Κεφάλαιο 2
Δυνάμεις και κίνηση

1 Τα όρια ισχύος της νευτώνειας μηχανικής

Θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι η νευτώνεια μηχανική είναι πλέον μια παλιά, ξεπερασμένη και, εν τέλει λανθασμένη, θεωρία, αφού καινούριες θεωρίες, που διατυπώθηκαν και ελέγχθηκαν διεξοδικά με πειράματα και παρατηρήσεις κατά τον 20ο αιώνα, δίνουν μια πιο σωστή και ακριβή περιγραφή του φυσικού μας κόσμου. Μήπως λοιπόν δεν έχει νόημα να ασχολείται κανείς σήμερα με τη νευτώνεια μηχανική;

Μια τέτοια αντιμετώπιση είναι βαθιά εσφαλμένη για πολλούς λόγους: Καταρχάς, η καθημερινή πρακτική αντιμετώπιση τεχνικών προβλημάτων βρίσκεται σε καταπληκτική συμφωνία με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής. Σε κάθε αντικείμενο που βρίσκεται σε κίνηση γύρω μας, οι νευτώνειοι νόμοι «δουλεύουν» απολύτως σωστά (στα πλαίσια της ακρίβειας που εξυπηρετεί τις καθημερινές εφαρμογές). Μάλιστα όχι μόνο τα μηχανήματα καθημερινής χρήσης, αλλά ακόμη και οι συσκευές προηγμένης τεχνολογίας, όπως τα διαστημόπλοια και άλλες διαστημικές συσκευές υπακούουν και αυτά πιστά στους νευτώνειους νόμους (οι επιστήμονες και οι μηχανικοί που σχεδιάζουν πτήσεις στο διάστημα εκτελούν όλους τους υπολογισμούς των τροχιών των διαστημοπλοίων βασιζόμενοι στη νευτώνεια μηχανική).[1] Το ίδιο το πλανητικό μας σύστημα, αλλά και οι γαλαξίες που μας περιβάλλουν κινούνται νευτώνεια με εξαιρετικά μεγάλη ακρίβεια.[2] Ύστερα από όλα αυτά θα ήταν μάλλον άδικο να θεωρήσουμε τη νευτώνεια μηχανική ξεπερασμένη.

Παράλληλα, όπως κάθε καινούρια θεωρία, έτσι και η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια περιοχή ισχύος, πέραν της οποίας αρχίζει να δίνει εσφαλμένα αποτελέσματα. Η αμέσως επόμενη θεωρία που έρχεται να καλύψει τα λάθη της προηγούμενης, επεκτείνοντας έτσι την περιοχή ισχύος της πρώτης, μπορεί βέβαια να προσφέρει μια εντελώς ριζοσπαστική εικόνα —σε σχέση με την προηγούμενη θεωρία— για το πώς λειτουργεί η φύση· εντούτοις, στην περιοχή ισχύος της αρχικής θεωρίας και οι δύο θεωρίες δίνουν ταυτόσημες προβλέψεις. Διευρύνοντας, μέσω καινούριων θεωριών, την περιοχή ισχύος των φυσικών νόμων μπορεί η αντίληψη που αποκτούμε για τον κόσμο που μας περιβάλλει να αλλάζει δραστικά, οι διορθώσεις όμως των προβλέψεων για ένα μεγάλο ποσοστό του φυσικού μας κόσμου καθίστανται ολοένα και μικρότερες. Υπό αυτή την έννοια λοιπόν, οι θεωρίες μοιάζουν να συγκλίνουν γρήγορα, σαν τους όρους μιας

[1] Πιθανώς εδώ θα έπρεπε να σημειώσουμε ότι τα διαστημικά συστήματα γεωγραφικού εντοπισμού, προκειμένου να είναι συγχρονισμένα και να μπορούν, έτσι, να δώσουν αρκετά μεγάλη ακρίβεια στον εντοπισμό μιας θέσης πάνω στη Γη, χρειάζεται να εκτελούν σχετικιστικές διορθώσεις στα ρολόγια τους. Εντούτοις οι κινήσεις τους αυτές καθεαυτές μελετώνται και σχεδιάζονται αποκλειστικά βάσει της νευτώνειας μηχανικής· μόνο η μέθοδος προσδιορισμού της στιγμιαίας θέσης τους απαιτεί μη νευτώνειες διορθώσεις.

