

Κεφάλαιο 4

Ενέργεια & Χώρος φάσεων

1 Μονοδιάστατη κίνηση εντός δυναμικού - Διαγράμματα Φάσης

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι δυνάμεις που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη θέση συνδέονται με μια απροσδόκητη διατήρηση· αυτήν της ενέργειας. Όπως σημειώσαμε, όμως, οι θεμελιώδεις δυνάμεις τυχαίνει να είναι ακριβώς τέτοιου τύπου δυνάμεις· αυτός εξάλλου είναι και ο λόγος που η ενέργεια τυχαίνει να παρουσιάζει ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον.

Επίσης τονίσαμε ότι η δυναμική ενέργεια δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη, αλλά από τη στιγμή που καθορίσουμε το σημείο, x_0 , στο οποίο έχουμε αποδώσει σε αυτή μια προκαθορισμένη τιμή, V_0 , και η δυναμική ενέργεια και η ολική ενέργεια είναι πλήρως καθορισμένες. Επομένως αρκεί να γνωρίζουμε σε κάποια στιγμή την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου μας, και με αυτό τον τρόπο θα γνωρίζουμε τη σταθερή ενέργειά του. Με βάση αυτή μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα του σωματιδίου σε κάθε θέση· για την ακρίβεια το μέτρο της ταχύτητας, όχι την ίδια την ταχύτητα. Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν να φτιάξουμε διαγράμματα της ταχύτητας ως συνάρτηση της θέσης αφού τα δύο μεγέθη συνδέονται στενά μέσω της διατήρησης της ενέργειας. Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων αυτών θα μπορούμε να «διαβάζουμε» την εξέλιξη της κίνησης ενός σωματιδίου, χωρίς όμως να έχουμε άμεση εποπτεία του χρόνου. Ο χρόνος θα «τρέχει» ως παράμετρος κατά μήκος των διαγραφόμενων καμπυλών, όχι όμως σε γραμμική αναλογία με το μήκος της διαγραφόμενης καμπύλης. Παρακάτω θα μάθουμε πώς μπορούμε να έχουμε και μια ποιοτική εκτίμηση του χρονικού διαστήματος.

Ας ξεκινήσουμε από τη σχέση της ταχύτητας με τη θέση μέσω της διατήρησης της ενέργειας:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} . \quad (1)$$

Για λόγους που θα διαφανούν αργότερα, θα επιδιώξουμε να ζωγραφίσουμε, όχι την ταχύτητα αυτή καθεαυτή, αλλά την ορμή, δηλαδή την ποσότητα $m\dot{x}$:

$$p = m\dot{x} = \pm \sqrt{2m [E - V(x)]} . \quad (2)$$

Η διπλή τιμή της ταχύτητας σημαίνει ότι το διάγραμμα θα είναι κατοπτρικά συμμετρικό ως προς τον άξονα των θέσεων x . Επομένως στα σημεία που η ταχύτητα μηδενίζεται, ο ένας κλάδος του γραφήματος θα έρχεται σε επαφή με τον άλλο. Αν δεν μηδενίζεται πουθενά η ταχύτητα, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν δύο δυνατές ανεξάρτητες κινήσεις του σωματιδίου, μία με κατεύθυνση προς τα θετικά x και μία με κατεύθυνση προς τα αρνητικά x , χωρίς να είναι δυνατό η μία

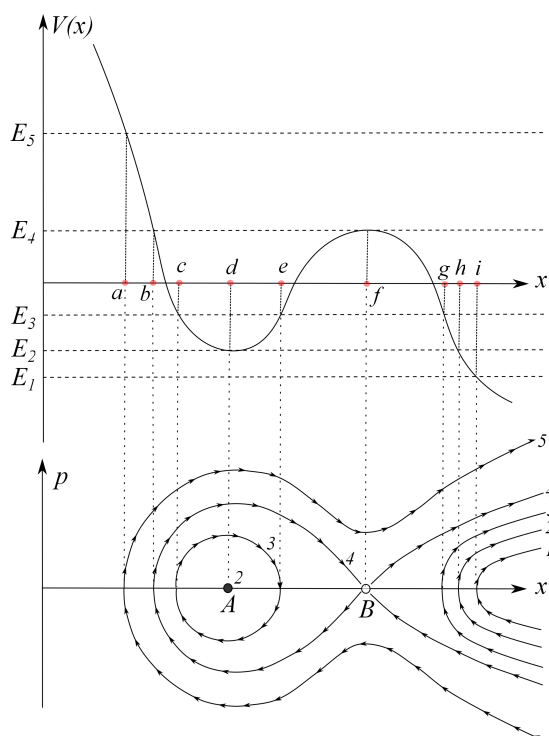
κίνηση να εξελιχθεί συν το χρόνω στην άλλη (δεν μπορεί η ταχύτητα, ως συνεχής συνάρτηση,¹ να αλλάξει πρόσημο χωρίς να περάσει από το μηδέν).

Ας μελετήσουμε τις δυνατές κινήσεις στο χώρο των φάσεων (σχέση ταχύτητας - θέσης) για μια δοσμένη δυναμική ενέργεια (βλ. σχήμα 1). Επειδή η διαφορά ολικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας είναι η κινητική ενέργεια, ποσότητα εξ ορισμού θετική, ή μηδενική, η κίνηση ενός σωματιδίου επιτρέπεται μονάχα στις περιοχές εκείνες που η ολική ενέργεια υπερβαίνει τη δυναμική ενέργεια (η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας βρίσκεται κάτω από κάποιο συγκεκριμένο ενεργειακό επίπεδο.

(i) Αν η ενέργεια έχει την τιμή E_1 τότε η μοναδική περιοχή τιμών του x όπου η ενέργεια υπερβαίνει τη δυναμική ενέργεια είναι το διάστημα δεξιά από το σημείο i . Ακριβώς στο σημείο i η κινητική ενέργεια μηδενίζεται, ενώ δεξιότερα από αυτό η ταχύτητα μεγαλώνει κατ' απόλυτη τιμή. Σχεδιάζουμε λοιπόν την καμπύλη 1 στο διάγραμμα των φάσεων. Προσέξτε τη φορά διαγραφής της καμπύλης. Όταν η ταχύτητα είναι αρνητική κινούμαστε προς τα αριστερά, ενώ όταν η ταχύτητα γίνει θετική κινούμαστε προς τα δεξιά. Η φορά της διαγραφής αυτή επαναλαμβάνεται σε όλες τις καμπύλες στο χώρο των φάσεων, οπότε η φορά της κίνησης στο χώρο των φάσεων είναι πάντα η ωρολογιακή φορά.

(ii) Για ενέργεια E_2 , η γραμμή της οποίας εφάπτεται στο ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, έχουμε δυο δυνατές κινήσεις. Η μια είναι παρόμοια με την προηγούμενη με κίνηση δεξιά του σημείου h , ενώ η άλλη αφορά στη σταθερή θέση d . Η δεύτερη αυτή περίπτωση «κίνησης» περιγράφεται από ένα σημείο στο χώρο των φάσεων, το A και αντιστοιχεί στην ακινησία του σωματιδίου.

(iii) Για ενέργεια E_3 έχουμε και πάλι δύο δυνατές περιοχές κίνησης, μια μεταξύ των σημείων



Σχήμα 1: Το διάγραμμα φάσης για τη δεδομένη μορφή δυναμικής ενέργειας. Σε κάθε ενεργειακό επίπεδο αντιστοιχεί μια ή περισσότερες καμπύλες στο χώρο των φάσεων (αριθμημένες με το δείκτη της αντίστοιχης ενέργειας).

¹Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της ελαστικής ανάκλασης, δηλαδή η περίπτωση μιας ασυνεχούς δυναμικής ενέργειας άρα άπειρης δύναμης, όπου τότε στο διάγραμμα φάσης έχουμε στιγμιαίο άλμα από μια τιμή της ορμής στην αντίθετη τιμή. Και πάλι όμως τότε μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία.

c και e και μία δεξιά του σημείου g . Η πρώτη περιοχή είναι απλώς μια ταλάντωση (όχι κατ' ανάγκη αρμονική) γύρω από το σημείο d . Η αντίστοιχη γραμμή στο χώρο των φάσεων είναι μια κλειστή καμπύλη (συμμετρική ως προς τον άξονα x) η οποία διαγράφεται ωρολογιακά. Το σημείο d δεν βρίσκεται κατ' ανάγκη στο κέντρο του διαστήματος $c - e$. Αν υπολογίσουμε το χρόνο μετάβασης από το c στο e (άνω μέρος της κλειστής καμπύλης στο χώρο των φάσεων) θα έχουμε

$$t_{c \rightarrow e} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} . \quad (3)$$

Αντίστοιχα ο χρόνος μετάβασης από το e στο c (κάτω μέρος της κλειστής καμπύλης) θα είναι

$$t_{e \rightarrow c} = \int_{x_e}^{x_c} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_e}^{x_c} -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} ,$$

δηλαδή θα είναι ίδιος με τον χρόνο $t_{c \rightarrow e}$. Η ταλάντωση είναι περιοδική, όπως σε ένα ρολόι, και μάλιστα το «τικ» του (το πήγαινε) διαρκεί όσο και το «τακ» του (το έλα). Αυτό ισχύει και πιο γενικά για μονοδιάστατες κινήσεις εντός κάποιου δυναμικού (ακόμη και αν αυτές δεν είναι περιοδικές): Σε μια επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης η μετάβαση από ένα σημείο x_1 σε ένα άλλο x_2 διαρκεί όσο και η κίνηση από το x_2 στο x_1 (η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω).

