είναι αρνητική (όπως και στον αρονικό ταλαντωτή).[5] Η παραπάνω γραμμική προσέγγιση ισχύει βέβαια και για ασταθή σημεία ισορροπίας με θετική παράγωγο. Όμως η αστάθεια θα μετατοπίσει γρήγορα τα συστήματα αυτά μακριά από το σημείο ισορροπίας τους και τότε ίσως πάψει και η γραμμική συμπεριφορά τους. Από την άλλη τέτοια συστήματα κοντά σε σημείο ισορροπίας δεν είναι δυνατό να παρατηρηθούν στη φύση αφού τάχιστα απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας, οπότε δεν παρουσιάζουν και φυσικό ενδιαφέρον.

Ας δούμε λοιπόν στην περίπτωση του εξαιρετικά ενδιαφέροντος αυτού φυσικού συστήματος με ποιον τρόπο μπορεί κανείς να ελέγξει πειραματικά τη γραμμικότητά του. Αν προετοιμάσουμε έναν ταλαντωτή με μία από τις βάσεις του διανυσματικού χώρου των καταστάσεων του, για παράδειγμα την (10) και στη συνέχεια ας τον αφήσουμε να εξελιχθεί για χρόνο t_0. Στη συνέχεια ας κάνουμε το ίδιο προετοιμάζοντας αρχικά τον ταλαντωτή στο άλλο διάνυσμα βάσης, το (11). Αν το σύστημα είναι γραμμικό θα πρέπει μια αρχική κατάσταση της μορφής

$$x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή κάποιο τυχαίο γραμμικό συνδυασμό των δύο αρχικών καταστάσεων (με αρχική θέση x_0 και αρχική ταχύτητα v_0), να εξελιχθεί μετά από χρόνο t_0 στον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των καταστάσεων στις οποίες εξελίχθηκαν οι αρχικές μας καταστάσεις. Σχηματικά το σύστημα είναι γραμμικό εφόσον:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} x_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 + v_0 x_2 \\ x_0 v_1 + v_0 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυση δεν χρειάστηκε καν να ξέρουμε τη λύση της εξέλιξης του ταλαντωτή. Η γραμμικότητα μας επέτρεψε να προβλέψουμε την εξέλιξη του συστήματος για

[4] Εδώ ανακύπτει το ερώτημα, αν υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης για το "κοντά". Η απάντηση έρχεται μέσα από το θεώρημα Taylor: Ο επόμενος όρος του αναπτύγματος Taylor είναι ο $f''(x_0)(x-x_0)^2/2$. Επομένως για να θεωρηθεί ο επόμενος όρος αμελητέος θα πρέπει $|(x-x_0)f''(x_0)/(2f'(x_0))| << 1$, δηλαδή $|x-x_0| << |2f'(x_0)/f''(x_0)|$. Αν η 2η παράγωγος της f στο x_0 είναι 0 θα πρέπει να συσχετίσουμε αντιστοίχως τον 1ης τάξης όρο στο ανάπτυγμα Taylor με τον αμέσως επόμενο μη μηδενικό όρο.

[5] Αρκεί και η αρχική ταχύτητα να είναι τέτοια ώστε το σύστημα να μην απομακρυνθεί πολύ από το σημείο ισορροπίας.

δεδομένο χρονικό διάστημα, γνωρίζοντας, από πειράματα, την εξέλιξή του για το ίδιο χρονικό διάστημα αν αυτό ξεκινούσε από 2 τελείως αυθαίρετες αρχικές καταστάσεις, άσχετες με την αρχική κατάσταση του συγκεκριμένου συστήματος.

Προφανώς η παραπάνω διερεύνηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα εκτελώντας τόσα πειράματα όσό είναι το πλήθος των ανεξάρτητων καταστάσεων του φυσικού συστήματος.

5 Ισοχρονικότητα του αρμονικού ταλαντωτή

Από το προηγούμενο κεφάλαιο μάθαμε ότι ένα σώμα κινούμενο στο δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή $kx^2/2$ εκτελεί περιοδική κίνηση, υπάρχει δηλαδή ελάχιστος χρόνος T με την ιδιότητα

$$x(t+T) = x(t)$$

για κάθε t, που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι και η ταχύτητα και όλες οι ανώτερες χρονικές παράγωγοι είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις. Ενώ γενικά η περίοδος T ενός μονοδιάστατου συστήματος το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται σε ένα πεπερασμένο διάστημα αναμένεται να εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες x_0 και v_0 ή ακριβέστερα όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο να είναι συνάρτηση μόνο της ενέργειας του σώματος,

$$T\left(E = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \omega^2 x_0^2\right)\right) \ ,$$

ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ισόχρονος και η περίοδος του δεν εξαρτάται από την ενέργεια: η περίοδος είναι ίδια είτε το σώμα έχει μέγιστη απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας 1 mm είτε 1 km (αρκεί βέβαια το δυναμικό να έχει σε όλη αυτή την έκταση τη μορφή του αρμονικού ταλαντωτή).