[2] Η τροχιά του πλανήτη Ερμή διαφοροποιείται από τις προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής κατά μόλις 43 δευτερόλεπτα τόξου ανά αιώνα!

σειράς με πολύ γρήγορη σύγκλιση.[3] Στα όρια ισχύος λοιπόν της νευτώνειας μηχανικής (δηλαδή (i) για ταχύτητες μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, (ii) για μακροσκοπικά σώματα με πυκνότητα πολύ μικρότερη της πυρηνικής, με άλλα λόγια για όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες σήμερα, καθώς και (iii) για σώματα μεγάλα συγκριτικά με τις ατομικές διαστάσεις) η νευτώνεια μηχανική είναι μια απολύτως ορθή θεωρία, εφόσον δίνει ακριβείς προβλέψεις.[4]

Η νευτώνεια μηχανική, ως η πρώτη ιστορικά δυναμική θεωρία που προσπάθησε να ερμηνεύσει σωστά τη φύση, και μάλιστα με αξιοθαύμαστη επιτυχία για αρκετούς αιώνες, έχει σημασία να μελετηθεί ώστε να γνωρίσει κανείς τον πλούτο των αποτελεσμάτων της, καθώς και την ώθηση που έδωσε στην επιστημονική κοινότητα να προχωρήσει σε γενικεύσεις της θεωρίας διαμορφώνοντάς την σε μια πιο ευέλικτη, πρακτικά, μορφή (Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή θεώρηση). Η νέα αυτή μορφοποίηση που πήρε η νευτώνεια θεωρία, στους αιώνες που ακολούθησαν το Νεύτωνα, έδωσε τη δυνατότητα να αναπτυχθεί ένα πιο ευρύ πλαίσιο, κατάλληλο να οικοδομηθούν μεταγενέστερες θεωρίες (θεωρίες πεδίου).

Από εκπαιδευτική άποψη η νευτώνεια θεωρία προσφέρει ίσως το πλέον κατάλληλο πλαίσιο σε έναν εκκολαπτόμενο φυσικό να ασκήσει τη φυσική του διαίσθηση και να «χτίσει» βασικές φυσικές έννοιες, τις οποίες μπορεί εύκολα να συσχετίσει με την καθημερινή του εμπειρία από το φυσικό κόσμο που τον περιβάλλει.

2 Περί θεμελιωδών νόμων και δυνάμεων

Σε αντιδιαστολή με τους νόμους του Κέπλερ, στους νόμους του Νεύτωνα διακρίνει κανείς άμεσα μια πολύ πιο θεμελιώδη μορφή. Ενώ οι νόμοι του Κέπλερ αναφέρονται μόνο στο ηλιακό μας σύστημα,[5] οι νόμοι του Νεύτωνα διατείνονται ότι έχουν καθολική ισχύ. Ακόμη, ενώ οι νόμοι του Κέπλερ, εγείρουν αυθόρμητα ερωτήματα, όπως «ποιο είναι το αίτιο αυτών των νόμων;» με τους νόμους του Νεύτωνα φαίνεται να καταλήγουμε στο βαθύτερο σημείο του πώς δουλεύει η φύση, δίχως να μας δίνεται η δυνατότητα να προχωρήσουμε σε ακόμη βαθύτερα «γιατί;» Όταν μάλιστα φτάσουμε να κατασκευάσουμε αργότερα το 2ο νόμο του Νεύτωνα καθώς και τον 3ο από στοιχειώδεις συμμετρίες που θα υποθέσουμε ότι διαθέτει η φύση (σύμφωνα με τις

[3] Στο βιβλίο του K. S. Thorne «*Μαύρες Τρύπες και Στρεβλώσεις του Χρόνου*» (Εκδ. Κάτοπτρο), μπορεί κανείς να διαβάσει στο τελευταίο εδάφιο του Κεφαλαίου 1 με τίτλο «Η φύση του φυσικού νόμου» μια εκτενέστερη ανάλυση της διαδοχής των θεωριών και τη σύγκλιση των προβλέψεων τους.