(iv) Το επόμενο ενεργειακό επίπεδο, το E_4 παρουσιάζει ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον. Τώρα η ενέργεια ισούται με κάποιο τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας, αυτήν του σημείου f . Το σωματίδιο μπορεί να κινείται αριστερά του f (μέχρι το b), αλλά και δεξιά του f . Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο μπορεί να διαπερνά το σημείο f ; Η απάντηση είναι εμφαντικά *όχι*. Αν το διαπερνούσε θα έφτανε στο σημείο f με ταχύτητα 0, αλλά η δύναμη στο σημείο αυτό θα ήταν και αυτή 0 (μηδενική κλίση της δυναμικής ενέργειας στο f) οπότε δεν θα μπορούσε στη συνέχεια να επιταχυνθεί καταλλήλως ώστε να φύγει από το σημείο αυτό. Υπάρχει όμως και ένας άλλος φυσικός λόγος για τον οποίο απαγορεύεται η διόδος του σωματιδίου από το σημείο f : Αν το σωματίδιο τοποθετούνταν με αυτή την ενέργεια στο σημείο f θα έμενε για πάντα εκεί (ταχύτητα 0, δύναμη 0). Αν το σωματίδιο διερχόταν από το f θα είχαμε δύο διαφορετικές εξελίξεις με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, σε αντίθεση με τη μοναδικότητα της λύσης για δεδομένες αρχικές συνθήκες. Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα αρκούν για να δείξουμε ότι το σωματίδιο με αυτή την ενέργεια δεν μπορεί ούτε να φτάσει στο σημείο f (κινούμενο είτε προς τα δεξιά, είτε προς τα αριστερά) αφού ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου: Ότι ισχύει για την ορθή φορά του χρόνου, ισχύει και για την αντίστροφη. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων που αντιστοιχούν στην E_4 είναι τέσσερις διαφορετικές γραμμές: αυτή που φεύγει από το σημείο B κινούμενη προς τα μεγαλύτερα x , αυτή που πλησιάζει στο σημείο B κινούμενη από τα μεγαλύτερα x , αυτή που αναχωρεί από το B προς τα μικρότερα x και αφού φτάσει στο x_b επιστρέφει προς το σημείο B , και τέλος το ίδιο το σημείο B της ακινησίας στο σημείο f . Η προηγούμενη ανάλυση μας έδειξε ότι οι τέσσερις

αυτές γραμμές δεν έρχονται σε επαφή η μία με την άλλη, αλλά ούτε και υπάρχει διάστημα πεπερασμένο από το τέλος της μίας μέχρι την αρχή της επόμενης! Το παράδοξο αυτό συμπέρασμα θα το εξηγήσουμε παρακάτω όταν θα υπολογίσουμε τους χρόνους που αντιστοιχούν στην κάθε μια καμπύλη από το ένα άκρο ως το άλλο.

(v) Για ενέργεια E_5 το σωματίδιο κινείται μόνο δεξιά από το σημείο a και καθώς διέρχεται από το σημείο f (το σημείο με τη μέγιστη τοπικά δυναμική ενέργεια), κινούμενο είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά, η ταχύτητά του γίνεται τοπικά ελάχιστη (κατά απόλυτη τιμή). Έτσι στην περίπτωση αυτή, ακολουθώντας την καμπύλη στο χώρο των φάσεων από το σημείο a προς τα δεξιά, θα έχουμε αρχικά αύξηση της ταχύτητας, μεγιστοποίηση της ταχύτητας όταν το σωματίδιο θα διέρχεται από το σημείο d , επιβράδυνση του σωματιδίου μέχρι το σημείο f , και έκτοτε συνεχή επιτάχυνση του σωματιδίου.

Μέχρι τώρα αποφύγαμε να συζητήσουμε το τι συμβαίνει στα ακραία σημεία της κίνησης (π.χ. το σημείο c για ενέργεια E_3) παρόλο που η ταχύτητα μηδενίζεται σε αυτά όπως και στη θέση x_f με ενέργεια E_4 που είδαμε και αναλύσαμε παραπάνω. Όταν το σωματίδιο φτάσει σε ένα τέτοιο σημείο, αλλά η κλίση της δυναμικής ενέργειας δεν μηδενίζεται (όπως στο f) το σωματίδιο ακινητοποιείται μεν στιγμιαία ($\dot{x} = 0$) αλλά η δύναμη και επομένως η επιτάχυνση δεν μηδενίζεται. Έτσι το σωματίδιο θα επιταχυνθεί προς την επιτρεπόμενη κατεύθυνση κίνησης και θα αρχίσει να κινείται προς αυτήν. Παρατηρήστε ότι όλες οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων τέμνουν τον άξονα των x κατακόρυφα, με μοναδική εξαίρεση τα σημεία ισορροπίας A και B . Η γωνία τομής ($\pi/2$ στη γενική περίπτωση, μη οριζόμενη στη δεύτερη περίπτωση, και $\neq \pi/2$ στην τρίτη περίπτωση) σχετίζεται, όπως θα δούμε ακολούθως, με το χρόνο μετάβασης από το σημείο μηδενισμού της ταχύτητας.

Ας θέσουμε ως x_0 κάποιο σημείο στο οποίο $V(x_0) = E$ δηλαδή το σημείο τομής της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας με την ευθεία της σταθερής ενέργειας. Θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο μετάβασης του σωματιδίου από το x_0 σε ένα πολύ γειτονικό του σημείο $x_0 + \epsilon$ (με ϵ πολύ μικρότερο από κάποια διάσταση που σχετίζεται με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας στο σημείο x_0 ²). Ακολουθώντας τον υπολογισμό της χρονικής διάρκειας του «τικ» ενός μονοδιαστάτου ρολογιού που εξετάσαμε παραπάνω (βλ. σχέση (3)) θα έχουμε

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} = \pm \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}} . \quad (4)$$

Το πρόσημο θα καθοριστεί ανάλογα με το αν η κίνηση επιτρέπεται να γίνει προς τα δεξιά ή

²Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να γράψουμε τη δυναμική ενέργεια κοντά στο σημείο x_0 , το μέγεθος του ϵ θα σχετίζεται με το κατά πόσον οι όροι του αναπτύγματος που θα αγνοήσουμε είναι ασήμαντοι σε σχέση με τον τελευταίο όρο που θα κρατήσουμε. Έτσι αν κρατήσουμε μέχρι τον όρο τάξης M , ο επόμενος σε σχέση με τον τελευταίο θα θέλουμε να είναι $V^{(M+1)}(x_0)\epsilon^{M+1}/(M+1)! \ll V^{(M)}(x_0)\epsilon^M/(M)!$, δηλαδή $\epsilon \ll (M+1)V^{(M)}(x_0)/V^{(M+1)}(x_0)$. Αν ο παρονομαστής της τελευταίας έκφρασης τυγχάνει να είναι ταυτοτικά 0, που σημαίνει ότι ο επόμενος από τον τελευταίο όρο που κρατήσαμε είναι μηδενικός, θα πρέπει να προχωρήσουμε τη σύγκριση μέχρι τον αμέσως επόμενο μη μηδενικό όρο και τότε θα έχουμε $\epsilon^k \ll (M+1)(M+2) \dots (M+k)V^{(M)}(x_0)/V^{(M+k)}(x_0)$ όπου $M+k$ είναι η τάξη του πρώτου μη μηδενικού όρου μετά από τον όρο τάξης M που κρατήσαμε στο ανάπτυγμα.