Η θέση της μάζας με αρχική θέση x_0 και αρχική ταχύτητα v_0 την χρονική στιγμή t δίνεται απο το άθροισμα των δύο αρμονικών :

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \ , \tag{25}$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες rad/s) . Η λύση αυτή προκύπτει επειδή και οι δύο συναρτήσεις $\cos\omega t, \sin\omega t$ ικανοποιούν την (1) και η (25) ικανοποιεί και τις δύο αρχικές συνθήκες και συνεπώς η (25) είναι η μοναδική κίνηση που προκύπτει από αυτές τις αρχικές συνθήκες. Οι συναρτήσεις $\cos\omega t, \sin\omega t$ είναι περιοδικές με περίοδο $\omega T = 2\pi$, οπότε και η $x(t)$ είναι πάντοτε περιοδική (δηλαδή είναι περιοδική για όλες τις αρχικές συνθήκες, ακόμα και για $x_0 = v_0 = 0$) και η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi/\omega$ ή $T = 1/\nu$ με $\nu = \omega/(2\pi)$ η συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες κύκλους/s ή Hertz (Hz)).

Ισοδύναμα η θέση του ταλαντωτή μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}\left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}\cos\omega t+\frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}\sin\omega t\right] \text{[6]}\\
&= a(\cos\phi\cos\omega t+\sin\phi\sin\omega t)\\
&= a\cos(\omega t-\phi)\ , \qquad (26)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}\ ,\ \cos\phi=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}\ ,\ \sin\phi=\frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}\ .
$$

Γραμμένη η λύση στη μορφή αυτή διαφαίνεται αμέσως ότι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από το σημείο ισορροπίας, ή το πλάτος της ταλάντωσης, είναι

$$
\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ , \qquad (27)
$$

και η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$
\phi=\tan^{-1}\frac{v_0}{\omega x_0}\ , \qquad (28)
$$

με την έξτρα σημείωση ότι η τιμή του ϕ μέσω της τελευταίας σχέσης μπορεί να πάρει διπλή τιμή στο διάστημα $[0,2\pi)$ και για να είναι κανείς πιο ακριβής θα πρέπει να προσθέσει στην τιμή της ϕ που ορίζεται μέσω της σχέσης (28) στο διάστημα $[-\pi/2,\pi/2)$ την τιμή π όταν η ταχύτητα είναι αρνητική.

Παρατηρήστε ότι η περίοδος της ταλάντωσης $T=2\pi/\omega$ είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες. Όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος τότε η ταλάντωση λέγεται ισόχρονη. Αυτό είναι άλλο ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του αρμονικού ταλαντωτή που προκύπτει κι αυτό εξαιτίας της γραμμικότητάς του. Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό.

Όπως είδαμε στο εδάφιο που κατασκευάσαμε τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή μέσω της εκθετικής συνάρτησης πίνακα, βρήκαμε ότι

$$
\Psi(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=e^{\mathbf{A}t}\Psi(0)=e^{\mathbf{A}t}\begin{pmatrix} x(0)\\ v(0)\end{pmatrix}
$$

όπου ο πίνακας **A** εμπεριέχει φυσικές παραμέτρους του ταλαντωτή k,m (και μάλιστα έναν συγκεκριμένο συνδυασμό αυτών, τον λόγο τους) και δεν έχει καμία αναφορά στις αρχικές συνθήκες που προφανώς σχετίζονται με το πλάτος ταλάντωσης και την ενέργεια του ταλαντωτή. Οι

[6] Μπορεί κανείς να αντικαταστήσει τα 2 κλάσματα που προηγούνται των τριγωνομετρικών εξίσωσεων με το συνημίτονο και το ημίτονο κάποιας συγκεκριμένης γωνίας αφού και οι 2 ποσότητες βρίσκονται στο διάστημα $[-1,1]$ και έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με 1.

