Κεφάλαιο 3
2ος νόμος: συμμετρίες και μέθοδοι επίλυσης

1 Συμμετρίες των εξισώσεων

Προκειμένου να βρούμε τη λύση των εξισώσεων κίνησης ενός μηχανικού συστήματος, είναι σημαντικό να εντοπίσουμε πιθανές συμμετρίες[1] των εξισώσεων αυτών, προτού καν επιχειρήσουμε να τις λύσουμε. Δηλαδή θα θέλαμε να εντοπίσουμε μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις. Αν τα καταφέρουμε θα είναι αρκετά πιο εύκολο να φτάσουμε στη λύση, όπως θα φανεί στα παραδείγματα που θα δούμε στη συνέχεια.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος εντομολόγος διατυπώνει, ύστερα από μακροχρόνιες παρατηρήσεις στην περιοχή του Αμαζονίου, τον ακόλουθο νόμο εξέλιξης του πληθυσμού κάποιου είδους εντόμων: «Αφότου μια ομάδα των εν λόγω εντόμων εγκατασταθεί σε κάποιο καινούριο χώρο και κατασκευάσει μια νέα φωλιά, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των εντόμων μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 ,$$

όπου N ο πληθυσμός των εντόμων κάθε χρονική στιγμή, και a, b κάποιες χαρακτηριστικές θετικές σταθερές.» Αν δεχτούμε ότι ο νόμος αυτός είναι ορθός, θα είχε καμιά σημασία αν η μελέτη της εξέλιξης του πληθυσμού γίνει σήμερα, αύριο, ή μετά από ένα χρόνο; Φυσικά όχι. Στη γλώσσα της Φυσικής θα λέγαμε ότι ο νόμος αυτός είναι αναλλοίωτος σε μεταθέσεις στο χρόνο. Το ίδιο και όσον αφορά μεταθέσεις στο χώρο, αφού ο νόμος κατά τον εντομολόγο ισχύει για κάθε σημείο στην περιοχή του Αμαζονίου που έκανε τις παρατηρήσεις του. Είναι όμως ο παραπάνω νόμος εξίσου ορθός και σε αντιστροφή του χρόνου; Αν παρακολουθούσατε το βίντεο της εξέλιξης του πληθυσμού, προκειμένου να επαληθεύσετε το νόμο, και ξαφνικά αποφασίζατε να «τρέξετε» το βίντεο ανάποδα, θα βλέπατε έναν αρχικά μικρό πληθυσμό να συρρικνώνεται αντί να αυξάνεται, αντίθετο δηλαδή και με τις παρατηρήσεις και με την κοινή λογική που υπαγορεύει την αύξηση του πληθυσμού μέχρι ο πληθυσμός να φτάσει σε κάποιο οριακό σημείο, όπου η θνησιμότητα και η έλλειψη πόρων θα υπερκεράσει τη γεννητικότητα. Θα διαπιστώνατε λοιπόν ότι ο παραπάνω νόμος δεν είναι αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου.

Ας επανέλθουμε όμως στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, το νόμο βάση του οποίου μπορεί να προβλεφθεί το οσοδήποτε μακρινό μέλλον των μηχανικών συστημάτων. Είναι η εξίσωση αυτή

[1] Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο συμμετρία, κατ' επέκταση της γνωστής μας γεωμετρικής συμμετρίας, με το ακόλουθο νόημα: «Κάτι είναι συμμετρικό αν, δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο, αυτό εμφανίζεται ακριβώς το ίδιο όπως ήταν αρχικά.» (Ο ορισμός της συμμετρίας που έδωσε ο Hermann Weyl, διατυπωμένη από τον Richard Feynman σε απλή καθημερινή γλώσσα.)

αναλλοίωτη σε κάποιο μετασχηματισμό; Ένας προφανής τέτοιος μετασχηματισμός είναι η αντιστροφή του χρόνου $t \to t' = -t$, σε αντίθεση με το νόμο εξέλιξης του πληθυσμού των εντόμων που είδαμε παραπάνω. Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (με την οποία απ' ότι φαίνεται συμφωνούν όλες οι γνωστές θεμελιώδεις δυνάμεις), ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο είναι συνάρτηση μόνο της θέσης αυτού $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, ισχύει ότι

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{d(-t')^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}.$$

Με άλλα λόγια ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος αν αντικαταστήσει κανείς το t με το $t' = -t$. Αυτό σημαίνει δύο πράγματα: (i) Ότι όλα τα μηχανικά συστήματα που εξελίσσονται σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και υπόκεινται σε δυνάμεις θεμελιώδους φύσης δεν μπορούν να ορίσουν το βέλος του χρόνου.[2] Αν παρακολουθούσε κανείς μια ταινία εξέλιξης ενός τέτοιου συστήματος να τρέχει ανάποδα δεν θα το αντιλαμβανότανε· όλα θα φαίνονταν να διαδραματίζονται με απόλυτα φυσιολογική σειρά. (ii) Ότι όπως μπορεί κάποιος, λύνοντας την εξίσωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα –είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο–, να προβλέψει το μέλλον ενός μηχανικού συστήματος, οσοδήποτε μακρινό και αν είναι αυτό, μπορεί να προβλέψει εξίσου καλά και το παρελθόν του (κοντινό ή απώτερο). Για παράδειγμα, μπορεί να διερευνήσει κανείς το παρελθόν του Ηλιακού συστήματος, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα, για τους πλανήτες και τον Ήλιο, προς τα πίσω στο χρόνο, όπως σημειώσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι επίσης αναλλοίωτος και σε χρονικές μεταθέσεις ($t \to t' = t + \tau$, όπου τ κάποιο σταθερό χρονικό διάστημα),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}, \text{ για οποιαδήποτε τιμή του } \tau,$$

γεγονός το οποίο αντικατοπτρίζει την ομογένεια του χρόνου, το ότι δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη αρχή του χρόνου.[3] Με άλλα λόγια, όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες όσον αφορά στην έναρξη και στην τελική έκβαση ενός μηχανικού πειράματος. Αυτό εξάλλου αποτυπώνεται στην αντίληψη του Νεύτωνα για το χρόνο: «... [ο χρόνος] ρέει ομοιόμορφα, ανεξάρτητα από οτιδήποτε εξωτερικό και επομένως δεν σχετίζεται με οποιαδήποτε αλλαγή ή τρόπο μέτρησής του (π.χ. ώρα, μέρα, μήνα, ή έτος).»

Επίσης η έκβαση ενός μηχανικού πειράματος δεν μπορεί να είναι διαφορετική αν το πείραμα εκτελεστεί σε ένα άλλο σημείο, εκτός και αν στο νέο αυτό σημείο επικρατούν διαφορετικές συνθήκες που επηρρεάζουν την εξέλιξή του. Αν φανταστούμε στο αχανές διάστημα, μακριά από κάθε εξωτερική βαρυτική πηγή, ένα σύστημα από αλληλεπιδρώντα σωματίδια, δεν θα πρέπει

[2] Το βέλος του χρόνου αρχίζει να διακρίνεται πιο καθαρά σε σύνθετα μηχανικά προβλήματα, όταν πολλά μέρη του αλληλεπιδρούν έντονα, όπως οι μπάλλες του μπιλιάρδου οι οποίες ενώ αρχικά είναι τοποθετημένες σε μια οργανωμένη διάταξη διαλύονται σε μια ακατάστατη διάταξη μετά την πρώτη κρούση.