προς τα αριστερά του x_0 . Στην πρώτη περίπτωση (αυτή με το + πρόσημο) θα είναι $\epsilon > 0$, ενώ στη δεύτερη (αυτή με το - πρόσημο) θα είναι $\epsilon < 0$. Αν το x_0 τυγχάνει να είναι τοπικό μέγιστο (όπως το σημείο f της προηγούμενης ανάλυσης), τότε και οι δύο περιπτώσεις επιτρέπεται να αναλυθούν για να υπολογιστεί ο χρόνος διαφυγής από το ασταθές αυτό σημείο ισορροπίας είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Ας αναπτύξουμε τώρα τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας γύρω από το σημείο x_0 :

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &\underset{x \simeq x_0}{\simeq} E + (x - x_0) \left[V'(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

στο σημείο αυτό θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς μέχρι ποιον όρο χρειάζεται να γράψουμε στο ανάπτυγμα. Δυστυχώς δεν υπάρχει συγκεκριμένη απάντηση. Εξαρτάται τι ακριβώς θέλουμε να μάθουμε από τον προσεγγιστικό υπολογισμό. Συνήθως κρατάμε τον πρώτο μη μηδενικό όρο στο ανάπτυγμα αυτό. Αν το αποτέλεσμα που θα πάρουμε δεν μας ικανοποιεί ως προς την ακρίβεια αυτού που θέλουμε να υπολογίσουμε, προχωράμε σε ακόμη μεγαλύτερης τάξης όρους. Στο πρόβλημα υπολογισμού του χρόνου μετάβασης από το x_0 στο $x_0 + \epsilon$ θα γίνει πιο καθαρό αυτό. Γράφοντας λοιπόν το παραπάνω ανάπτυγμα στο (4) θα έχουμε

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \pm \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[-(x - x_0) \left(V'(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0) \right) \right]}}. \quad (6)$$

Στο σημείο αυτό θα ξεχωρίσουμε την περίπτωση που $V'(x_0) \neq 0$ από την $V'(x_0) = 0$. Στην πρώτη, όταν η γραμμή της ενέργειας τέμνει το γράφημα της δυναμικής ενέργειας υπό κλίση θα έχουμε (υποθέτοντας ότι $\epsilon > 0$ που σχετίζεται με $V'(x_0) < 0$ ώστε να επιτρέπεται η κίνηση προς τα δεξιά του x_0)

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [(x - x_0) (-V'(x_0))]}}, \quad (7)$$

Προσέξτε ότι αγνοήσαμε τον επόμενο όρο του αναπτύγματος αφού ο πρώτος όρος ήταν μη μηδενικός. Έτσι

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \sqrt{\frac{m}{2(-V'(x_0))}} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x - x_0}} = 2\sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{2(-V'(x_0))}}. \quad (8)$$

Δηλαδή το σωματίδιο χρειάζεται πεπερασμένο χρόνο γι' αυτή τη μετάβαση και μάλιστα ο χρόνος αυτός είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του διανυόμενου διαστήματος. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ακριβώς αυτό που μαθαίνει κανείς στο σχολείο για τη σχέση διανυόμενου διαστήματος ως συνάρτηση του χρόνου για σταθερή δύναμη, όταν το σωματίδιο ξεκινά από την ηρεμία

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{F}{2m}t^2 = \frac{-V'(x_0)}{2m}t^2.$$

Η περίπτωση κίνησης προς τα αρνητικά στο σημείο x_0 οδηγεί στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. (ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση). Τέλος η περίπτωση $V'(x_0) > 0$ θα έχει νόημα για αρνητικό ϵ και θα καταλήγει και αυτή στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $V'(x_0) = 0$ (με κίνηση προς τα δεξιά).

$$\begin{aligned} t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} &\simeq \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [-(x - x_0)^2 (\frac{1}{2} V''(x_0))]} } \\ &= \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{x - x_0} \\ &= \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \log \frac{\epsilon}{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Προφανώς αυτό το αποτέλεσμα δεν έχει νόημα, αφού δεν ορίζεται ο λογάριθμος του 0. Το ολοκλήρωμα αποκλίνει και το πρόβλημα δεν μπορεί να αρθεί αν προσθέσουμε και τους άλλους όρους στο ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας, αφού το ολοκλήρωμα

$$\int_0^a \frac{dx}{xg(x)}$$

αποκλίνει αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$. Το παράλογο αυτό αποτέλεσμα όμως σηματοδοτεί ότι ο χρόνος για τη μετάβαση από το x_0 στο $x_0 + \epsilon$ δεν ορίζεται. Στην πραγματικότητα είναι άπειρος. Αυτό θα μπορούσε να φανεί πιο καθαρά αν υπολογίζαμε το χρόνο για τη μετάβαση από το $x_0 + \epsilon_1$ στο $x_0 + \epsilon$ (με $0 < \epsilon_1 < \epsilon$). Ο χρόνος που θα υπολογίζαμε τότε θα ήταν

$$t_{x_0 + \epsilon_1 \rightarrow x_0 + \epsilon} = \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \int_{x_0 + \epsilon_1}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{x - x_0} = \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \log \frac{\epsilon}{\epsilon_1}, \quad (10)$$

ο οποίος τείνει στο άπειρο καθώς το ϵ_1 τείνει στο 0. Εν ολίγοις, όπως είπαμε και παραπάνω, το σωματίδιο αν ξεκινήσει από το x_0 δεν πρόκειται να ξεκολλήσει ποτέ από την αρχική του θέση για να πάει πιο πέρα. Αν όμως εκκινήσει, με την ίδια πάντα ενέργεια, από ένα γειτονικό σημείο θα απομακρυνθεί σε χρόνο ανάλογο του λογαρίθμου της αρχικής απόστασης από το επίμαχο σημείο. Αυτό σημαίνει ότι οσοδήποτε κοντά σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας και αν ξεκινήσουμε, το σύστημα μας θα απομακρυνθεί από αυτό εξαιρετικά γρήγορα σε σύγκριση με την απόσταση από το σημείο ισορροπίας.

Αν υπολογίζαμε τώρα το χρόνο προσέγγισης σε ένα σημείο ισορροπίας, π.χ. από το $x_0 - \epsilon$ στο $x_0 - \epsilon_1$, θα οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα, πράγμα το οποίο θα σήμαινε μια αέναη προσέγγιση στο σημείο ισορροπίας. Αυτό δικαιολογεί και το γεγονός ότι η καμπύλες στο χώρο των φάσεων που οδηγούν σε ένα σημείο ισορροπίας μολονότι δεν επικοινωνούν με αυτό, το προσεγγίζουν οσοδήποτε.

Σε όλες τις παραπάνω εκφράσεις για το χρόνο γράφαμε $-V''(x_0)$ αφού υποθέταμε ότι η δυναμική ενέργεια παρουσίαζε μέγιστο στο x_0 και επομένως η δεύτερη παράγωγος ήταν αρνητική.

Τι συμβαίνει όμως αν θελήσουμε να μελετήσουμε την κίνηση γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας; Η ανάλυση θα είναι ακριβώς ίδια με προηγουμένως, όμως θα πρέπει να είναι η ενέργεια ελαφρώς μεγαλύτερη από την τιμή της δυναμικής ενέργειας στο σημείο του ελαχίστου x_e ώστε να υπάρχει κάποια δυνατότητα κίνησης σε κάποιο εύρος γύρω από το x_e . Η δυναμική ενέργεια κοντά στο σημείο αυτό θα μπορεί να προσεγγιστεί με

$$V(x) \underset{x \simeq x_e}{\simeq} V(x_e) + \frac{1}{2} V''(x_e)(x - x_e)^2$$

ενώ η περιοχή της κίνησης θα είναι αυτή για την οποία $V(x) \leq E$, δηλαδή $|x - x_e| \leq \sqrt{2(E - V(x_e))/V''(x_e)}$. Ας ονομάσουμε τα δύο αυτά ακραία σημεία της κίνησης $x_{\pm} \equiv x_e \pm a$, όπου $a = \sqrt{2(E - V(x_e))/V''(x_e)}$ το μικρό πλάτος³ της ταλάντωσης γύρω από το x_e . Το «तिक» του μικρού ρολογιού, θα διαρκεί χρόνο

$$t_{x_- \rightarrow x_+} \simeq \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x_e) - \frac{1}{2} V''(x_e)(x - x_e)^2]}} , \quad (11)$$

που με μια αλλαγή μεταβλητής από x σε $\xi = x - x_e$ μετατρέπεται σε

$$\begin{aligned} t_{x_- \rightarrow x_+} &\simeq \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x_e) - \frac{1}{2} V''(x_e)\xi^2]}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{2 \frac{E - V(x_e)}{V''(x_e)} - \xi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \pi . \end{aligned} \quad (12)$$

Μια πλήρης ταλάντωση λοιπόν από το x_- στο x_+ και πάλι πίσω στο x_- θα διαρκεί κατά προσέγγιση χρόνο $2t_{x_- \rightarrow x_+}$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} . \quad (13)$$

Το αποτέλεσμα αυτό για την περίοδο της ταλάντωσης είναι εντυπωσιακό αφού δεν εξαρτάται από την τιμή της ενέργειας E . Θα περίμενε κανείς ότι το ύψος της ενέργειας που καθορίζει άμεσα το εύρος της κίνησης θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στην περίοδο της ταλάντωσης. Αυτή η έλλειψη εξάρτησης από την ενέργεια είναι προσεγγιστική αλλά γίνεται ολοένα και πιο ακριβής όταν η ενέργεια είναι εξαιρετικά χαμηλή και η ταλάντωση δεν απομακρύνεται πολύ από

³Αφού $E - V(x_e)$ είναι πολύ μικρό.