αρχικές συνθήκες, λόγω γραμμικότητας του προβλήματος, μας δίνονται ως ένα διάνυσμα πάνω στο οποίο θα δράσει η $e^{\mathbf{A}t}$. Παράλληλα γνωρίζουμε από την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου για την κίνηση σε μονοδιάστατα δυναμικά, ότι υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος χρόνος T σε κάθε πρόβλημα ταλάντωσης (όχι κατά ανάγκη αρμονικής) μέσα σε πηγάδι δυναμικού, όπου το σύστημα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση $\Psi(T) = \Psi(0)$. Συνεπώς για τον αρμονικό ταλαντωτή

$$\mathbf{I}\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}T}\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

για οποιαδήποτε $x(0), v(0)$, δηλαδή $e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$. Με άλλα λόγια ο T δεν μπορεί να συνδέεται παρά μόνο με την παράμετρο ω του $\mathbf{A}$ και όχι με τις αρχικές συνθήκες. Επειδή $e^{\mathbf{A}NT} = e^{\mathbf{A}T}e^{\mathbf{A}T}\dots e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$ και τα πολλαπλάσια του T παίζουν ρόλο περιόδου για τον ταλαντωτή, η μικρότερη τιμή του T η οποία ικανοποιεί την $e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$, ονομάζεται περίοδος του ταλαντωτή και όπως είπαμε δεν εξαρτάται παρά μόνο από το ω. Το συμπέρασμα αυτό της ισοχρονικότητας βασίστηκε στην ανάλυση του ταλαντωτήως γραμμικό σύστημα και θα μπορούσε να γίνει ακόμη και χωρίς την ακριβή έκφραση του πίνακα $e^{\mathbf{A}T}$. Αφού γνωρίζουμε όμως τη μορφή του πίνακα αυτού και τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η σχέση $\omega - T$ είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε, ότι η ομοιότητα μεταξύ των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων, συνημίτονο και ημίτονο, (αρκεί να σύρουμε το γράφημα της μιας κατά $\pi/2$ και το γράφημα της μιας θα "πέσει" πάνω στης άλλης) και η σχέση τους με τη βάση της λύσης του γραμμικού προβλήματος του αρμονικού ταλαντωτή, έχει τη ρίζα της στην ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης $e^{\mathbf{A}t}$: [7]

$$e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2}$$

Έτσι η $\cos\omega(t_1+t_2)$ (η εξέλιξη της $(10)^\top$ για χρόνο t_1+t_2) μπορεί να γραφεί και

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\omega(t_1+t_2) \\ \dots \end{pmatrix} &= e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\mathbf{A}t_1}\begin{pmatrix} \cos\omega t_2 & \frac{\sin\omega t_2}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t_2 & \cos\omega t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\mathbf{A}t_1}\begin{pmatrix} \cos\omega t_2 \\ -\omega\sin\omega t_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega t_1 & \frac{\sin\omega t_1}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t_1 & \cos\omega t_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega t_2 \\ -\omega\sin\omega t_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega t_2\cos\omega t_1 - \sin\omega t_2\sin\omega t_1 \\ \dots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

[7] Προσοχή, η ιδιότητα αυτή ενώ φαίνεται αυτονόητη από την αριθμητική εμπειρία μας με τις δυνάμεις αριθμών, δεν είναι τόσο αυτονόητη, αφού **δεν** ισχύει γενικά για πίνακες ότι $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$!

Μπορεί να σκεφθείτε ότι αυτός ήταν ένας πολύ μη αποδοτικός τρόπος απόδειξης της γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας του συνημιτόνου αθροίσματος. Αν όμως δεν γνωρίζατε καν τι είναι το συνημίτονο και το ημίτονο και τα εκλαμβάνατε ως απλές ονομασίες για τα αναπτύγματα που εμφανίστηκαν στη σχέση (19), η ιδιότητα

$$\cos(a+b) = C\cos b + S\sin b$$

με $C = \cos a$, $S = -\sin a$ θα ήταν αξιοσημείωτη. Με ένα γραμμικό συνδυασμό των $\cos x$, $\sin x$ μπορούμε να αναπαράγουμε το $\cos(x+y)$ για κάθε τιμή του y!

6 Αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση

Στο εδάφιο περί γραμμικότητας του αρμονικού ταλαντωτή είδαμε ότι εφόσον ένα σύστημα είναι γραμμικό η εξέλιξή του διέπεται από μια εκθετική συνάρτηση. Το συνημίτονο και το ημίτονο μέσω των οποίων κατασκευάστηκε η γενική λύση του αρμονικού ταλαντωτή είναι και αυτά γραμμικός συνδυασμός εκθετικών λύσεων με μιγαδικούς εκθέτες. Είναι λογικό λοιπόν να αναζητούμε λύσεις των γραμμικών συστημάτων της μορφής $e^{\lambda t}$ με κατάλληλους συντελεστές λ.