[3] Η Μεγάλη Έκρηξη, το γνωστό Big Bang, αναφέρεται σε θεωρίες οι οποίες ξεπερνούν τα όρια ισχύος της νευτώνειας θεωρίας.

η εξέλιξη της κίνησής τους να σχετίζεται καθόλου με τη θέση του κάθε σωματιδίου χωριστά, παρά από τη σχετική τους θέση. Λέμε λοιπόν ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος στις χωρικές μετατοπίσεις $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ (με δεδομένο ότι η δύναμη δεν θα αλλάξει τιμή από αυτή την αλλαγή, αφού όλα τα σωματίδια θα αλλάξουν κατά τον ίδιο τρόπο θέση, αλλά όχι σχετική θέση):

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \tag{1}$$

Τέλος η διανυσματική διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα, που έχουμε συνηθίσει να γράφουμε χωρίς πολύ σκέψη, υποκρύπτει μία ακόμη συμμετρία της φύσης· το γεγονός ότι όλες οι διευθύνσεις του χώρου είναι ισοδύναμες. Η ισοτροπία αυτή του χώρου, μάς δίνει το δικαίωμα να επιλέγουμε το σύστημα των αξόνων για την περιγραφή οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος, με ότι προασανατολισμό εμείς επιθυμούμε. Επομένως, η εξίσωση που διέπει την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος δεν μπορεί παρά να είναι διανυσματική,[4] αφού τα διανύσματα είναι γεωμετρικές οντότητες ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή τους. Την ιδιότητα αυτή των διανυσμάτων, να διατηρούν αναλλοίωτο το γεωμετρικό τους νόημα σε στροφές του συστήματος αναφοράς, θα μελετήσουμε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 7.

Υπάρχει όμως και μια τελευταία συμμετρία που εμπεριέχεται στο 2ο νόμο του Νεύτωνα: η γαλιλαϊκή συμμετρία· η αναλλοιότητα δηλαδή της εξίσωσης κίνησης σε αλλαγή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ο Γαλιλαίος στο βιβλίο του «*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems – Ptolemaic & Copernican*» μας δείχνει τον τρόπο να διαπιστώσουμε τη συμμετρία αυτή:

[4]Γενικότερα, μια εξίσωση που περιγράφει φυσικούς νόμους, ανεξάρτητους του συστήματος αναφοράς, επιβάλλεται να έχει τανυστική μορφή, δηλαδή να συσχετίζει τανυστικά μεγέθη. Η πιο απλή και τετριμμένη περίπτωση τανυστή είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, όπως είναι η μάζα. Προφανώς μια εξίσωση αποκλειστικά βαθμωτών μεγεθών θα ήταν ακατάλληλη να περιγράψει την κίνηση σωματιδίων στον τριδιάστατο χώρο.

«…Κλείσου μαζί με κάποιο φίλο σε μια κεντρική εσωτερική καμπίνα ενός μεγάλου πλοίου, και πάρε κοντά σου λίγες μύγες, μερικές πεταλούδες, και μερικά πτηνά. Έχε μαζί σου και ένα μικρό ενυδρείο με ένα ψάρι και ανάρτησε στην οροφή μία φιάλη γεμάτη νερό έτσι ώστε να αδειάζει στάλα - στάλα σε μια πλατιά λεκάνη. Όταν το πλοίο είναι ακίνητο παρατήρησε προσεκτικά πως τα πτηνά πετούν με ίση ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις. Το ψάρι επίσης κολυμπάει ανέμελα προς όλες της κατευθύνσεις και οι σταγόνες πέφτουν ρυθμικά στη λεκάνη… Αφού παρατηρήσεις όλα αυτά με προσοχή, διάταξε να σαλπάρει το πλοίο και να ταξιδέψει με κάποια σταθερή ταχύτητα, προσέχοντας η κίνηση του πλοίου να είναι ομαλή και χωρίς διαταραχές. Τότε δεν θα παρατηρήσεις καμία αλλαγή σε όσα παρατήρησες προηγουμένως, ούτε θα είσαι σε θέση να προσδιορίσεις κατά πόσο το πλοίο κινείται ή παραμένει ακίνητο… Οι σταγόνες θα πέφτουν με τον ίδιο τρόπο στη λεκάνη και στο ίδιο σημείο, χωρίς να μετακινούνται προς τη πρύμνη, παρότι όταν οι σταγόνες κινούνται στον αέρα το πλοίο μετακινείται προς τα μπροστά. Το ψάρι στο ενυδρείο θα κολυμπάει προς τα εμπρός με την ίδια ευκολία που κολυμπάει προς τα πίσω, και θα κατευθύνεται προς το δόλωμα με την ίδια ευκολία ανεξαρτήτως από το που βρίσκεται αυτό. Τέλος οι πεταλούδες και οι μύγες θα συνεχίσουν ανέμελα το πέταγμά τους προς όλες τις κατευθύνσεις, και δεν θα συγκεντρώνονται προς τη πρύμνη, ως θα συνέβαινε αν κουραζόντουσαν στην προσπάθειά τους να διατηρήσουν τη θέση τους στο κινούμενο πλοίο…»

Αρκεί, λοιπόν, να αλλάξουμε σύστημα αναφοράς (φροντίζοντας πάντα να είναι αδρανειακό), –υποθέτοντας ότι η δύναμη παραμένει ίδια και στο νέο σύστημα–, και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μένει απαράλλαχτος:

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2(\mathbf{r} - \mathbf{v}\,t)}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}, \tag{2}$$

όπου $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}\,t$ η θέση του σωματιδίου στο νέο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε σχέση με το αρχικό.

2 Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα πηγάζει από συμμετρίες

Όταν διατυπώσαμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα σε προηγούμενο κεφάλαιο γράψαμε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αβίαστα. Είμαστε τόσο συνηθισμένοι στη διατύπωση του δυναμικού αυτού νόμου, που αξίζει ίσως να αναλογιστούμε που οφείλεται η μορφή αυτή.

Ο δυναμικός αυτός νόμος είναι δευτεροτάξιος, όχι εξαιτίας κάποιου βαθύτερου λόγου. Οι παρατηρήσεις είναι αυτές που επιβάλλουν να είναι τέτοιος. Γνωρίζουμε ότι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ενός σωματιδίου καθορίζουν πλήρως την τροχιά του. Για να πεισθείτε, υποθέστε ότι οδηγείτε ένα αυτοκίνητο προς το χείλος ενός γκρεμού τη μια φορά με σταθερή ταχύτητα 20 km/h και τη δεύτερη φορά ξεκινώντας με μεγαλύτερη ταχύτητα και φρενάροντας έτσι ώστε μόλις το αυτοκίνητο φτάσει στο χείλος του γκρεμού να έχει και πάλι ταχύτητα 20 km/h. Αν εκτελέσουμε το πείραμα θα διαπιστώσουμε (αν επιζήσουμε του εγχειρήματος) ότι και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά που θα διαγράψει το αυτοκίνητο πέφτοντας στο γκρεμό θα είναι ακριβώς η ίδια. Αν πάλι σας φαίνεται επικίνδυνο να επιχειρήσετε κάτι τέτοιο αρκεστείτε στην επιβεβαίωση των πειραματιστών του 17ου αιώνα. Εφόσον λοιπόν η θέση του κινητού και η πρώτη χρονική παράγωγος της θέσης του, και *μόνον* αυτές, αρκούν για την περιγραφή της κίνησης ενός κινητού μέσα σε ένα δοσμένο πεδίο δυνάμεων, δεν μπορεί παρά ο δυναμικός νόμος της κίνησης να περιγράφεται με μια δευτεροτάξια ως προς το χρόνο εξίσωση που συνδέει το αίτιο της μεταβολής της κίνησης (τη δύναμη) με τη θέση. Η γενικότερη μορφή της διαφορικής εξίσωσης θα είναι λοιπόν

$$F = a(x, \dot{x}, t)\ddot{x} + b(x, \dot{x}, t)\dot{x} + c(x, \dot{x}, t) \tag{3}$$