το σημείο της ευσταθούς ισορροπίας. Στο ενδιαφέρον αυτό αποτέλεσμα κρύβεται και η παρατήρηση του Γαλιλαίου το 1582 ότι το εκκρεμές του πολυελαίου στον καθεδρικό ναό της Πίζας ταλαντωνόταν στον ίδιο χρόνο ανεξαρτήτως του πλάτους αιώρησής του (για μικρά πλάτη). Η ισοχρονικότητα που παρουσιάζουν όλοι οι ταλαντωτές (αρμονικοί ή μη), όταν το πλάτος ταλάντωσής τους μικραίνει, είναι μια αξιοσημείωτη ιδιότητα που σχετίζεται με το γεγονός ότι όλοι οι ταλαντωτές διαθέτουν κάποιο σημείο ευσταθούς ισορροπίας και γύρω από αυτό η μορφή της δύναμης επαναφοράς είναι γραμμική, όπως ακριβώς συμβαίνει στους αρμονικούς ταλαντωτές.

Η παρατήρηση της ισοχρονικότητας του Γαλιλαίου οδήγησε στην κατασκευή ρολογιών βασισμένα στο εκκρεμές. Σύμφωνα με την ανάλυσή μας τα ρολόγια που βασίζονται σε μια μονοδιάστατη ταλάνωση θα είναι ιδανικά (θα μετρούν σταθερά το χρόνο) εφόσον η ενέργειά τους παραμένει σταθερή και επομένως θα διατηρούν σταθερή την περιόδό τους. Επιπλέον όσο η ενέργειά τους είναι αρκετά χαμηλή, ακόμη και η περαιτέρω απώλεια ενέργειας δεν θα είναι επιζήμια για την σταθερότητα στη μέτρηση του χρόνου. Αν επιπλέον επιδιώκουμε να κατασκευάσουμε ρολόγια ακριβείας, δηλαδή ικανά να καταγράφουν πολύ μικρά κλάσματα του χρόνου, θα πρέπει η περίοδος αυτών να είναι πολύ μικρή. Απαιτείται λοιπόν μια πολύ μικρή μάζα ή μια πολύ μεγάλη τιμή του $V''(x_e)$ ή και τα δύο. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε σήμερα ατομικά ρολόγια (σωματίδια ατομικών διαστάσεων κινούμενα από ηλεκτρικής φύσης ενδομοριακές δυνάμεις) για να πετύχουμε ρολόγια υψηλής ακρίβειας.

Ας δούμε τώρα τι μορφή έχουν οι γραμμές ροής στο χώρο των φάσεων σε κάποιες από τις ειδικές περιπτώσεις που αναλύσαμε παραπάνω.

(i) **Γύρω από ευσταθή σημεία ισορροπίας:** Όπως είπαμε, για σημεία κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας x_e η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μορφή

$$V(x) \underset{x \simeq x_e}{\simeq} V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2,$$

με $V''(x_e) > 0$, οπότε η διατήρηση της ενέργειας γράφεται

$$\frac{p^2}{2m} + V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2 = E = V(x_e) + \Delta E,$$

όπου $\Delta E > 0$ είναι η μικρή διαφορά ενέργειας μεταξύ της ολικής ενέργειας και της τιμής της δυναμικής ενέργειας στο x_e . Συνεπώς οι γραμμές ροής στο χώρο των φάσεων θα περιγράφονται από τις ελλείψεις

$$\frac{p^2}{2m\Delta E} + \frac{V''(x_e)}{2\Delta E}(x - x_e)^2 = 1 \quad (14)$$



Σχήμα 2: Ο πολυέλαιος του καθεδρικού ναού της Πίζας που ενέπνευσε τον Γαλιλαίο να χρησιμοποιήσει εκκρεμή ως ρολόγια. Η μέτρηση της ισοχρονικότητας των ταλαντώσεων αυτού έγινε από το Γαλιλαίο με σύγκριση με τους καρδιακούς του παλμούς.

που έχουν ως κέντρο το σημείο $(x = x_e, p = 0)$ (το σημείο A του σχήματος 1 για παράδειγμα), και ημιάξονες $\sqrt{2m\Delta E}$ κατά μήκος του x και $\sqrt{2\Delta E/V''(x_e)}$ κατά μήκος του p . Όπως βλέπετε η ενέργεια ρυθμίζει το μέγεθος των ελλείψεων, ενώ το σχήμα αυτών (σχέση ημιαξόνων) σχετίζεται με την ποσότητα $\sqrt{mV''(x_e)}$. Μπορείτε μόνοι σας να δείξετε ότι το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή οδηγεί ακριβώς σε ελλειπτικές γραμμές στο χώρο των φάσεων. Έτσι η κατά προσέγγιση ελλειπτική μορφή των καμπυλών στην περιοχή γύρω από ένα ευσταθές σημείο είναι συνέπεια της προσέγγισης του δυναμικού νόμου με αυτόν ενός αρμονικού ταλαντωτή, όταν το σωματίδιο βρίσκεται κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(ii) **Γύρω από ασταθή σημεία ισορροπίας:** Αν η ενέργεια είναι πλησίον ενός μεγίστου της δυναμικής ενέργειας $E \simeq V(x_0)$, τότε σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας, αν αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια μέχρι όρους 2ης τάξης, όπως και προηγουμένως, οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων θα περιγράφονται από σχέσεις της μορφής

$$\frac{p^2}{2m} + V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 = E = V(x_0) + \Delta E .$$

Το νέο στοιχείο της έκφρασης αυτής είναι ότι $V''(x_0) < 0$ αφού πρόκειται για μέγιστο της δυναμικής ενέργειας και ότι σε αυτή την περίπτωση, σε αντίθεση με την προηγούμενη, το ΔE μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν. Στην πρώτη περίπτωση το σωματίδιο διέρχεται από το x_0 , στη δεύτερη κινείται είτε στα αριστερά του x_0 είτε στα δεξιά αυτού, ενώ στην τρίτη περίπτωση συμβαίνει αυτό που εξετάσαμε διεξοδικά όταν μελετούσαμε τις καμπύλες #4 στο εισαγωγικό παράδειγμα των διαγραμμάτων φάσης. Δεδομένων των παραπάνω παρατηρήσεων η μορφή των καμπυλών γύρω από το ασταθές σημείο ισορροπίας παίρνει τη μορφή

$$\frac{p^2}{2m\Delta E} - \frac{|V''(x_0)|}{2\Delta E}(x - x_0)^2 = 1 . \quad (15)$$

Για $\Delta E > 0$ αυτή είναι μια εξίσωση υπερβολής, οι δύο κλάδοι της οποίας εκτείνονται στο διάστημα $|p| > \sqrt{2m\Delta E}$. Για $\Delta E < 0$ αυτή είναι και πάλι μια εξίσωση υπερβολής, οι δύο κλάδοι της οποίας εκτείνονται στο διάστημα $|x - x_0| > \sqrt{2\Delta E/|V''(x_0)|}$. Τέλος για $\Delta E = 0$ θα έχουμε (προ της απαγορευμένης διαίρεσης με το ΔE) την εξίσωση ενός ζεύγους ευθειών (κατοπτρικές η μία της άλλης ως προς τον άξονα x): $p = \pm \sqrt{|V''(x_0)|/m}(x - x_0)$. Οι ευθείες αυτές είναι οι ασύμπτωτες των παραπάνω δύο τύπων υπερβολών.

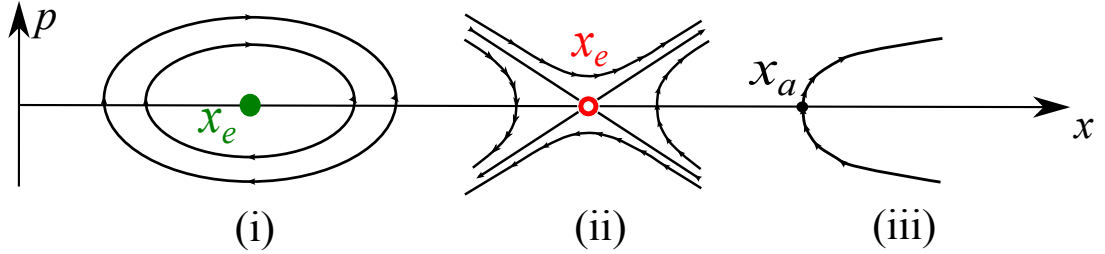
(iii) **Πλησίον των σημείων μηδενισμού της ταχύτητας:** Ας δούμε τέλος τι μορφή έχουν οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων κοντά στα σημεία που το σωματίδιο φτάνει σε κάποιο άκρο του επιτρεπόμενου διαστήματος κίνησης και στη συνέχεια αναστρέφει την πορεία κίνησής του. Στα σημεία αυτά όπου $V(x_a) = E$ το ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας έχει τη μορφή

$$V(x) \underset{x \simeq x_a}{\simeq} V(x_a) + V'(x_a)(x - x_a) .$$

Εν αντιθέσει με τα προηγούμενα αναπτύγματα, τώρα κρατάμε από το ανάπτυγμα μόνο τον πρώτης τάξης όρο αφού αυτός δεν είναι μηδενικός (δες το σημείο a του σχήματος 1). Έτσι θα έχουμε

$$\frac{p^2}{2m} + V'(x_a)(x - x_a) = E - V(x_a) = 0 . \quad (16)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής που έχει στραμένα τα κοίλα προς τα δεξιά ($x \geq x_a$) αν $V'(x_a) < 0$ και προς τα αριστερά ($x \leq x_a$) αν $V'(x_a) > 0$. Επομένως όλες οι καμπύλες που διέρχονται από τον άξονα x έχουν το σχήμα παραβολής κοντά στο σημείο τομής τους με τον άξονα x .