Το σύστημα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια είναι μια λιγότερο εξιδανικευμένη παραλλαγή του αρμονικού ταλαντωτή, του ταλαντωτή με γραμμική απόσβεση. Δηλαδή ενός αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος υπόκειται και σε δυνάμεις τριβής με γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα. Μολονότι ο τύπος αυτός τριβής δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι είναι κάτι που αναμένουμε για φυσικούς λόγους να εμφανίζεται σε ταλαντούμενα φυσικά συστήματα, η κίνηση ενός σώματος μέσα σε συνεχές μέσο περιγράφεται με αρκετά καλή προσέγγιση από τέτοιου είδους δυνάμεις αντίστασης. Το σύστημα αυτό, που περιγράφεται από την εξίσωση

$$m\,\ddot{x} + 2\gamma\, m\,\dot{x} + k\,x = 0\,, \tag{30}$$

όπου $-2\gamma\, m\,\dot{x}$ είναι η δύναμη της αντίστασης ενώ ο συντελεστής της $2\gamma\, m$ έχει γραφεί σε αυτή τη μορφή ώστε να διευκολύνει τις αριθμητικές πράξεις στη συνέχεια. Με μια απλή ανακατανομή των όρων θα έχουμε

$$\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega^2\,x = 0\,, \tag{31}$$

όπου τώρα είναι εμφανές ότι τόσο η $\omega = \sqrt{k/m}$ όσο και η σταθερά γ (ένα μέτρο του πόσο παχύρρευστό είναι το συνεχές μέσου) έχουν διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου.

Στο γραμμικό αυτό πρόβλημα ας δοκιμάσουμε λύση της μορφής $e^{\lambda t}$ η οποία όπως γνωρίζουμε θα είναι μια αποδεκτή μορφή λύσης. Πράγματι τότε η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0\,.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνει

$$\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ ,\ \lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ ,$$

οπότε αμέσως βλέπουμε ότι η περίπτωση $\gamma > \omega$ και η περίπτωση $\gamma < \omega$ οδηγούν σε λύσεις αρκετά διαφορετικού μορφολογικά τύπου. Η πρώτη περίπτωση θα έχει ως βάση τις εκθετικές λύσεις

$$x_1(t) = e^{\lambda_+ t}\ ,\ x_2(t) = e^{\lambda_- t}\ ,$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση η βάση θα αποτελείται από μιγαδικές λύσεις

$$x_1(t) = e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t}\ ,\ x_2(t) = e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t}\ .$$

Μιγαδικές λύσεις; Μα η θέση του ταλαντωτή μετριέται με πραγματικές τιμές. Προσέξτε ότι οι μιγαδικές αυτές λύσεις είναι συζυγείς η μία της άλλης, οπότε αν πολλαπλασιαστούν με μιγαδικά συζυγείς συντελεστές θα μας δώσουν μια πραγματική λύση. Μην ξεχνάτε εξάλλου ότι και τα συνημίτονα και τα ημίτονα του αρμονικού ταλαντωτή είναι γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών λύσεων:

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\ ,\ \sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\imath}\ .$$

Όπως και στο πρόβλημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή η βάση για την περιγραφή του προβλήματος αποτελείται από δύο ανεξάρτητες λύσεις. Η δε λύση συναρτήσει των αρχικών συνθηκών θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων με τόσες ανεξάρτητες παραμέτρους, όσες και οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή δύο. Έτσι η γενική λύση στην περίπτωση που $\gamma > \omega$ θα είναι η

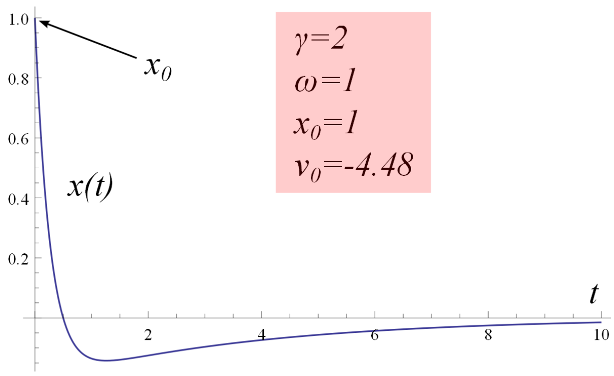
$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+\, t} + A_- e^{\lambda_-\, t} = e^{-\gamma\, t}\left(A_+ e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t} + A_- e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t}\right) \tag{32}$$