όπου a, b, c κάποιες συναρτήσεις των $x, \dot{x}, t$ οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν.[5] Θεωρήσαμε ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική ως προς την επιτάχυνση. Αν δεν ήταν θα μπορούσαμε να τη λύσουμε ως προς την επιτάχυνση και τότε αυτό που θα εμφανιζόταν στο αριστερό σκέλος, μετά τη λύση θα λέγαμε ότι είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης, δηλαδή η δύναμη. Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο τελευταίοι όροι του δεξιού σκέλους θα μπορούσαν να συγχωνευτούν σε μια ενιαία, αγνώστου μορφής συνάρτηση $d(x, \dot{x}, t)$.

Όμως από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι όταν εξαφανιστεί η δύναμη ($F = 0$) το κινητό συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως $\ddot{x} = 0$· συνεπώς $d(x, \dot{x}, t) = 0$. Ταυτόχρονα, η ομογένεια του χώρου και η ομογένεια του χρόνου επιβάλουν στη συνάρτηση να μην εξαρτάται ούτε από τη θέση του κινητού, ούτε από το χρόνο.[6] Επομένως, ο δυναμικός νόμος των μηχανικών συστημάτων δεν μπορεί παρά να έχει την απλούστερη μορφή

$$F = a(\dot{x})\ddot{x}. \tag{4}$$

Στο σημείο αυτό θα έπρεπε να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια να καταλήξουμε στο 2ο νόμο του Νεύτωνα και απλώς να δεχτούμε ότι τυχαίνει ο κόσμος μας να συμπεριφέρεται με μια σταθερά αναλογίας μεταξύ δύναμης και επιτάχυνσης, αν δεν υπήρχε καμία άλλη συμμετρία την οποία να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε για να φτάσουμε στην γνωστή διατύπωση του φυσικού νόμου εξέλιξης των μηχανικών συστημάτων. Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο υπάρχει ακόμη μια συμμετρία του φυσικού μας κόσμου, την οποία αν και γνωρίζουμε καλά, δεν έχουμε μάθει να την αναγνωρίζουμε ως συμμετρία: πρόκειται για τη συμμετρία που περιγράφει με τόσο γλαφυρό τρόπο ο Γαλιλαίος (βλ. παραπάνω). Η εξίσωση που γράψαμε παραπάνω δεν είναι συμβατή με τη γαλιλαϊκή συμμετρία, αφού αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς θα αλλάξει εν γένει η τιμή της $a(\dot{x})$, ενώ όλα τα άλλα μέρη της εξίσωσης (F και $\ddot{x}$) θα διατηρήσουν τη μορφή τους με αποτέλεσμα η κίνηση να είναι διαφορετική στο τονούμενο σύστημα σε αντιδιαστολή με τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου. Επομένως, μοναδική διέξοδος για το δυναμικό νόμο, ώστε να είναι συμβατός με όλες τις συμμετρίες του κόσμου μας είναι $a(\dot{x}) = m =$ σταθερά η

[5]Στην παραπάνω εξίσωση θεωρήσαμε μονοδιάστατη κίνηση κατά μήκος του άξονα-x, ώστε να μην περιπλέξουμε την απόδειξη με τη χρήση διανυσμάτων. Θα μπορούσε βέβαια κανείς, εύκολα, να επεκτείνει την απόδειξη θεωρώντας την αντίστοιχη διανυσματική εξίσωση 2ης τάξης.

[6] Εδώ υποθέτουμε ότι μεταφέροντας το σωματίδιο σε μια άλλη θέση και μελετώντας το σε μια άλλη χρονική στιγμή, μεταφέρεται αυτούσια και η δύναμη και η χρονική εξέλιξη αυτής.

οποία θα εξαρτάται από το ίδιο το σωματίδιο. Ο δε δυναμικός νόμος, καταλήγει, σεβόμενος τις συμμετρίες, να είναι αυτός και μόνο αυτός που καλά γνωρίζουμε:

$$F = m\ddot{x}. \tag{5}$$

Όσον αφορά, τη σταθερά m, που μαθαίνουμε να αποκαλούμε «μάζα» θα πρέπει να είναι μια βαθμωτή ποσότητα που χαρακτηρίζει το σωματίδιο. Με πειράματα μπορούμε να καταλάβουμε ότι αυτή ποσότητα, η εισαγωγή της οποίας αποτελεί τεράστια καινοτομία του Νεύτωνα, σχετίζεται με την ποσότητα της ύλης που περικλείεται στο σωματίδιο. Για παράδειγμα αν προσδέσουμε σε ένα σωματίδιο πάνω στο οποίο επενεργεί μια κάποια δύναμη, ένα δεύτερο ίδιο σωματίδιο θα διαπιστώσουμε ότι η επιτάχυνση των δύο σωματιδίων θα υποδιπλασιαστεί.[7]

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό ας τονίσουμε ότι η διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα από τον ίδιο τον Νεύτωνα ήταν απλώς μια πρόταση αναφορικά με το πώς «συμπεριφέρονται» τα μηχανικά συστήματα, μια λαμπρή ιδέα με αφορμή κάποια πειραματικά δεδομένα, η οποία, από ότι φάνηκε, έδινε απόλυτα ικανοποιητικές προβλέψεις για οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα. Η κατασκευή, όμως, του δυναμικού νόμου που παραθέσαμε παραπάνω, αποτελεί μια πολύ βαθύτερη προσέγγιση του προβλήματος, η οποία ξεκινά από την παρατήρηση κάποιων αρχικών στοιχείων που καθορίζουν την κίνηση, και στηρίζεται εξολοκλήρου σε θεμελιώδεις συμμετρίες της φύσης.

3 Αναλυτική επεξεργασία του 2ου νόμου σε ειδικές περιπτώσεις

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά απλά και διδακτικά παραδείγματα μηχανικών συστημάτων, η εξέλιξη των οποίων μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς με αναλυτικό τρόπο.

3.1 Δυνάμεις με αμιγή χρονοεξάρτηση

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα υλικό σώμα που μπορεί να κινείται σε μια διάσταση ασκείται μια δύναμη της μορφής $F(t)$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί τότε να επιλυθεί σε δύο φάσεις: (i) ολοκληρώνοντάς τον μια φορά, μπορεί κανείς να υπολογίσει τη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας

[7] Σκεφθείτε πως θα αντικρούατε το επιχείρημα ότι η ποσότητα που εισέρχεται στο δυναμικό νόμο δεν σχετίζεται με την ποσότητα της ύλης, αλλά με τον όγκο αυτής.