[4] Σε ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας προσφέρεται ως καταλληλότερο πλαίσιο ανάλυσης. Για σώματα που έχουν γίνει εξαιρετικά συμπαγή, τόσο όσο οι αστέρες νετρονίων ή και ακόμη περισσότερο, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δίνει σημαντικές διορθώσεις στις αντίστοιχες προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής. Τέλος για σώματα με διαστάσεις πλησίον των ατομικών, ένας νέος φυσικός κόσμος, αυτός της Κβαντομηχανικής, παρουσιάζεται. Ο κόσμος αυτός διέπεται από φυσικούς νόμους με τους οποίους η νευτώνεια μηχανική έρχεται σε ισχυρή αντίθεση.

[5] Στην πραγματικότητα οι νόμοι του Κέπλερ ισχύουν σε κάθε βαρυτικό σύστημα που αποτελείται από μια κυρίαρχη κεντρική σφαιρική μάζα και από άλλες μικρότερες· για παράδειγμα οι ίδιοι νόμοι του Κέπλερ ικανοποιούνται και από τους δορυφόρους του Δία, με τον 3ο νόμο να συσχετίζει τους αντίστοιχους λόγους ημιαξόνων-περιόδων όλων των δορυφόρων μεταξύ τους.

παρατηρήσεις μας αλλά και με την πεποίθησή μας ότι ο κόσμος γύρω μας είναι κατ' ουσίαν πολύ απλός), θα προσεγγίσουμε ακόμη περισσότερο τη θεμελιακότητα των νευτώνειων νόμων, αφού οι συγκεκριμένες συμμετρίες του Σύμπαντος αγγίζουν τα όρια της απλότητας, όσον αφορά στην περιγραφή του κόσμου.

Μια αντίστοιχη διάκριση σε θεμελιώδεις και μη, μπορούμε να έχουμε και για τις κάθε λογής δυνάμεις που δρουν στα διάφορα σώματα και αλλάζουν την κινητική τους κατάσταση. Στην απέραντη λίστα των βαρυτικών, πυρηνικών, ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, δυνάμεων τριβής, δυνάμεων εξαιτίας παραμόρφωσης, αντιστάσεων λόγω κίνησης μέσα σε συνεχή μέσα, φυγοκέντρων δυνάμεων, κλπ., υπάρχουν άραγε κάποιες ιδιαίτερες δυνάμεις που ξεχωρίζουν ως προς το ότι περιγράφουν σε όσο το δυνατό πιο θεμελιώδες επίπεδο τις αλληλεπιδράσεις της ύλης;

Η βαρυτική, για παράδειγμα, δύναμη, η οποία περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημειακών μαζών ως συνάρτηση της μάζας αυτών και της απόστασης που τις χωρίζει, εκτός του ότι έχει καθολική ισχύ και έχει ελεγχθεί ότι ισχύει με εξαιρετική ακρίβεια από τους μακρινούς αστέρες μέχρι μικροσκοπικά σφαιρίδια, δεν μπορεί να τεθεί σε πιο στοιχειώδη ανάλυση (εκτός ίσως αν καταφύγει κανείς σε θεωρίες πεδίου εισάγοντας σωματίδια-φορείς της βαρυτικής αλληλεπίδρασης).[6]

Αντίθετα, η δύναμη της τριβής, την οποία μαθαίνει κανείς να γράφει ως μια σταθερά, εξαρτώμενη από τις επιφάνειες επαφής, επί την κάθετη δύναμη η οποία πιέζει το ένα ολισθαίνον σώμα επάνω στο άλλο, δεν έχει την ίδια θεμελιακή προέλευση με τη βαρύτητα. Αν ερευνήσει κανείς λίγο πιο προσεκτικά την προέλευσή της, θα δει ότι αυτό που αποκαλούμε τριβή είναι το στατιστικό αποτέλεσμα δυνάμεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των επιφανειακών κυρίως μορίων των υλικών που έρχονται σε επαφή. Η τραχύτητα των επιφανειών δεν είναι αρκετή να περιγράψει ικανοποιητικά την τριβή, αφού αυτό που συμβαίνει δεν είναι ότι οι κορυφές και οι κοιλάδες της μιας επιφάνειας σύρονται επάνω στις κορυφές και τις κοιλάδες της άλλης ανεβοκατεβάζοντας (σε μικροσκοπικό επίπεδο) τελικά το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο. Αν πράγματι συνέβαινε κάτι τέτοιο δεν θα είχε ως αποτέλεσμα τις γνωστές ενεργειακές απώλειες λόγω τριβής! Αυτό που πιο σωστά περιγράφει την τριβή είναι το διαρκές σπάσιμο και επανασύνδεση κομματιών της κάθε επιφάνειας εξαιτίας συγκρούσεων με κομμάτια της άλλης. (Για μια πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση της τριβής διαβάστε το σχετικό κεφάλαιο 12.2 του βιβλίου του Feynman «*The Feynman lectures on Physics*».)