Λόγω του ότι $\gamma > \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ και οι δύο αυτές ανεξάρτητες λύσεις παρουσιάζουν εκθετική πτώση, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αργά ή γρήγορα ο ταλαντωτής θα πάψει να κινείται. Είναι εύκολο να δείξει κανείς (θέτοντας $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$) ότι τα A_+, A_- συνδένται με τις αρχικές συνθήκες ως ακολούθως

$$A_+ = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}\right]\ ,\ A_- = \frac{1}{2}\left[x_0 - \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}\right]\ .$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της (32), ώστε να θυμίζει πιο πολύ τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή, είναι ο

$$x(t) = e^{-\gamma\, t}\left(x_0 \cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ t)\right)\ ,$$



Σχήμα 1: Η εξέλιξη ενός ταλαντωτή με τα χαρακτηριστικά/αρχικές συνθήκες που αναγράφονται. Η σχέση αρχικής ταχύτητας - αρχικής θέσης είναι κατάλληλα επιλεγμένη ώστε ο ταλαντωτής να διέρχεται για πρώτη και τελευταία φορά από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t_0 = 0.4$. Παρατηρήστε την γρήγορη εξέλιξη του ταλαντωτή μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του και τον αργό χρόνο εξέλιξης στη συνέχεια μέχρι μηδενισμού της θέσης.

μαζεύοντας κατάλληλα τα εκθετικά της προηγούμενης σχέσης (32.

Ο ταλαντωτής αυτός δεν μπορεί να εκτελέσει ταλαντώσεις. Είναι καταδικασμένος να περάσει το πολύ μια φορά από το σημείο ισορροπίας. Οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές που θα καθορίσουν αν θα διασχίσει ποτέ το σημείο ισορροπίας. Για παράδειγμα φαίνεται αμέσως από τη μορφή της (6) ότι για ομόσημα x_0 και v_0 δεν υπάρχει χρόνος t που να μηδενίζεται η $x(t)$. Θα πρέπει η αρχική ταχύτητα να έχει αντίθετο πρόσημο από την αρχική θέση (και κατάλληλη τιμή) για να καταφέρει να φθάσει ο ταλαντωτής στη θέση ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Στη μορφή (32) οι δύο λύσεις $e^{\lambda_+ t}$ και $e^{\lambda_- t}$ έχουν διαφορετικό εκθετικό ρυθμό πτώσης. Η μεν $e^{\lambda_+ t}$ φθίνει πιο αργά (μικρότερο κατ' απόλυτη τιμή εκθέτη) από την $e^{\lambda_- t}$. Οι αντίστοιχοι χαρακτηριστικοί χρόνοι

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_+|} = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}\ ,\ \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_-|} = \frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

που αντιστοιχούν στο χρόνο που η εκάστοτε λύση θα πέσει στο e^{-1} της αρχικής της τιμής έχουν τη σχέση διάταξης

$$\tau_1 > \frac{1}{\gamma} > \tau_2 .$$

Ο μεν δεύτερος μικρός χρόνος σχετίζεται με το χρόνο που χρειάζεται για να εξισορροπηθεί η απόσβεση από την δύναμη του ταλαντωτή. Στη συνέχεια ο αργός χρόνος τ_1 είναι ο χρόνος που θα εξελιχθεί το σύστημα κρατώντας τη δύναμη της αντίστασης και τη δύναμη επαναφοράς σε διαρκή ισορροπία

$$2\gamma\dot{x} + \omega^2 x \simeq 0\ .$$

Η εξέλιξη ακολουθεί ένα νόμο e^{-t/τ_1} οπότε η επιτάχυνση θα είναι $(1/\tau_1^2)e^{-t/\tau_1}$, δηλαδή μικρότερη από την επιτάχυνση της απόσβεσης $2\gamma/\tau_1 e^{-t/\tau_1}$. Κατ' ουσίαν μετά από μερικούς χρόνους τ_2 περνάμε στη φάση που το σύστημα υπαγορεύεται από την αριστοτέλεια μηχανική.

Η κίνηση του ταλαντωτή όταν $\gamma > \omega$ ονομάζεται υπερκρίσιμη απόσβεση.

Η λύση για τον ταλαντωτή όταν $\gamma < \omega$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma\, t}\left(B_+ e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t} + B_- e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t}\right) \\ &= e^{-\gamma\, t}\left(B_+ e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t} + B_+^\star e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t}\right) \\ &= |B_+| e^{-\gamma\, t}\left(e^{i(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t+\phi)} + e^{-i(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t+\phi)}\right) \\ &= 2|B_+| e^{-\gamma\, t} \cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t+\phi\right) \; . \end{aligned} \tag{33}$$

Το πέρασμα στη δεύτερη σειρά της σχέσης βασίστηκε στο ότι η $x(t)$ οφείλει να είναι πραγματική οπότε οι δύο μιγαδικοί αριθμοί της πρώτης σειράς οφείλουν να είναι συζυγείς· επομένως $B_- = B_+^\star$. Επίσης, για το πέρασμα στην τρίτη σειρά το μιγαδικό B_+ γράφηκε ως $|B_+|e^{i\phi}$.