και (ii) με άλλη μια χρονική ολοκλήρωση να υπολογίσει το διανυθέν διάστημα.

$$
\begin{aligned}
&F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} \to \\
&\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{F(t')}{m}\, dt' \Rightarrow v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{F(t')}{m}\, dt' \to \\
&\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t'')\, dt'' = \int_0^t \left[v(0) + \int_0^{t''} \frac{F(t')}{m}\, dt' \right] dt'' \to \\
&x(t) = x(0) + v(0)t + \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \, \frac{F(t')}{m} \, . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Προσέξτε τη χρήση διαφορετικών συμβόλων για τις μεταβλητές ολοκλήρωσης και για τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα όρια των ολοκληρωμάτων. Στο δε τελικό αποτέλεσμα μπορείτε να αναγνωρίσετε την ομογενή λύση ($x(0) + v(0)t$) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή τη λύση του μέρους $m\ddot{x} = 0$) και την ειδική λύση (το διπλό ολοκλήρωμα) οι οποίες αθροιζόμενες δίνουν τη γενική λύση της εξίσωσης $m\ddot{x} = F(t)$.

Αν και φορμαλιστικά η λύση ενός τέτοιου χρονοεξαρτώμενου προβλήματος δεν μοιάζει ιδιαίτερα πολύπλοκη, η παρουσία του διπλού ολοκληρώματος δυσχεραίνει από τεχνικής άποψης τον υπολογισμό της λύσης. Θα μάθουμε λίγο αργότερα πώς να επιλύουμε τέτοιου είδους προβλήματα με τη χρήση μονάχα ενός ολοκληρώματος, όσο και αν αυτό μοιάζει απίθανο για μια εξίσωση 2ας τάξης. Προς το παρόν θα δοκιμάσουμε να βρούμε τη λύση σε ένα συγκεκριμένο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, δίχως να επικαλεστούμε το γενικό αποτέλεσμα που γράψαμε παραπάνω, αλλά χρησιμοποιώντας άμεσα την έννοια της ώθησης.

• **Το πρόβλημα:** Ένα τρένο μάζας m προωθείται με διαδοχικές ωθήσεις σταθερής δύναμης F οι οποίες διαρκούν χρόνο τ και επαναλαμβάνονται κάθε χρονικό διάστημα $T > \tau$. Αν το τρένο ξεκινά από την ηρεμία ποιο θα είναι διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο $t >> T$;

Κάθε παλμός δύναμης προσφέρει στο τρένο ώθηση $\Omega = F\tau$, επομένως μετά από ένα τέτοιο παλμό το τρένο αυξάνει την ταχύτητά του κατά $\Omega/m = F\tau/m$. Το δε διάστημα που διανύει κατά τη διάρκεια του παλμού είναι $v_{n-1}\tau + \frac{1}{2}(F/m)\tau^2$, όπου v_{n-1} είναι η ταχύτητα που είχε αποκτήσει προτού αρχίσει να ενεργεί ο n-οστός παλμός. Στη συνέχεια κινείται ελεύθερο για χρόνο $T - \tau$ με ταχύτητα v_n, διανύοντας διάστημα $v_n(T - \tau)$. Συνολικά, από την αρχή του n-οστού παλμού μέχρι την αρχή του επόμενου το τρένο διανύει διάστημα

$$s_n = v_{n-1}\tau + \frac{F}{2m}\tau^2 + v_n(T - \tau)$$

με

$$v_n - v_{n-1} = \frac{F\tau}{m} \, .$$

Η δεύτερη αναδρομική σχέση ορίζει μια αριθμητική ακολουθία που αντιστοιχεί στο γενικό τύπο

$$v_n = \frac{nF\tau}{m} \, ,$$

αφού $v_0 = 0$. Έτσι το διάστημα που διανύει μεταξύ του n-οστού και του $(n+1)$-οστού παλμού είναι

$$s_n = \frac{F\tau}{m}\left(nT - \frac{\tau}{2}\right) .$$

Υποθέτωντας ότι $t = NT$ (δεν μας ενδιαφέρει ακριβώς σε ποια φάση μεταξύ των παλμών ανταποκρίνεται ο συνολικός χρόνος αφού $t >> T$, οπότε θα υποθέσουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T) το συνολικό διάστημα θα είναι

$$\begin{aligned} s(t) = \sum_{1}^{N-1} s_n &= \frac{F\tau}{m}\left(\frac{N(N-1)}{2}T - (N-1)\frac{\tau}{2}\right) \\ &= \frac{F\tau}{m}(N-1)\frac{t-\tau}{2} = \frac{F\tau}{m}(t/T-1)\frac{t-\tau}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν μας φέρνει στο μυαλό κάτι γνωστό για να το συγκρίνουμε. Έτσι ας λάβουμε κάποια οριακή περίπτωση που θα απλοποιήσει το αποτέλεσμα. Θα υποθέσουμε ότι οι παλμοί των ωθήσεων διαρκούν απειροελάχιστο χρόνο προσφέροντας όμως δοσμένου μέτρου ώθηση: $F\tau =$σταθ, με $\tau \to 0$. Το συνολικό διάστημα θα είναι τότε

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{F\tau}{Tm}t(t-T) \simeq \frac{1}{2}\frac{F\tau}{mT}t^2, \;\; \text{για } t >> T.$$

Το αποτέλεσμα είναι αυτό μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης εξαιτίας μιας δύναμης προώθησης $F = F\tau/T = \Omega/T$, της μέσης δηλαδή τιμής της δύναμης που θα οδηγούσε σε ίδια ώθηση.

3.2 * Συναρτήσεις δέλτα - συναρτήσεις Green

Τώρα θα γνωρίσουμε μια άλλη τεχνική η οποία θα μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα όπως αυτό ενός σωματιδίου, του οποίου γνωρίζουμε την ελεύθερη κίνηση, όταν ασκείται πάνω του κάποια χρονοεξαρτώμενη δύναμη. Προς τούτο θα χρειαστεί να ορίσουμε μια καινούργια συνάρτηση, η οποία εισήχθηκε από τον Paul Adrien Maurice Dirac [1902/1984] και πήρε στους φυσικούς και τους μαθηματικούς πολύ καιρό να την αποδεχτούν ως μια «νόμιμη» συνάρτηση. Πρόκειται για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Πλαίσιο: 1

Η συνάρτηση **δ**

Ας θεωρήσουμε την ασυνεχή συνάρτηση:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & \text{για } |t| < \epsilon/2 \,, \\ 0, & \text{για } |t| \geq \epsilon/2 \,. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε το ολοκλήρωμά της σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών να ισούται με 1 ανεξάρτητα της τιμής του ϵ (το οποίο υποθέτουμε ότι είναι κάποιος θετικός αριθμός). Το γράφημα της συνάρτησης αυτής μοιάζει με καπέλο και μάλιστα ιδιατέρως ψηλό και στενό καθώς το $\epsilon \to 0$. Θα ορίσουμε ως συνάρτηση δέλτα το όριο της παραπάνω συνάρτησης καθώς η παράμετρος ϵ τείνει στο 0:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) \; . \tag{8}$$

Προφανώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \; dt = 1 \; . \tag{9}$$