Επίσης, οι δυνάμεις λόγω ελαστικής παραμόρφωσης ενός στερεού, όπως αυτή που μας κρατά πάνω σε μια ζυγαριά με ελατήριο, είναι παρόμοιας φύσης· πρόκειται και σε αυτή την περίπτωση για ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ γειτονικών μορίων όταν κάποιο εξωτερικό αίτιο αναγκάσει ένα στερεό να παραμορφωθεί, οδηγώντας σε αλλαγή της σχετικής απόστασης των μορίων σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας τους στον κρύσταλλο του στερεού.

Τέλος, εκτός από τις θεμελιώδεις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις βασικές φυσικές αλλη-

[6] Τα σωματίδια-φορείς της βαρύτητας, γνωστά ως βαρυτόνια (gravitons), είναι υποθετικά σωματίδια με κατάλληλα χαρακτηριστικά, τα οποία στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας πεδίου ανταλλάσσονται μεταξύ των σωματιδίων, οδηγώντας τα σε έλξη.

λεπιδράσεις και τις δυνάμεις που προκύπτουν ως στατιστικό σύνολο τέτοιων θεμελιωδών δυνάμεων, υπάρχουν και οι ψευδοδυνάμεις· δυνάμεις οι οποίες κάνουν την εμφάνιση τους όταν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς (βλ. Κεφάλαιο 1). Κλασσικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η φυγόκεντρος δύναμη η οποία εμφανίζεται σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Κατ' ουσίαν τέτοιες δυνάμεις δεν υφίστανται· είναι απλώς τεχνητές δυνάμεις που εμφανίζονται ως «ψευδαίσθηση» πραγματικών δυνάμεων σε μη αδρανειακούς παρατηρητές, ακριβώς επειδή είναι μη αδρανειακοί. Αποκτούν το ρόλο δυνάμεων, αν επιχειρήσει να γράψει κανείς τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε ένα μη αδρανειακό σύστημα.

Το Σύμπαν που θα οικοδομούνταν από σωματίδια τα οποία θα αλληλεπιδρούσαν με θεμελιώδεις δυνάμεις θα ήταν αναμενόμενο να κληρονομεί τις συμμετρίες των ίδιων αυτών θεμελιωδών δυνάμεων. Από παρατηρήσεις διαπιστώνουμε ότι το Σύμπαν είναι σε εξαιρετικό βαθμό *ομογενές* (φαίνεται να έχει την ίδια πυκνότητα σμηνών γαλαξιών σε όλη του την έκταση) και *ισότροπο* (όλες οι κατευθύνσεις στο Σύμπαν δείχνουν να έχουν ίδια κατανομή σμηνών γαλαξιών).[7] Επιπλέον το Σύμπαν μας δείχνει να είναι ομογενές και ως προς το χρόνο[8] (τουλάχιστον σε χρονικές κλίμακες μικρές σε σχέση με τις κοσμολογικές). Η έλλειψη μιας τέτοιας συμμετρίας θα έδινε άλλο νόημα στο χρόνο και ο Νεύτωνας δεν θα μπορούσε να τον περιγράψει ως «*απόλυτο, πραγματικό, αντικειμενικό,*[9] *που πηγάζει από την ίδια του τη φύση και ρέει ομοιόμορφα, ανεπηρέαστος από καθετί εξωτερικό...*» στο έργο του Principia. Υπάρχει όμως ακόμη μια συμμετρία του κόσμου μας, κάπως πιο περίτεχνα κρυμμένη στη δυναμική του Σύμπαντος: πρόκειται για τη γαλιλαϊκή συμμετρία σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί νόμοι δεν αλλάζουν αν προσπαθήσουμε να τους περιγράψουμε σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (περισσότερα σχετικά με τις συμμετρίες των φυσικών νόμων θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο).