Σχήμα 3: Συνοπτικά, κοντά στα σημεία όπου η ταχύτητα του σωματιδίου μηδενίζεται ($E = V(x)$), η μορφή των καμπυλών ροής στο χώρο των φάσεων είναι: (i) Κοντά σε ευσταθές σημείο ισορροπίας, x_e , οι καμπύλες έχουν τη μορφή ελλείψεων που ακολουθούν ωρολογιακή φορά. Οι ημιάξονες της έλλειψης είναι ανάλογοι της $\sqrt{E - V(x_e)}$. (ii) Κοντά σε ασταθές σημείο ισορροπίας, x_e , οι καμπύλες έχουν τη μορφή υπερβολών. Για ενέργειες κατώτερες από το $V(x_e)$ εμφανίζονται οι δεξιοί-αριστεροί κλάδοι της υπερβολής, ενώ για ενέργειες ανώτερες του $V(x_e)$ εμφανίζονται οι άνω-κάτω κλάδοι της υπερβολής. Τέλος για ενέργειες ακριβώς ίσες με την $V(x_e)$ κάνουν την εμφάνισή τους οι ασύμπτωτες των υπερβολών. Οι ευθείες αυτές πλησιάζουν οσοδήποτε το ασταθές σημείο αλλά δεν συνδέονται με αυτό. (iii) Κοντά σε οποιοδήποτε ακραίο σημείο της κίνησης, x_a , όπου το σωματίδιο σταματά και αντιστρέφει τη φορά της κίνησής του, η καμπύλη είναι παραβολή.

2 * Η περίοδος κρυμμένη στο χώρο των φάσεων

Όπως είδαμε η περίοδος ενός σωματιδίου παγιδευμένου σε ένα φρέαρ (πηγάδι) δυναμικής ενέργειας με ακραία σημεία⁴ τα $x_-(E), x_+(E)$ είναι (παράβαλε με τη σχέση (3) για το ήμισυ της περιόδου)

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (17)$$

Θα δείξουμε ότι η ποσότητα αυτή συνδέεται με το εμβαδόν του χωρίου που διαγράφει η αντίστοιχη κίνηση στο χώρο των φάσεων. Επειδή η ορμή σε κάθε σημείο θα είναι

$$p_{\uparrow\downarrow} = \pm \sqrt{2m[E - V(x)]},$$

όπου $p_{\uparrow\downarrow}$ είναι είτε η λύση με θετική ταχύτητα είτε αυτή με αρνητική ταχύτητα, οι αντίστοιχες δύο κατοπτρικές ως προς τον άξονα- x καμπύλες, $p_{\uparrow}(x), p_{\downarrow}(x)$, αποτελούν τα σύνορα του χωρίου.

⁴Πρόκειται για τα σημεία στα οποία $V(x_{\pm}) = E$ έτσι ώστε $V(x) < E$ σε ολόκληρο το διάστημα (x_-, x_+) .

Το εμβαδόν του χωρίου αυτού λοιπόν θα είναι

$$\mathcal{E} = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} p_{\uparrow}(x) dx = \sqrt{8m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \sqrt{E - V(x)} dx, \quad (18)$$

δηλαδή το διπλάσιο του μισού χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη-άνω σύνορο $p_{\uparrow}(x)$. Αν και υπάρχουν σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των δύο σχέσεων (17, 18) τα αποτελέσματα είναι ανόμοια, πράγμα αναμενόμενο εφόσον οι διαστάσεις τους είναι διαφορετικές: $[\mathcal{E}] = [ML^2T^{-1}]$. Παρατηρούμε πως η ποσότητα $\sqrt{E - V(x)}$ υπάρχει στον αριθμητή του ολοκληρώματος της (18), αλλά βρίσκεται στον παρονομαστή του ολοκληρώματος της (17). Το αναποδογύρισμα θα μπορούσε να επιτευχθεί με μια απλή παραγωγή⁵ της ολοκληρωτέας συνάρτησης της (18) ως προς το E . Μάλιστα το $1/2$ που θα προέκυπτε από την παραγωγή της ρίζας θα ρύθμιζε καταλλήλως και τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\sqrt{8m}$, ώστε να επιτευχθεί ο παράγοντας $\sqrt{2m}$ της έκφρασης για την περίοδο. Δυστυχώς όμως η εξάρτηση από την ενέργεια E υπάρχει και στα όρια ου ολοκληρώματος, οπότε η παραγωγή ως προς E πιθανώς να δημιουργήσει και νέες ποσότητες. Στο σημείο αυτό θα επισημάνουμε απλώς ότι ο μηδενισμός του $\sqrt{E - V(x)}$ στα όρια του ολοκληρώματος εξασφαλίζει ότι δεν θα εμφανιστεί άλλος μη μηδενικός όρος από την παραγωγή του ολοκληρώματος της $\mathcal{E}$ ως προς E εκτός από τον προαναφερθέντα, οπότε θα έχουμε ότι

$$T = \frac{d\mathcal{E}}{dE}. \quad (19)$$

(Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παραγωγή ολοκληρώματος της μορφής (18), διαβάστε το Πλαίσιο 1 και τη γεωμετρική του ανάλυση.) Επομένως ο τρόπος που μεγαλώνει το χωρίο με την ενέργεια καθώς διευρύνονται τα όρια της κίνησης μας αποκαλύπτει την ίδια την περίοδο της ταλάντωσης.

Πλαίσιο: 1

Πώς παραγωγίζουμε ολοκλήρωμα ως προς μια παράμετρό του

Έστω μια συνάρτηση $f(x; E)$. Με τη γραφή αυτή εννοούμε μια συνάρτηση του x με παράμετρο E η οποία αλλάζει τη μορφή της συνάρτησης. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx.$$

Για τον υπολογισμό αυτό θα καταφύγουμε στον ορισμό της παραγώγου δηλαδή στο όριο

$$\frac{dg(E)}{dE} = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{g(E + \delta E) - g(E)}{\delta E}.$$

⁵Η παραγωγή ενός ολοκληρώματος ως προς μια παράμετρο αυτού είναι μια συνήθης πρακτική στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Μάλιστα πολλές φορές εισάγεται τεχνητά μια παράμετρος, προκειμένου η παραγωγή του ολοκληρώματος ως προς την παράμετρο αυτή να δημιουργήσει το νέο ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{-x^2} dx$ υπολογίζεται εύκολα από το $\int e^{-ax^2} dx$ με παραγωγή ως προς a και μετά με αντικατάσταση του αποτελέσματος της ολοκλήρωσης με $a = 1$.

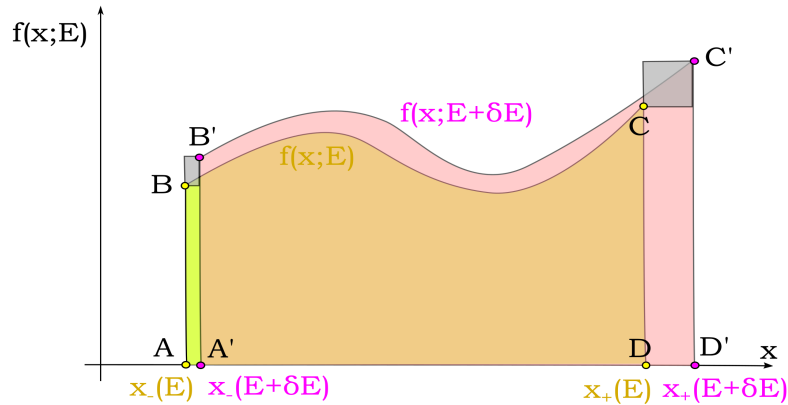
Επομένως αν

$$I(E) = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx$$

η ζητούμενη παράγωγος θα είναι

$$\frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{I(E + \delta E) - I(E)}{\delta E}.$$

Στο σχήμα 4 έχουν σχεδιαστεί τα ολοκληρώματα $I(E + \delta E)$ (πράσινη επιφάνεια) και $I(E)$ (ροζ επιφάνεια). Η επικάλυψη των δύο επιφανειών έχει μπλε χρώμα. Αυτό που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η διαφορά των δύο επιφανειών.