Ας δούμε το περίεργο αυτό (εξόχως ασυνεχές κατασκεύασμα) τι ιδιότητες έχει. Μόνη της μια τέτοια συνάρτηση δεν θα είχε και πολύ νόημα. Η συνάρτηση αυτή είναι παντού 0 εκτός από ένα ιδιάζον σημείο, το $t = 0$, όπου απειρίζεται κατάλληλα, έτσι ώστε να διατηρεί μοναδιαίο ολοκλήρωμα σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών. Φυσικά αφού είναι 0 σε όλα τα θετικά και τα αρνητικά t θα ισχύει και

$$\int_{\text{τυχαίος αρνητικός}}^{\text{τυχαίος θετικός}} \delta(t) \; dt = 1. \tag{10}$$

Η συνάρτηση αυτή αποκτάει νόημα αν ολοκληρωθεί μαζί με κάποια άλλη συνάρτηση (είναι όπως λέμε ένα συναρτησοειδές). Το ενδιαφέρον είναι ότι τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \; dt = f(0) \tag{11}$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(t)$.[α'] Ας δούμε γιατί ισχύει η παραπάνω σχέση. Θα θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο 0:

$$f(t) \simeq f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots + f^n(0)\frac{t^n}{n!} + \ldots$$

και θα λάβουμε το ολοκλήρωμα αυτής πολλαπλασιασμένης με την $\delta_\epsilon(t)$ (και όχι με την $\delta(t)$). Θα λάβουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)[f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots] \; dt = \\ f(0) + f'(0)\frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} t \; dt + \frac{1}{2!} f''(0)\frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} t^2 \; dt + \ldots = \\ f(0) + 0 + \frac{f''(0)}{2!}\frac{\epsilon^2}{12} + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Οι επόμενοι όροι που έχουμε παραλείψει θα είναι ολοένα και μεγαλύτερης τάξης ως προς ϵ.[β'] Έτσι το όριο του ολοκληρώματος αυτού καθώς $\epsilon \to 0$ θα είναι απλώς $f(0)$. Το όριο αυτό θα είναι και το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος αν η δ_ϵ αντικατασταθεί με το όριό της, δηλαδή τη συνάρτηση δέλτα.

Η σημαντική αυτή ταυτότητα (11) που ικανοποιεί η συνάρτηση δέλτα, χρησιμοποιείται ως ο αυστηρός ορισμός της συνάρτησης δέλτα. Η κατασκευή της συνάρτησης δέλτα που φτιάξαμε και την οποία χρησιμοποιήσαμε ως όριο δεν είναι τόσο καλή όσο ο ορισμός αυτός, αφού το ορθογώνιο σχήμα που υποθέσαμε στην αρχική κατασκευή δεν είναι καθόλου αναγκαίο. Θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει με μια τελείως διαφορετικού σχήματος συνάρτηση (τριγωνική –όπως αρχικά την εμπνεύστηκε ο Dirac

· εξ ου και το όνομα–, ή γκαουσιανή, ή οτιδήποτε άλλο) παραμετροποιημένη κατάλληλα ώστε να έχει ολοκλήρωμα 1 ανεξαρτήτως του εύρους της.

Μια μικρή γενίκευση, ως προς το ιδιάζον σημείο, μας οδηγεί στον πλήρη ορισμό της δέλτα $\delta(t-t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0), \tag{13}$$

για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο σημείο t_0.

[α΄] Αρκεί η συνάρτηση αυτή να είναι συνεχής στο 0.

[β΄] Μόνο οι άρτιας τάξης όροι θα είναι μη μηδενικοί. Τα ολοκληρώματα των περιττών συναρτήσεων θα μηδενίζονται.

Η συνάρτηση $\delta(t-t_0)$ ως αναπαράσταση μιας χρονοεξαρτώμενης δύναμης θα αντιστοιχούσε σε μια δύναμη μοναδιαίας ώθησης, η οποία θα δρούσε αστραπιαία τη χρονική στιγμή $t=t_0$. Αν μας ζητούσαν να υπολογίσουμε πως θα κινούνταν ένα σωματίδιο μάζας m υπό την επίδραση μιας τέτοιας δύναμης, δεν θα χρειαζόταν να κάνουμε κανένα υπολογισμό. Θα αρκούσε να συνδέσουμε δύο λύσεις ελεύθερου σωματιδίου, προ και μετά του σημείου $t=t_0$, έτσι ώστε αυτές να συνδέονται με μοναδιαία μεταβολή στην ορμή: Αν το σωματίδιο ήταν αρχικά (προτού δράσει η δύναμη) ακίνητο, μετά τη δράση της δύναμης θα κινείται με ταχύτητα $1/m$.[8] Επομένως η λύση στο πρόβλημα

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \delta(t-t_0)\ , \tag{14}$$

με δεδομένο ότι για $t\to-\infty$ είναι $x(t)=0$, θα είναι η ακόλουθη

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \le t_0\ , \\ (t-t_0)/m, & \text{για } t > t_0\ . \end{cases} \tag{15}$$

Η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί μια συνεχή ένωση δύο διαφορετικών λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Πώς είμαστε σίγουροι, όμως, ότι η κίνηση ενός σωματιδίου στο οποίο ασκείται μια τόσο αντισυμβατική δύναμη περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση; Ένας τρόπος να βεβαιωθείτε ότι η κίνηση πρέπει να είναι συνεχής είναι να δοκιμάσετε να την υπολογίσετε αν στη θέση της $\delta(t-t_0)$ βρίσκεται η πιο συμβατική $\delta_\epsilon(t-t_0)$. Στην περίπτωση αυτή μια συνεχής πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού (ομαλή επιτάχυνση) θα ενώσει την προγενέστερη λύση με τη μεταγενέστερη λύση. Στο όριο που το ϵ θα τείνει στο 0, πάλι η προγενέστερη και η μεταγενέστερη λύση θα συνδέονται συνεχώς, παρουσιάζοντας όμως τώρα ασυνέχεια στην πρώτη παράγωγο (ως αποτέλεσμα του ότι η τιμή της δ_ϵ στο $t=t_0$ θα απειρίζεται καθώς το ϵ τείνει στο 0). Αν το καλοσκεφθείτε όμως δεν θα μπορούσε η κίνηση να περιγράφεται από μια ασυνεχή συνάρτηση. Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται πάντα από μια συνεχή συνάρτηση, ακόμη και στην ακραία αυτή περίπτωση εφαρμογής δύναμης· αλλιώς, δεν θα οριζόταν η ταχύτητα και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη μορφή $F=m(dv/dt)$ θα στερούνταν νοήματος. Σκεφθείτε το

[8] Προσέξτε, αυτή η μονάδα έχει διαστάσεις ώθησης, δηλαδή ορμής.