Αναπτύσσοντας το συνημίτονο του αθροίσματος των γωνιών της τελικής έκφρασης θα έχουμε

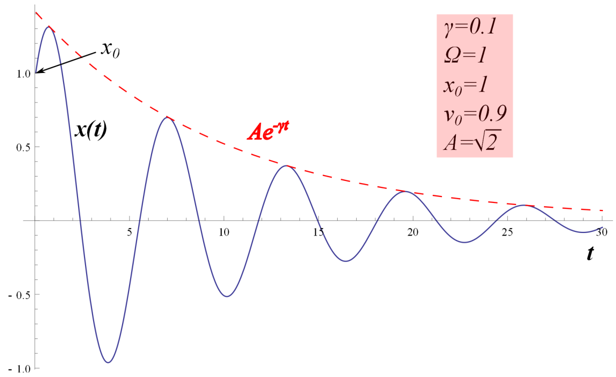
$$x(t) = e^{-\gamma\, t}\left(C\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t) + S\sin(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t\right) \; , \tag{34}$$

όπου το C αντιπροσωπεύει το $2|B_+|\cos\phi$ και το S αντιπροσωπεύει το $-2|B_+|\sin\phi$. Με αντικατάσταση στη σχέη αυτή των αρχικών συνθηκών παίρνουμε

$$x(t) = e^{-\gamma\, t}\left(x_0\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t) + \frac{v_0+\gamma x_0}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}\sin(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t)\right) \; . \tag{35}$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα της σχέσης αυτής με την (6). Το μόνο που αλλάζει είναι τα υπερβολικά σε κανονικά ημίτονα και συνημίτονα και το πρόσημο της υπόρριζης ποσότητας. Ο λόγος για αυτή τη μορφολογική ομοιότητα (παρά τον πολύ διαφορετικό χαρακτήρα των λύσεων· εκθετικές έναντι περιοδικών τριγωνομετρικών) σχετίζεται με την συνέχεια των λύσεων σε συνεχείς αλλαγές των παραμέτρων· συγκεκριμένα όταν η τιμή του $\gamma^2 - \omega^2$ περνάει από θετικές σε αρνητικές τιμές.

Η έκφραση εντός της παρένθεσης στη (35) είναι μια ταλαντωτική λύση αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας $\Omega = \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ (αν και το v_0 σε αυτή την περίπτωση δεν είναι η αρχική ταχύτητα του ταλαντωτή). Επομένως το κομμάτι αυτό της λύσης εκτελεί περιοδικές ταλαντώσεις και επομένως ο ταλαντωτής διασχίζει το σημείο ισορροπίας άπειρες φορές και μάλιστα περιοδικά (η χρονική απόσταση δύο διαδοχικών μηδενισμών του x είναι π/Ω). Όμως η εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση μπροστά από αυτή την ταλαντωτική λύση μεταβάλλει συνεχώς το πλάτος της ταλάντωσης και μάλιστα με πολύ ραγδαίο τρόπο. Μετά από χρόνο $t = N \times (1/\gamma)$ το πλάτος της ταλάντωσης πέφτει στο e^{-N} του αρχικού πλάτους ταλάντωσης, πρακτικά πολύ μικρό ποσοστό ($\simeq 0.7\%$) του αρχικού πλάτους για $N \simeq 5$. Ο χαρακτηριστικός χρόνος $\tau = 1/\gamma$ δίνει την κλίμακα του χρόνου με την οποία συμβαίνει η εκθετική πτώση. Αν συγκρίνουμε με την περίοδο της ταλάντωσης, ο χρόνος που χρειάζεται για να «πέσει» το πλάτος της ταλάντωσης σε αυτό το πρακτικά μηδαμινό μέγεθος ισοδυναμεί με $\simeq 2.5\pi(\omega/\gamma)$ πλήρεις ταλαντώσεις.



Σχήμα 2: Η φθίνουσα ταλάντωση με τις παραμέτρους/αρχικές συνθήκες που αναγράφονται. Παρατηρεί κανείς τον περιορισμό της ταλαντωτικής λύσης από την περιβάλουσα εκθετική συνάρτηση.