Σχήμα 4: Γραφική αναπαράσταση των ολοκληρωμάτων $I(E) = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx$ και

$I(E + \delta E) = \int_{x_-(E + \delta E)}^{x_+(E + \delta E)} f(x; E + \delta E) dx$. Οι τρεις λωρίδες που δημιουργούνται από τη διαφορά είναι ανάλογες του δE για μικρά δE , ενώ οι γκρι περιοχές είναι ανάλογες του δE^2 . Το διάγραμμα αυτό κατασκευάστηκε βασισμένο στην υπόθεση ότι οι τρεις παράγωγοι $\partial f / \partial E$, dx_+ / dE , και dx_- / dE είναι θετικές. Σε διαφορετική περίπτωση τα πρόσημα των επιφανειών αυτών θα διαμορφώνονταν από τα πρόσημα των αντίστοιχων παραγώγων.

Η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων είναι (i) [+ η ροζ λωρίδα] στο πάνω μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή της συνάρτησης εξαιτίας της αλλαγής του E , (ii) [+ η ροζ λωρίδα] στο δεξί μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή του άνω ορίου εξαιτίας της αλλαγής του E και (iii) [- η πράσινη λωρίδα] στο αριστερό μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή του κάτω ορίου εξαιτίας της αλλαγής του E . Οι αλλαγές αυτές και επομένως και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι ανάλογα με το δE , για μικρά δE , οπότε διαιρώντας τα με δE θα προκύψει το ζητούμενο. Οι γκρι ορθογώνιες περιοχές είναι ανάλογες του δE^2 , οπότε είτε τις λάβουμε υπόψη, είτε όχι, είτε λάβουμε ένα μέρος αυτών στους υπολογισμούς μας το αποτέλεσμα θα είναι μηδενικό μετά τη διαίρεση με το δE και τον υπολογισμό του ορίου $\delta E \rightarrow 0$.

Κατόπιν αυτών των διευκρινίσεων θα πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν της λωρίδας $BB'C'C$,

$$\mathcal{E}_1 = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} [f(x; E + \delta E) - f(x; E)] dx = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \left[\frac{\partial f(x; E)}{\partial E} \delta E + \mathcal{O}(\delta E^2) \right] dx ,$$

το εμβαδόν της λωρίδας $DCC'D'$,

$$\mathcal{E}_2 = \int_{x_+(E)}^{x_+(E+\delta E)} f(x; E) dx = (x'_+(E) \delta E) f(x_+(E); E) + \mathcal{O}(\delta E^2) ,$$

και τέλος το εμβαδόν της λωρίδας $ABB'A'$,

$$\mathcal{E}_3 = - \int_{x_-(E)}^{x_-(E+\delta E)} f(x; E) dx = -(x'_-(E) \delta E) f(x_-(E); E) + \mathcal{O}(\delta E^2) .$$

Προσθέτοντας τα τρία αυτά εμβαδά-ολοκληρώματα, διαιρώντας με το δE και λαμβάνοντας το όριο $\delta E \rightarrow 0$ βρίσκουμε

$$\frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{\partial f(x; E)}{\partial E} dx + x'_+(E) f(x_+(E); E) - x'_-(E) f(x_-(E); E) . \quad (20)$$

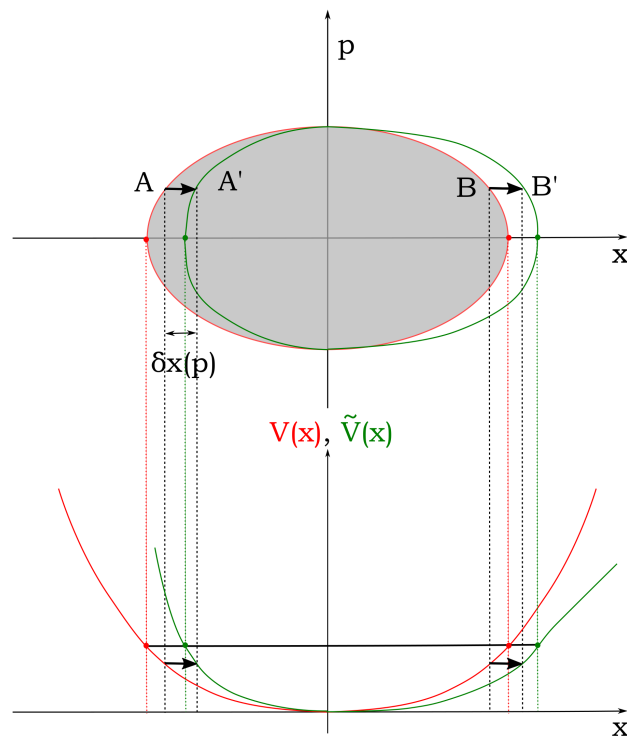
Αυτό είναι το αποτέλεσμα της παραγωγισής. Στην ειδική περίπτωση που η $f(x; E)$ μηδενίζεται στα όρια $x_-(E)$ και $x_+(E)$, οι δύο τελευταίοι όροι απουσιάζουν.

Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή όπου η καμπύλη της ροής στο χώρο των φάσεων είναι μια έλλειψη, η καμπύλη αυτή καλύπτει ένα χωρίο με εμβαδόν $\mathcal{E} = \pi ab$, όπου a, b οι δύο ημιμάξονες της έλλειψης (το αντίστοιχο ενός κύκλου με δύο διαφορετικές ακτίνες). Ο ημιμάξονας επί του άξονα x είναι $a = x_{\max} = \sqrt{2E/k}$, ενώ ο ημιμάξονας επί του άξονα p είναι $b = p_{\max} = \sqrt{2Em}$. Αυτόματα λοιπόν οδηγούμαστε στην έκφραση της περιόδου για τον αρμονικό ταλαντωτή

$$T_{a.t.} = \frac{d(\pi \sqrt{2E/k} \sqrt{2Em})}{dE} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (21)$$

Η ισοχρονικότητα του ταλαντωτή, καθώς και κάθε άλλου πηγαδιού δυναμικής ενέργειας για ενέργειες πολύ κοντά στον πάτο του πηγαδιού, είναι αποτέλεσμα της κοινής εξάρτησης των δύο διαστάσεων του χωρίου από την $\sqrt{E}$.

Θα μπορούσαμε, άραγε, να ανακαλύψουμε και κάποια άλλη $V(x)$ η οποία να οδηγεί στην ξεχωριστή ιδιότητα της ισοχρονικότητας που χαρακτηρίζει τον αρμονικό ταλαντωτή; Η συσχέτιση της περιόδου με το εμβαδόν του χωρίου στο χώρο των φάσεων μπορεί να μας αποκαλύψει την απάντηση. Ένας αρμονικός ταλαντωτής οδηγεί σε ελλειπτικά χωρία, των οποίων τα εμβαδά μεγαλώνουν γραμμικά με την ενέργεια. Αν κατασκευάζαμε μια άλλη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας η οποία να οδηγούσε σε εμβαδό χωρίου, για κάθε ενέργεια, ίσο με αυτό του ταλαντωτή θα είχαμε το ζητούμενο. Προσέξτε ότι μας ενδιαφέρει αυτή η ισότητα εμβαδών σε κάθε ενέργεια και όχι σε μια μεμονωμένη τιμή της ενέργειας.



Σχήμα 5: Μια κατάλληλα παραμορφωμένη δυναμική ενέργεια $\tilde{V}(x)$, σε σχέση με αυτήν ενός αρμονικού ταλαντωτή, οδηγεί σε ισεμβαδικά χωρία (σε σχέση με τα αντίστοιχα του αρμονικού ταλαντωτή) στο χώρο των φάσεων και επομένως χαρακτηρίζεται από την ισοχρονικότητα του αρμονικού ταλαντωτή.