αντίστοιχο πρόβλημα δύναμης στην περίπτωση της αριστοτέλειας μηχανικής. Ποια θα ήταν τότε η κίνηση υπό την επίδραση μιας δύναμης τύπου δέλτα συνάρτησης;

Η λύση (15) που γράψαμε παραπάνω θα μπορούσε να λάβει μια πιο κομψή μορφή αν χρησιμοποιούσαμε το πρότυπο μιας ασυνεχούς συνάρτησης, τη συνάρτηση βήματος (γνωστή και ως συνάρτηση Heaviside):

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \leq 0\,, \\ 1, & \text{για } t > 0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Μέσω της συνάρτησης βήματος, η λύση της (14) θα λάμβανε τη μορφή

$$x(t) = \Theta(t - t_0)\frac{t - t_0}{m}\,. \tag{17}$$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τη λεγόμενη *συνάρτηση Green*[9] του γενικότερου προβλήματος

$$m\ddot{x} = F(t)\,, \tag{18}$$

δηλαδή η λύση του προβλήματος αυτού, αν αντικαταστήσουμε την $F(t)$ με την $\delta(t - t_0)$. Τη λύση αυτή θα τη συμβολίσουμε $x_G(t; t_0)$ αφού αναφέρεται σε ένα πρόβλημα με παράμετρο την t_0. Το ενδιαφέρον είναι πως αν γνωρίζουμε τη λύση σε αυτό το πρόβλημα με τη δέλτα συνάρτηση στο δεξί μέλος, μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύ εύκολα και τη λύση του γενικότερου προβλήματος (18). Ας δούμε πώς. Αρχικά θα κατασκευάσουμε τη συνάρτηση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, x_G(t; \tau)\, d\tau\,. \tag{19}$$

Θα δείξουμε ότι αυτή είναι η ζητούμενη λύση. Πράγματι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, m\, \ddot{x}_G(t; \tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau \\ &= F(t)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα περάσαμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο εντός του ολοκληρώματος, ώστε αυτή να δράσει στη μοναδική συνάρτηση που εξαρτάται από το t, την x_G, ενώ στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη βασική ιδιότητα (ή ορισμό) της συνάρτησης δέλτα (βλ. σχέση (13)).

[9] Ο βρετανός μαθηματικός και φυσικός George Green [1793/1841] ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την τεχνική αυτή για να επιλύσει τις γραμμικές εξισώσεις που ικανοποιεί το ηλεκρικό δυναμικό εξαιτίας κάποιας κατανομής φορτίων. Στο έργο του, το πρώτο που οικοδόμησε μια μαθηματική θεωρία για τον ηλεκτρομαγνητισμό, στηρίχθηκε αργότερα ο James Clerk Maxwell [1831/1879].

Παρατηρούμε ότι η κατασκευή (19), η οποία δίνεται με τη μορφή ενός μόνο ολοκληρώματος, λύνει την 2ας τάξης διαφορική εξίσωση του Νεύτωνα, δίνοντας την ειδική λύση της (χωρίς το ομογενές μέρος: $x(0) + v(0)t$). Η κάπως παράδοξη αυτή λύση βασίζεται στην πρότερη κατασκευή της αντίστοιχης συνάρτησης Green του προβλήματος, δηλαδή την (17). Θα έλεγε ίσως κανείς ότι ανταλλάξαμε τη δυσκολία του διπλού ολοκληρώματος με αυτήν της κατασκευής μιας δύσκολης συνάρτησης. Σκεφθείτε, όμως, ότι η εύρεση της συνάρτησης Green δεν ήταν και τόσο δύσκολη· ήταν απλώς ένα κατάλληλο «κόλλημα» ομογενών λύσεων έτσι ώστε η κλίση δεξιά και αριστερά από το t_0 να διαφέρει κατά $1/m$.

Η τεχνική επίλυσης δύσκολων προβλημάτων μέσω συναρτήσεων Green εφαρμόζεται σε προβλήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις των οποίων το ομογενές κομμάτι αποτελείται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση, γεγονός πολύ συχνό σε φυσικά προβλήματα. Η εύρεση της αντίστοιχης συνάρτησης Green είναι εξαιρετικά απλή αφού αυτή αποτελείται από λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης[10] κατάλληλα διαλεγμένες και συκολλημένες ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια και η προκαθορισμένη ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου. Έτσι όχι μόνο στη Μηχανική, αλλά και στον Ηλεκτρομαγνητισμό (όπου οι εξίσωσεις του Maxwell χωρίς πηγές είναι γραμμικές ως προς τα πεδία) αλλά και στην Κβαντομηχανική (όπου η εξίσωση του Scr'odinger είναι θεμελιωδώς γραμμική), η επίλυση προβλημάτων με τη χρήση συναρτήσεων Green είναι εξαιρετικά χρήσιμη.

3.3 Δυνάμεις με αμιγή εξάρτηση από την ταχύτητα

Η περίπτωση αυτή είναι ίσως η πιο άμεσα επιλύσιμη, αφού ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση όσον αφορά στην ταχύτητα:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \tag{21}$$

με λύση

$$v(t) = G^{-1}[G(v_0) + t/m] \tag{22}$$

όπου G είναι η παράγουσα συνάρτηση της $1/F$, δηλαδή $G' = 1/F$ και G^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της G. Στη συνέχεια με μια ακόμη ολοκλήρωση μπορούμε να υπολογίσουμε και την εξέλιξη της θέσης.

Ως παράδειγμα τέτοιας δύναμης θα θεωρήσουμε την αντίσταση κίνησης μέσα σε ένα μέσο, η οποία θα υποθέσουμε ότι έχει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα.[11] Το φυσικό μας παράδειγμα θα είναι ένα σώμα το οποίο πέφτει στο ομογενές βαρυτικό πεδίο, αλλά δέχεται από

[10] Περισσότερα στοιχεία για τις γραμμικές εξισώσεις καθώς και τις λύσεις τους θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 5.

[11] Η παραδοχή αυτή είναι αρκετά ακριβής για κινήσεις μέσα σε ένα μέσο με ταχύτητες πολύ κατώτερες της υπερηχητικής. Γενικότερα, η δύναμη της αντίστασης μπορεί να εκφραστεί φαινομενολογικά ως μια δύναμη της ταχύτητας με εκθέτη που εξαρτάται από το μέγεθος της ταχύτητας.

τον αέρα αντίσταση της μορφής $-kv$ (για παράδειγμα ένας αλεξιπτωτιστής με ανοιγμένο αλεξίπτωτο). Ο συντελεστής k που χαρακτηρίζει το αλεξίπτωτο είναι θετικός (αφού η δύναμη είναι δύναμη αντίστασης) και έχει διαστάσεις [μάζα/χρόνο]. Η εξίσωση κίνησης λοιπόν είναι

$$m\dot{v} = mg - kv \to \dot{v} = g - \frac{k}{m}v \; , \tag{23}$$

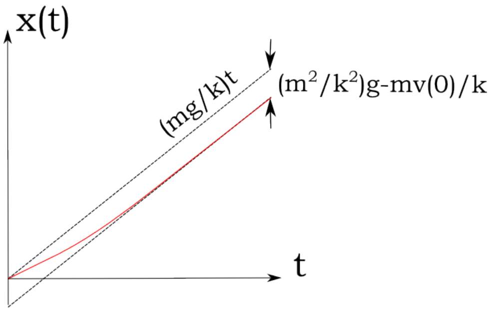
όπου θεωρήσαμε την προς τα κάτω φορά ως θετική. Φυσικά, το πρόσημο της αντίστασης δεν επηρεάζεται από τη σύμβαση της φοράς· η αντίσταση είναι πάντα αντίθετη με την ταχύτητα. Η ολοκλήρωση της σχέσης αυτής, μετά το διαχωρισμό των μεταβλητών οδηγεί στην ακόλουθη εξέλιξη της ταχύτητας

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg - kv(0)}{k}e^{-kt/m} \; , \text{ή } \; v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) + v(0)e^{-kt/m}. \tag{24}$$