Οι φθίνουσες αυτές ταλαντώσεις οι οποίες διεξάγονται με τη συχνότητα Ω αντί της φυσικής συχνότητας ω του ταλαντωτή (δίχως την τριβή) δεν είναι ακριβώς συμμετρικές ως προς το μέσο μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών εξαιτίας της παρουσίας του εκθετικού όρου: Το μέγιστο (κατ' απόλυτη τιμή) κάθε ταλάντωσης παρουσιάζεται ελαφρώς μετατοπισμένο από το μέσο χρόνο μεταξύ των δύο διαδοχικών μηδενισμών προς τον πρώτο χρόνο.[8]

7 Η κρίσιμη απόσβεση

Στο προηγούμενο εδάφιο εξετάσαμε τις δύο δυνατές σχέσεις μεταξύ των γ και ω. Όταν ο παράγοντας της απόσβεσης υπερέβαινε τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή είχαμε μια γρήγορη και μια αργή απόσβεση χωρίς ταλάντωση. Στην αντίθετη περίπτωση είχαμε αποσβενυμένες ταλαντώσεις. Τι συμβαίνει αλήθεια όταν $\gamma = \omega$, την επονομαζόμενη *κρίσιμη απόσβεση*. Παρότι εκ πρώτης άποψης δεν θα είχε ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον αυτή η περίπτωση αφού είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε ένα φυσικό σύστημα για το οποίο να ισχύει ακριβώς $\gamma = \omega$, επειδή οι λύσεις στις δύο περιπτώσεις μοιάζουν εξαιρετικά διαφορετικές (καθόλου ταλάντωση - περιοδική ταλάντωση) θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να διερευνήσουμε το μεταίχμιο μεταξύ αυτών.

Αν ακολουθήσουμε τη λογική της συνέχειας των παραμέτρων θα πρέπει οι ανεξάρτητες λύσεις $x_1(t) = e^{\lambda_+ t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_- t}$ να μετασχημαίζονται ομαλά στις λύσεις του ζητούμενου προβλήματος καθώς το $\gamma \to \omega$ (είτε από κάτω, είτε από πάνω). Εδώ όμως προκύπτει κάτι αινιγματικό. Όταν $\gamma = \omega$ οι δύο λύσεις γίνονται ίδιες, η $e^{-\gamma t}$! Από μια τέτοια λύση όμως δεν μπορούμε να φτιάξουμε ό,τι αρχική συνθήκη θέσης/ταχύτητας επιθυμούμε. Παράλογο. Είναι δυνατό ένα τέτοιο σύστημα να μην μπορούμε να του δώσουμε κάποια αρχική θέση αλλά με μηδενική αρχική ταχύτητα; Μάλλον δεν «διαβάσαμε» σωστά τα μαθηματικά συμπεράσματα.

[8]Σκεφθείτε ότι μια συνάρτηση η οποία παρουσιάζει μέγιστο (μηδενισμό παραγώγου) σε κάποιο σημείο, όταν πολλαπλασιαστεί με κάποια φθίνουσα συνάρτηση μετατοπίζει το μέγιστο (εφόσον αυτό εξακολουθεί να υπάρχει) προς τα πίσω.

Ας δοκιμάσουμε να βρούμε 2 πραγματικά ανεξάρτητες λύσεις καταφεύγοντας στην έκφραση (6). Θα θέσουμε αρχικά $x_0 = 1$, $v_0 = -\gamma x_0 = -\gamma$ και $\gamma = \omega$. Η λύση που θα προκύψει θα είναι $e^{-\gamma t}$. Αν διαλέξουμε τώρα $x_0 = 0$, $v_0 = 1$, μια καταφανώς ανεξάρτητη λύση από την προηγούμενη, και πάμε στο όριο $\gamma \to \omega$ η λύση που θα προκύψει είναι η $t\ e^{-\gamma t}$, αφού

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sinh(\epsilon t)}{\epsilon} = t\ .$$

Μα πως εμφανίστηκε αυτή η δεύτερη λύση ενώ προηγουμένως τη χάσαμε;[9] Η απάντηση είναι ότι η λύση (35) αυτή σε αντίθεση με την (34) είναι φυσική· αφού περιέχει τις αρχικές συνθήκες ως παραμέτρους και οι οποίες μπορούν να ρυθμιστούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Αντιθέτως η λύση (34) οδηγείται σε αφύσικες (άπειρες) παραμέτρους C, S αν θέσει κάποιος $\gamma = \omega$. Πρέπει κανείς να φτιάξει κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς των δύο λύσεων οι οποίες να δίνουν ανεξάρτητα ζεύγη αρχικών συνθηκών και μετά να πάρει το όριο $\gamma \to \omega$.