Ας παραμορφώσουμε λοιπόν κατάλληλα το ελλειπτικό χωρίο ενός αρμονικού ταλαντωτή, σταθερά k , κρατώντας το εμβαδόν του σταθερό. Προφανώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες παραμορφώσεις. Εμάς μας ενδιαφέρουν εκείνες οι παραμορφώσεις οι οποίες θα σχετίζονται με μια τροποποιημένη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας έτσι ώστε η παραμόρφωση του χωρίου να είναι ισεμβαδική με την αντίστοιχη έλλειψη σε κάθε ενέργεια. Θα μειώσουμε την ελευθερία των δυνατών παραμορφώσεων απαιτώντας το σημείο $x = 0$ να είναι το σημείο ισορροπίας και της νέας δυναμικής ενέργειας $\tilde{V}(x)$. (Αν επιτρέψουμε στο σημείο ισορροπίας να αλλάζει εισάγουμε μια τετριμμένη παραμόρφωση –απλώς μετατοπίζουμε το χωρίο στον άξονα x – η οποία δεν εισάγει νέου τύπου δυναμικές ενέργειες.) Επομένως δεν αλλάζουμε την κάθετη διάμετρο του χωρίου στη θέση $x = 0$. Μπορούμε, όμως, να μετακινήσουμε τις δύο πλευρές της έλλειψης έτσι ώστε σε κάθε ύψος p , το $x_{ap}(p)$ να μετακινηθεί στο $x_{ap}(p) + \delta x(p)$ και ταυτόχρονα το $x_{deξ}(p)$ να μετακινηθεί στο $x_{deξ}(p) + \delta x(p)$. Με την παραμόρφωση αυτή τροποποιούμε το σχήμα αλλά όχι το εμβαδόν. Η δε $\delta x(p)$ είναι μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση. Ποια δυναμική ενέργεια θα οδηγούσε σε ένα τέτοιο χωρίο, παραμορφωμένης έλλειψης; Από τη διατήρηση της ενέργειας για τον αρμονικό ταλαντωτή που μας οδήγησε στο ελλειπτικό χωρίο, εφαρμόζοντάς την στο νέο πεδίο που περιγράφεται από την νέα δυναμική ενέργεια $\tilde{V}(x)$ θα έχουμε για δύο σημεία

των χωρίων με ίδια p (π.χ. τα A, A' και B, B' του σχήματος 5):

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 &= E \\ \frac{p^2}{2m} + \tilde{V}(x') &= E .\end{aligned}\quad (22)$$

Με άλλα λόγια θα πρέπει

$$\frac{1}{2}kx^2 = \tilde{V}(x')$$

και αυτές οι δύο θέσεις θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση $x' = x + \delta x(p)$, ώστε να διατηρείται το εμβαδόν σταθερό. Επομένως η λύση στο πρόβλημά μας είναι μια $\tilde{V}(x)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}k \left[x - \delta x(\tilde{V}) \right]^2 .^6 \quad (23)$$

Η μορφή αυτής της έκφρασης είναι αρκετά αινιγματική και προβληματική, αφού η συνάρτηση $\tilde{V}$ εμφανίζεται ως όρισμα στην αυθαίρετη συνάρτηση δx που εισάγεται στη μεταβλητή x της $\tilde{V}$! Μάλιστα η ελευθερία επιλογής της δx δεν είναι απόλυτη αφού ένα σημείο με $x > 0$ θα πρέπει και μετά την παραμόρφωση της δυναμικής ενέργειας να παραμείνει θετικό, δηλαδή $x - \delta x > 0$. Προκειμένου λοιπόν να διαμορφώσουμε την παραπάνω σχέση σε μια πρακτικά πιο χρήσιμη μορφή θα γράψουμε

$$x = \pm \sqrt{\frac{2\tilde{V}}{k}} + \delta x(\tilde{V}) .$$

Αν θέλουμε η μετακίνηση κατά δx να μην αλλάζει το πρόσημο του x , θα μπορούσαμε να επαναδιατυπώσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$x = \pm \sqrt{\frac{2\tilde{V}}{k}} (1 \pm f(\tilde{V})) \quad (24)$$

με $|f(\tilde{V})| < 1$ και το πρόσημο του $\pm$ στον όρο $(1 \pm f)$ να επιλέγεται ανάλογα με το πρόσημο του x , έτσι ώστε όταν το x είναι θετικό να διαστέλλεται κατά τον παράγοντα f , ενώ το αντίστοιχο αρνητικό x να συστέλλεται κατά τον παράγοντα f . Αντιστρέφοντας στη συνέχεια την παραπάνω σχέση (24) θα έχουμε

$$\tilde{V}(x) = G_{\pm}^{-1} \left(\frac{k}{2}x^2 \right) . \quad (25)$$

⁶Την αυθαίρετη συνάρτηση $\delta x(p)$ της προηγούμενης συζήτησης, την αντικαταστήσαμε με μια αυθαίρετη συνάρτηση του $\tilde{V}$, αφού αλλάζοντας το p κατά την κίνηση του σωματιδίου αλλάζει και η τιμή της δυναμικής ενέργειας που βρίσκεται το σωματίδιο.

όπου $G_{\pm}^{-1}$ οι αντίστροφες συναρτήσεις των $G_{\pm}(y) = y(1 \pm f(y))^2$. Προφανώς η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη των $G_{\pm}$, δηλαδή θα πρέπει οι $y(1 \pm f(y))^2$ να είναι μονότονες συναρτήσεις⁷. Αυτή η κατασκευή μας δίνει τους δύο κλάδους της αυθαίρετα παραμορφωμένης δυναμικής ενέργειας, η οποία έχει την ίδια σταθερή περίοδο με τον αρμονικό ταλαντωτή, $2\pi\sqrt{m/k}$.

Παράδειγμα: Αν επιλέγαμε $f(y) = 1/n$ (όπου n φυσικός αριθμός > 1) τότε οι συναρτήσεις $G_{\pm}$ θα είχαν τη μορφή

$$G_{\pm}(y) = y[1 \pm (1/n)]^2 \quad (26)$$

και αντιστρέφοντάς τες

$$G_{\pm}^{-1}(x) = \frac{x}{[1 \pm (1/n)]^2} . \quad (27)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την (25)

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 \frac{1}{[1+(1/n)]^2} , & \text{για } x \geq 0 , \\ \frac{k}{2}x^2 \frac{1}{[1-(1/n)]^2} , & \text{για } x < 0 . \end{cases} \quad (28)$$

Στην πραγματικότητα, η δυναμική αυτή ενέργεια περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή με διαφορετική σταθερά για θετικά και για αρνητικά x . Η περίοδός του θα είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων ημιπεριόδων

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k/[1-(1/n)]^2}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k/[1+(1/n)]^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

3 * Θεώρημα Liouville

Ο χώρος των φάσεων που μελετήσαμε αναλυτικά στο προηγούμενο εδάφιο αποτελεί έναν άλλο τρόπο για να «παρακολουθούμε» την εξέλιξη ενός μηχανικού (και όχι μόνο συστήματος). Μια αρχική συνθήκη κάποιου συστήματος αποτυπώνεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο χώρο των φάσεων και επομένως αυτή η αρχική κατάσταση ακολουθεί συν το χρόνω μια προδιαγεγραμμένη καμπύλη βάσει της δυναμικής που διέπει την εξέλιξη του συστήματος. Μάλιστα, επειδή η δυναμική για τις νέες συντεταγμένες (p, x) περιγράφεται με ένα σύστημα πρωτοβαθμίων εξισώσεων ($\dot{p} = F(x)$, $\dot{x} = p/m$) η δυναμική αυτή θυμίζει πιο πολύ αριστοτέλεια μηχανική όπου η γενικευμένη δύναμη $\mathcal{F} = (F(x), p/m)$ σε μια συγκεκριμένη θέση $\mathcal{X} = (p, x)$ είναι ανάλογη με την ταχύτητα $\mathcal{V} = (\dot{p}, \dot{x})$: $\mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων είναι γραμμές που δεν τέμνονται (τουλάχιστον ενόσω η δύναμη είναι χρονοανεξάρτητη⁸), αφού σε αντίθετη περίπτωση οι αρχικές συνθήκες που θα

⁷Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η $1 \pm f(y) \pm 2yf'(y) > 0$.

⁸Στην περίπτωση χρονοεξαρτώμενης δύναμης οι εκάστοτε αρχικές συνθήκες θέσης/ταχύτητας δεν εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο, αν αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αφού η δυναμική αλλάζει με το χρόνο.

αντιστοιχούσαν στο σημείο τομής (ή επαφής, αν εφάπτονταν) δεν θα είχαν μοναδική εξέλιξη. Οι γραμμές λοιπόν στο χώρο των φάσεων δημιουργούν μια ροή που αντιστοιχεί στην εξέλιξη του συστήματος, όποιες και αν είναι οι αρχικές του συνθήκες. Θα δείξουμε ότι η ροή αυτή έχει ένα χαρακτηριστικό που θυμίζει τη ροή των πραγματικών υγρών: Είναι ασυμπίεστη. Με άλλα λόγια η εξέλιξη ενός χωρίου του χώρου των φάσεων, τα σημεία του οποίου ακολουθούν αυτή τη ροή, θα διατηρήσει τον αρχικό του όγκο (επιφάνεια για έναν διδιάστατο χώρο φάσεων) ακόμη και αν το σχήμα του χωρίου παραμορφωθεί εντόνως.

Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό. Έστω ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_0, p_0) στο χώρο των φάσεων. Το σημείο αυτό θα εξελιχθεί μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα ϵ στο $(x_0 + (p_0/m)\epsilon, p_0 + F(x_0)\epsilon)$. Οι νέες αυτές συντεταγμένες είναι τα ακριβή αναπτύγματα $x(\epsilon), p(\epsilon)$ μέχρι τάξης ϵ . Ένα γειτονικό του A σημείο B με συντεταγμένες $(x_0 + \delta x, p_0)$ θα εξελιχθεί στο ίδιο χρονικό διάστημα στο

$$(x_0 + \delta x + (p_0/m)\epsilon, p_0 + F(x_0 + \delta x)\epsilon) .$$

Έτσι το πολύ μικρό διάνυσμα $(\delta x, 0)$ που συνέδεε αρχικά τα σημεία A, B θα εξελιχθεί στο διάνυσμα

$$(\delta x, \epsilon[F(x_0 + \delta x) - F(x_0)]) \simeq \delta x (1, \epsilon \partial F / \partial x|_{x_0}) .$$

Αντίστοιχα ένα άλλο γειτονικό του A σημείο Γ με συντεταγμένες $(x_0, p_0 + \delta p)$ θα εξελιχθεί στο ίδιο χρονικό διάστημα στο

$$(x_0 + ((p_0 + \delta p)/m)\epsilon, p_0 + \delta p + F(x_0)\epsilon) .$$

Έτσι το πολύ μικρό διάνυσμα $(0, \delta p)$ που συνέδεε αρχικά τα σημεία A, Γ θα εξελιχθεί στο διάνυσμα

$$((\delta p/m)\epsilon, \delta p) = \delta p (\epsilon/m, 1) .$$

Μπορείτε εύκολα να δείξετε μόνοι σας ότι η τέταρτη κορυφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με κορυφές τα A, B, Γ και συντεταγμένες ως προς το A $(\delta x, \delta p)$ θα εξελιχθεί ως το άθροισμα των εξελίξεων των $\vec{AB} = (\delta x, 0)$ και $\vec{A\Gamma} = (0, \delta p)$ δηλαδή ως

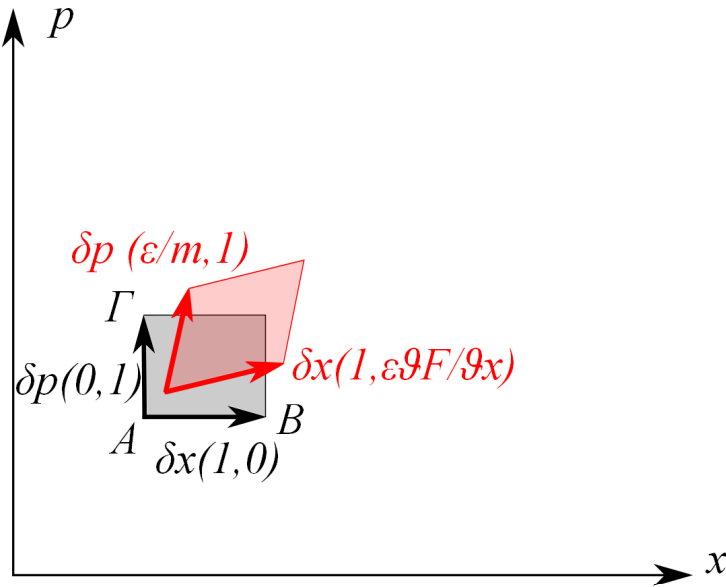
$$\delta x (1, \epsilon \partial F / \partial x|_{x_0}) + \delta p (\epsilon/m, 1) .$$

Επομένως το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα εξελιχθεί σε ένα πλαγιογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο θα έχει εμβαδόν

$$\delta S(\epsilon) = \left| \begin{vmatrix} \delta x & \delta x \epsilon \partial F / \partial x|_{x_0} \\ \delta p \epsilon / m & \delta p \end{vmatrix} \right| = \delta x \delta p [1 - \mathcal{O}(\epsilon^2)] \simeq \delta S_0 . \quad (29)$$

Οι διορθώσεις στο εμβαδόν είναι τάξης ϵ^2 και δεν χρειάζεται να τους γράψουμε αφού έτσι κι αλλιώς σε όλους τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε αγνοήσει τέτοιας τάξης όρους. Αφού δεν υπάρχουν μεταβολές του εμβαδού τάξης ϵ αυτό σημαίνει πώς σε κάθε χρονική στιγμή

$$\frac{d\delta S}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta S(\epsilon) - \delta S_0}{\epsilon} = 0$$



Σχήμα 6: Η παραμόρφωση ενός παραλληλόγραμμου στοιχειώδους χωρίου στο χώρο των φάσεων (γκρι) και η εξέλιξή της μετά από τον απειροστό χρόνο ϵ .

δηλαδή δεν αλλάζει το εμβαδό κάποιου μικρού χωρίου καθώς αυτό εξελίσσεται. Αντίστοιχα και ένα πεπερασμένου μεγέθους χωρίο (αποτελούμενο από πολλά στοιχειώδη ορθογώνια) θα εξελιχθεί σε ένα χωρίο ίδιου μεγέθους με το αρχικό με το πέρασμα του χρόνου, μολονότι το χωρίο αυτό μπορεί να μην θυμίζει καθόλου, ως προς το σχήμα, το αρχικό χωρίο.⁹ Το αποτέλεσμα αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος Liouville και έχει ισχύ όχι μόνο για διδιάστατους χώρους φάσεων, αλλά και για μεγαλύτερης διάστασης φασικούς χώρους φυσικών συστημάτων.

Ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων μπορεί να ιδωθεί είτε ως μια συλλογή από ίδια φυσικά συστήματα τα οποία τη δεδομένη στιγμή διαφοροποιούνται ως προς τις αρχικές τους συνθήκες, είτε ως ένα μόνο φυσικό σύστημα του οποίου οι αρχικές συνθήκες δεν είναι γνωστές επακριβώς, αλλά γνωρίζουμε την στατιστική κατανομή τους εντός κάποιας περιοχής.

Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ζευγάρια των φυσικών ποσοτήτων (εδώ η θέση και η ορμή) που απεικονίζονται στο φασικό χώρο και ικανοποιούν το θεώρημα Liouville, είναι ακριβώς τα ζευγάρια εκείνα που στην κβαντομηχανική εμφανίζονται να ικανοποιούν την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, δηλαδή η απροσδιοριστία της μιας να βρίσκεται σε αντίστροφη αναλογία με την αβεβαιότητα της άλλης, κατ' ελάχιστον.

⁹Φανταστείτε για παράδειγμα την εξέλιξη στο χρόνο μιας περιοχής του φασικού χώρου που περικλείει το σημείο ακινησίας σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Λόγω της περιέργης ροής γύρω από ένα τέτοιο σημείο, άλλες περιοχές του φασικού χώρου θα συμπιεστούν πλησιάζοντας το ασταθές σημείο, ενώ άλλες θα απομακρυνθούν με εκθετικό τρόπο από αυτό. Επομένως ένα αρχικά κυκλικό τέτοιο χωρίο θα γίνει εξαιρετικά επίμηκες· σχεδόν μια μονοδιάστατη γραμμή, ίδιου όμως εμβαδού με το αρχικό χωρίο.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 4

- Για δυνάμεις που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη θέση εμφανίζεται μια διατηρούμενη ποσότητα: η ενέργεια. Μέσω της διατήρησης αυτής μπορεί να συσχετίσει κανείς την ορμή ενός σωματιδίου με τη θέση του. Η απεικόνιση της κίνησης ενός τέτοιου σωματιδίου στο χώρο των φάσεων θέσης-ορμής γίνεται με μη τεμνόμενες καμπύλες οι οποίες «ρέουν» με ωρολογιακή φορά.
- Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από ευσταθή σημεία ισορροπίας είναι προσεγγιστικά ελλείψεις. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από ασταθή σημεία ισορροπίας είναι προσεγγιστικά υπερβολές. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από τα ακραία σημεία της κίνησης (τα σημεία που μηδενίζεται απροδικά η ταχύτητα) είναι προσεγγιστικά παραβολές.
- Η προσέγγιση σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας με την κατάλληλη ενέργεια που θα σταματούσε το σωματίδιο στο σημείο αυτό είναι ατέρμονη.
- Η περίοδος ενός ταλαντωτή σχετίζεται με το εμβαδόν του αντίστοιχου χωρίου στο χώρο των φάσεων ως

$$T = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

- Ένας ταλαντωτής με ενέργεια μόλις μεγαλύτερη από το ελάχιστο μιας δυναμικής ενέργειας είναι κατά προσέγγιση ισόχρονος.
- Η εξέλιξη ενός χωρίου του χώρου των φάσεων διατηρεί το εμβαδόν αυτού στη διάρκεια του χρόνου (θεώρημα Liouville). Η ροή στο χώρο των φάσεων είναι ασυμπίεστη.