Αν και η πρώτη μορφή μας διευκολύνει να «δούμε» αμέσως τη συμπεριφορά της ταχύτητας (η ταχύτητα οδεύει πολύ γρήγορα στην οριακή της τιμή mg/k), η δεύτερη μορφή μας υπενθυμίζει ότι η οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, $v(0)$, του προβλήματος τελικά θα ξεχαστεί. Το σωματίδιο σε χρόνο όσο μερικές φορές τη χαρακτριστική κλίμακα χρόνου του προβλήματος ($\tau = m/k$) θα «συναντήσει» την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης, ενώ η ομογενής λύση με τις παραμέτρους της (εδώ την $v(0)$) δεν θα αλλοιώσει το «τελικό» αποτέλεσμα. Αν μάλιστα αγνοήσουμε και το εκθετικό μέρος της ειδικής λύσης (μιας και αυτό θα σβήσει γρήγορα), το αποτέλεσμα θυμίζει την αριστοτέλεια μηχανική: στον αλεξιπτωτιστή ασκείται το βάρος του ενώ η ταχύτητα που θα κινείται τελικά αυτός είναι ανάλογη του βάρους του. Αντιπαραβάλετε το αποτέλεσμα αυτό με τα λόγια του Αριστοτέλη, ο οποίος απ΄ ότι φαίνεται εκτέλεσε πειράματα με κίνηση στερεών σωμάτων μέσα σε νερό:

«... Και αν η αυτή δύναμη μεταφέρει μέσα σε ορισμένο χρόνο το αυτό αντικείμενο σε αυτήν εδώ την ορισμένη απόσταση, για να το μεταφέρει στο μισό της απόστασης χρειάζεται το μισό του χρόνου...»

Φυσική Ακρόασις, βιβλίο Η΄, κεφ. 5, 250α., μτφρ. Κ. Δ. Γεωργούλης



Σχήμα 1: Η κίνηση ενός αλεξιπτωτιστή.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην εύρεση της διανυθείσας απόστασης.

$$x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \left(\frac{mg}{k}\right)t - \left(\frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mv(0)}{k}\right)(1 - e^{-kt/m}) \; . \tag{25}$$

Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης παρουσιάζεται στο σχήμα 1. Όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής k της αντίστασης τόσο η συνολική απόκλιση από την ομαλή κίνηση είναι μικρότερη. Κατά τ' άλλα, αν κατά τη διάρκεια της κίνησης μετράει κανείς το διανυθέν διάστημα σε ίσα χρονικά διαστήματα και αγνοήσει το πρώτο επιταχυνόμενο τμήμα της κίνησης (το οποίο όμως διαρκεί μερικά τ), θα νομίζει ότι η κίνηση υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους είναι ομαλή. Ο Αριστοτέλης, στην εν λόγω εκτίμησή του, δεν μπορεί να κατηγορηθεί για μη ρεαλιστικές αντιλήψεις· απλώς οι μετρήσεις του δεν είχαν την απαιτούμενη ακρίβεια.

3.4 Δυνάμεις με αμιγή εξάρτηση από τη θέση

Όπως σχολιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο τυχαίνει οι θεμελιώδεις δυνάμεις του κόσμου μας να είναι δυνάμεις που εξαρτώνται από τη θέση και μόνο. Η σχετική θέση και μόνο αυτή φαίνεται να επηρρεάζει την ένταση της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων, είτε αυτά αλληλεπιδρούν λόγω βαρύτητας είτε αυτά αλληλεπιδρούν λόγω ηλεκτρομαγνητικά. Στην περίπτωση αυτή είναι πιο δύσκολο να ολοκληρώσει κανείς άμεσα τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = F(x) \; .$$

Ο διαχωρισμός των μεταβλητών δεν είναι εφικτός. Θα ακολουθήσουμε λοιπόν το ακόλουθο «τρυκ»: Θα πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με την ταχύτητα του σωματιδίου $\dot{x}$:

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} - \dot{x}\,F(x) = 0 \; . \tag{26}$$

Στο πρώτο μέρος αναγνωρίζει κανείς μια τέλεια χρονική παράγωγο, αυτήν της ποσότητας $m\dot{x}^2/2$. Αλλά και το δεύτερο μέρος θα μπορούσε να γραφεί ως η χρονική παράγωγος μιας ποσότητας· της

$$V(x(t)) = -\int_{x_0}^{x(t)} F(x')\,dx' + V_0 \; ,$$

όπου V_0 κάποια σταθερά. Πράγματι

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{dx(t)}{dt}\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx'\right) = -\dot{x}F(x) \; . \tag{27}$$

Να σημειώσουμε ότι το κάτω όριο του ολοκληρώματος στον ορισμό της $V(x(t))$ υπήρξε ανενεργό κατά την παραγώγιση της V, και ως εκ τούτου αποτελεί μια αυθαίρετη παράμετρο. Το ίδιο ισχύει και για τη σταθερά V_0. Το γεγονός αυτό καθιστά τον ίδιο τον ορισμό της $V(x(t))$ κάπως αυθαίρετο και επομένως μη μοναδικό. Η ελευθερία επιλογής της παραμέτρου x_0 και της V_0 αποτελεί ένα πρώτο παράδειγμα *ελευθερίας βαθμίδας* –όπως ονομάζεται στη Φυσική–, όπου είναι κανείς ελεύθερος να επιλέγει κάποια ποσότητα ελεύθερα, χωρίς να αλλοιώνει το φυσικό περιεχόμενο ενός προβλήματος. Η τιμή της παραμέτρου x_0 ορίζει μια ρίζα της $V(x) = V_0$. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $V(x)$ ορίζεται πάντα όταν η κίνηση είναι μονοδιάστατη, αλλά πιθανή επέκταση της σε περισσότερες της μιας διαστάσεις δεν είναι πάντα δυνατή. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα από μια αρχική σε μια τελική θέση μπορεί να εξαρτάται από τη διαδρομή που επιλέγει κανείς, οπότε για να μπορεί να οριστεί η δυναμική ενέργεια σε περισσοτερες διαστάσεις απαιτούνται επιπλέον συνθήκες για τη δύναμη (βλ. Κεφάλαιο 10).

Συνολικά συνδυάζοντας τις σχέσεις (26,27) καταλήγουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\left(x(t)\right)\right] = 0 ,$$

δηλαδή καθώς το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F(x)$, όλα μπορεί να αλλάζουν (η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη), αλλά ο εν λόγω συνδυασμός φυσικών ποσοτήτων[12] παραμένει σταθερός. Δηλαδή καθώς το σωματίδιο κινείται και αλλάζει θέση και ταχύτητα, υπάρχει αυτή η περίεργη ποσότητα που την ονομάζουμε *ενέργεια* η οποία δεν αλλάζει τιμή. Το πρώτο μέρος αυτής είναι η κινητική ενέργεια, ενώ το δεύτερο η δυναμική ενέργεια. Αφού η δυναμική ενέργεια περικλείει μια αυθαίρετη παράμετρο και αυτή η ίδια η ενέργεια ενέχει τον ίδιο βαθμό αυθαιρεσίας με τη δυναμική ενέργεια.