Στη βάση των δύο ανεξάρτητων λύσεων που φτιάξαμε μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση. Αυτή θα είναι

$$x(t) = e^{-\gamma\, t}\left[x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t\right]. \tag{36}$$

Όπως και η περίπτωση της υπερκρίσιμης απόσβεσης, στην κρίσιμη αυτή απόσβεση δεν μπορεί ο ταλαντωτής να διασχίσει περισσότερες από μια φορά το σημείο ισορροπίας. Αυτό θα συμβεί μόνο τη χρονική στιγμή

$$t_0 = -\frac{x_0}{v_0 + \gamma x_0}$$

εφόσον η ποσότητα αυτή είναι θετική. Στην κρίσιμη απόσβεση παρά τη διαφορετικότητα των δύο ανεξάρτητων λύσεων και οι δύο σβήνουν εξαιτίας του εκθετικού $e^{-\gamma t}$.[10] Ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $\tau_K = 1/\gamma = 1/\omega$. Έτσι έχουμε το εξής παράδοξο, αλλά ενδιαφέρον σε πρακτικές εφαρμογές αποτέλεσμα. Καθώς το γ μεγαλώνει, ξεκινώντας από την περιοχή των αποσβενυμένων ταλαντώσεων ($\gamma < \omega$), ο χαρακτηριστικός χρόνος $1/\gamma$ μικραίνει και φτάνει στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης στην τιμή $1/\omega$. Αν όμως το γ συνεχίσει να μεγαλώνει πέραν της κρίσιμης τιμής, τότε εμφανίζονται δύο χαρακτηριστικοί χρόνοι, ο γρήγορος τ_2 και ο αργός τ_1 ο οποίος λόγω βραδύτητας είναι αυτός που απομένει να διέπει την τελική εξέλιξη του συστήματος. Όμως $\tau_1 > 1/\omega$. Με άλλα λόγια η κρίσιμη απόσβεση συμβαίνει ταχύτερα από κάθε άλλη (για δεδομένο ω). Αν λοιπόν σχεδιάσουμε μια συσκευή (ανάρτηση αυτοκινήτου, στήριξη βελόνας ηλεκτρονικού οργάνου-μετρητή) που στηρίζεται στην ελαστικότητα κάποιου μηχανικού μέρους αλλά θέλουμε να αποφύγουμε τις ταλαντώσεις όσο τοι δυνατό γρηγορώτερα, θα ήταν καλό να ρυθμίσουμε την απόσβέση του έτσι ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, δηλαδή $\gamma = \omega$!

[9] Οι δύο αυτές λύσεις θα προέκυπταν και από την (35) αν θέταμε τις ίδιες αρχικές συνθήκες, αφού και τότε θα είχαμε $\lim\limits_{\epsilon \to 0}(\sin(\epsilon t)/\epsilon) = t$.

[10] Η δεύτερη λύση έχει μια μεταβατική αύξηση, αλλά το εκθετικό θα υπερισχύσει για μεγάλους χρόνους. ($e^x \gg x^n$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, από κάποιο x_0 και πάνω.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 5

- Ο αρμονικός ταλαντωτής αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα φυσικά συστήματα γιατί κάθε μηχανικό σύστημα κοντά στο σημείο ισορροπίας του (εφόσον υπάρχει αυτό) συμπεριφέρεται σαν τον αρμονικό ταλαντωτή. Επιπλέον αποτελεί ένα έξοχο παράδειγμα γραμμικού συστήματος, η μελέτη του οποίου μας παρέχει εξαιρετικά θεωρητικά εργαλεία.
- Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ισόχρονος εξαιτίας της γραμμικότητάς του.
- Η μιγαδική ανάλυση βρίσκει εξαίρετο πεδίο εφαρμογής στις αρμονικές ταλαντώσεις.
- Ο αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

οδηγεί σε ταλαντώσεις με εκθετική απόσβεση αν $\gamma < \omega_0$ (υποκρίσιμη) και εκθετική απόσβεση δίχως ταλάντωση αν $\gamma > \omega_0$ (υπερκρίσιμη). Στην κρίσιμη απόσβεση $\gamma = \omega_0$ η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός της $e^{-\gamma t}$ και της $t\, e^{-\gamma t}$.
- Η υπερκρίσιμη απόσβεση χαρακτηρίζεται από δύο χαρακτηριστικούς χρόνους, ενώ η υποκρίσιμη και η κρίσμη από έναν. Ο γρηγορώτερος χρόνος απόσβεσης συμβαίνει στην κρίσιμη απόσβεση $\tau_{\text{min}} = 1/\gamma_{\text{κρ}} = 1/\omega_0$.