Η διατήρηση αυτής της ποσότητας, όπως και κάθε διατήρηση δυναμικής ποσότητας που ενδεχομένως ανακαλύψουμε σε κάποιο πρόβλημα Φυσικής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να υποβιβάσουμε την τάξη της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κίνηση του σωματιδίου. Συγκεκριμένα λύνοντας την

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

ως προς την ταχύτητα μπορούμε να γνωρίζουμε πώς αλλάζει αυτή ως συνάρτηση της θέσης:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} .$$

Αυτή είναι μια πρωτοτάξια εξίσωση, η οποία με μια επιπλέον ολοκλήρωση μπορεί να οδηγήσει στην $x(t)$. Προτού ασχοληθούμε με τις δυνατές περιπτώσεις για την $V(x)$ και την αντίστοιχη επίλυση της κίνησης ας κάνουμε δύο παρατηρήσεις:

• Αφού η κινητική ενέργεια είανι εξ΄ορισμού θετική ποσότητα, η δυναμική ενέργεια $V(x)$ πρέπει να έχει τιμή μικρότερη ή το πολύ ίση με τη συνολική ενέργεια E για να μπορεί το σωματίδιο να υπάρχει (να κινείται ή να είναι ακίνητο). Αυτό αμέσως οδηγεί στις επιτρεπτές περιοχές κίνησης για ένα σωματίδιο.

• Ένα σωματίδιο κινούμενο, καθώς περνά από μια θέση, μπορούμε να ξέρουμε το μέτρο της ταχύτητάς του αλλά όχι κατ΄ ανάγκη και τη φορά της κίνησής του. Έτσι αν ένα σωματίδιο κινούμενο υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $F(x)$ εκτελεί για κάποιο λόγο ταλάντωση, θα διασχίζει πάντα το ίδιο σημείο με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα, είτε κινούμενο προς τα δεξιά, είτε προς τα αριστερά.

Κλείνοντας τη συζήτηση σχετικά με τον πολύ σημαντικό αυτό τύπο δύναμης, θα ήταν πρέπον να σημειώσουμε ότι η έννοια της δυναμικής ενέργειας η οποία στη νευτώνεια μηχανική

[12]Μάλλον θα έπρεπε να τις αποκαλέσουμε μαθηματικές ποσότητες, αφού προέκυψαν ως αποτέλεσμα επεξεργασίας του 2ου νόμου του Νεύτωνα ώστε να προκύψει μια σταθερή ποσότητα. Όμως στις ποσότητες αυτές που προέκυψαν αναγνωρίζουμε τις γνωστές μας κινητική και δυναμική ενέργεια, τις οποίες έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως πολύ σημαντικές φυσικές ποσότητες. Τα όρια μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής είναι πιο θολά απ΄ ότι ίσως νομίζουμε.

προέκυψε κατασκευαστικά ως ποσότητα παραγόμενη από τη δύναμη, στην κβαντομηχανική η δυναμική ενέργεια είναι αυτή που παίζει θεμελιώδη ρόλο, αφού το σωματίδιο δεν νοείται ως υλικό σώμα με συγκεκριμένη θέση που εκτελεί συγκεκριμένη κίνηση υπό την επίδραση κάποιας δύναμης, αλλά ως σώμα το οποίο «ζει» εντός κάποιου πεδίου, συμπεριφερόμενο... κβαντομηχανικά.

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο αυτό με την ανάλυση ενός προβλήματος ανάλογου με αυτό που συναντήσαμε στις χρονοεξαρτώμενες δυνάμεις, αλλά με αντίστοιχη χωροεξάρτηση. Θα υποθέσουμε ότι το τρένο που είδαμε πρωτύτερα ωθείται από παλμούς ανά χωρικό διάστημα a της μορφής

$$F(x) = Fa \sum_{j=0}^{\infty} \delta(x - ja).$$

Η δυναμική ενέργεια του τρένου (θέτοντας το 0 της στο $x = 0$) θα είναι

$$V(x) = \begin{cases} -Fa\left(\left[\frac{x}{a}\right] + 1\right), & \text{αν } x > 0\ , \\ \\ 0, & \text{αν } x \leq 0\ . \end{cases}$$

όπου $[\cdots]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος. Επομένως το τρένο θα κερδίζει κινητική ενέργεια $\Delta K = Fa$ μόλις προσπερνάει έναν παλμό δύναμης. Συνεπώς η ταχύτητα που θα έχει το τρένο όταν περάσει τον n-οστό παλμό θα είναι

$$v_n = \sqrt{\frac{2}{m} Fna}$$

και επομένως ο χρόνος διέλευσης του διαστήματος από τον n-οστό μέχρι τον $(n+1)$-οστό παλμό θα είναι

$$\tau_n = \frac{a}{v_n} = \sqrt{\frac{am}{2Fn}}\ .$$

Έτσι ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το τρένο για να καλύψει απόσταση $s_n = na$ θα είναι

$$t_n = \sqrt{\frac{am}{2F}}\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}}\ .$$

Το παραπάνω άθροισμα αν και δεν είναι δυνατό να δοθεί σε κλειστή μορφή είναι αρκετά εύκολο να προσεγγιστεί για μεγάλα n μέσω ενός ολοκληρώματος. Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της $\sqrt{1/x}$ και της $1/\sqrt{x+1}$ μπορείτε εύκολα να πειστείτε ότι

$$\int_1^n \frac{dy}{\sqrt{y+1}} < \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}} < \int_1^n \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι κάτι ανάμεσα σε $2(\sqrt{n}-1)$ και $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})$, οπότε για μεγάλα n μπορούμε να καταλήξουμε στο προσεγγιστικό αποτέλεσμα

$$t_n = \sqrt{\frac{am}{2F}}(2\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2am}{F}}\sqrt{\frac{s_n}{a}},$$

δηλαδή η σχέση διαστήματος χρόνου θα είναι

$$s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2,$$

όση ακριβώς και η κλασική περίπτωση κίνησης υπό σταθερή δύναμη!

Είτε το τρένο λοιπόν ωθείται με περιοδικούς παλμούς δυνάμεων σταθερής ώθησης, είτε με παλμούς δύναμης σταθερού έργου ανά σταθερό μήκος η κίνηση είναι κατά προσέγγιση ομαλά επιταχυνόμενη. Η εξάρτηση όμως από το πλήθος των παλμών είναι σαφώς διαφορετική. Αν η κατασκευή παλμών, είτε της μιας μορφής είτε της άλλης, είχαν το ίδιο οικονομικό κόστος, ποιον τύπο παλμών θα προτιμούσατε για να αποκτήσει το τρένο κάποια συγκεκριμένη ταχύτητα;

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 3

- Η έννοια της συμμετρίας στη Φυσική.
- Οι θεμελιώδεις δυνάμεις παρουσιάζουν ομογένεια ως προς το χώρο (ανεξαρτησία σε μεταθέσεις), ισοτροπία (ανεξαρτησία σε αλλαγές προσανατολισμού), ομογένεια ως προς το χρόνο (ανεξαρτησία σε μεταθέσεις στο χρόνο), κατοπτρική συμμετρία στο χρόνο (το ανάλογο της ισοτροπίας στο βέλος του χρόνου), γαλιλαϊκή συμμετρία (ανεξαρτησία σε αλλαγή της ταχύτητας). Οι συμμετρίες αυτές κληροδοτούνται και στο ίδιο το Σύμπαν.
- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να κατασκευαστεί από τις παραπάνω συμμετρίες.
- Στις περιπτώσεις δυνάμεων $F(t), F(v), F(x)$ ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα οδηγεί εύκολα σε αναλυτική λύση αναφορικά με την κίνηση.
- Ειδικά η περίπτωση $F(x)$ οδηγεί στη διατήρηση μιας ποσότητας που αναγνωρίζεται ως η ενέργεια του σωματιδίου.