Όλες αυτές οι συμμετρίες θα πρέπει να εμπεριέχονται με κάποιο τρόπο και στη μορφή των θεμελιωδών δυνάμεων προκειμένου να κληροδοτηθούν στο Σύμπαν. Οι νόμοι δηλαδή που περιγράφουν αυτές τις δυνάμεις δεν θα πρέπει να εξαρτώνται ούτε από τη θέση στο Σύμπαν που κατέχει το καθένα χωριστά από τα αλληλεπιδρώντα σώματα, ούτε από τη διεύθυνση που έχει η ευθεία που τα συνδέει, ούτε από την ταχύτητα που έχει το καθένα από αυτά, ούτε φυσικά και από τη χρονική στιγμή· σε διαφορετική περίπτωση οι φυσικοί θα βρίσκονταν σε πολύ δύσκολη θέση, αφού οι φυσικοί νόμοι θα ήταν κάθε μέρα διαφορετικοί! Συνεπώς όλες οι θεμελιώδεις

[7]Προφανώς αυτή η ομογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος νοείται σε πολύ μεγάλη κλίμακα, σε κλίμακα πέραν αυτής των σμηνών γαλαξιών. Στην περιοχή του Γαλαξία μας, για παράδειγμα, επικρατεί το βαρυτικό πεδίο του ίδιου του Γαλαξία, σε αντίθεση με κάποια περιοχή ανάμεσα στους γαλαξίες, οπότε στην κλίμακα γαλαξιακών αποστάσεων δεν υπάρχει και πολύ μεγάλη ομογένεια –έχουμε τεράστιες συγκεντρώσεις μαζών στην μια περιοχή του χώρου και εξαιρετικά αραιές συγκεντρώσεις σε άλλη. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των ουρανίων σωμάτων έχει «σπάσει» την ομογένεια με το πέρασμα του χρόνου, δημιουργώντας τοπικές συμπυκνώσεις μαζών. Επίσης εξαιτίας της δισκοειδούς μορφής του Γαλαξία μας δεν είναι όλες οι κατευθύνσεις στο χώρο ισοδύναμες, εντός του Γαλαξία. Αν όμως μεταφερθεί κανείς σε πολύ μεγαλύτερη κλίμακα η πυκνότητα των γαλαξιών είναι και σταθερή και ισοτροπικά κατανεμημένη.

[8]Η ομογένεια του χρόνου σημαίνει ότι ένα πείραμα θα έχει την ίδια έκβαση ανεξαρτήτως του πότε αυτό διεξήχθη.

[9]Ο Νεύτωνας τον αποκαλει μαθηματικό.

δυνάμεις μεταξύ υλικών σωματιδίων θα όφειλαν να έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\mathbf{F}_{\theta\varepsilon\mu} = \mathbf{F}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}, \theta_{\widehat{\mathbf{rv}}}) \ , \tag{1}$$

όπου $\theta_{\widehat{\mathbf{rv}}}$ είναι η γωνία μεταξύ της σχετικής θέσης $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$, και της σχετικής ταχύτητας $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματίων. Ειδικότερα η βαρυτική δύναμη, δεν φαίνεται πειραματικά να εξαρτάται από την σχετική κίνηση δύο μαζών, παρά μόνο από την μεταξύ τους απόσταση και αυτό είναι απ' ότι φαίνεται γενικός νόμος για τις θεμελιώδεις δυνάμεις της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού:

$$\mathbf{F}_{\beta\alpha\rho/\mathrm{HM}} = \mathbf{F}_{\beta\alpha\rho/\mathrm{HM}}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \ . \tag{2}$$

Πρόβλημα: 1

Υποθέτωντας ότι ο χώρος που ζούμε είναι τρισδιάστατος και ότι κάθε διάνυσμα σε αυτό το χώρο μπορεί να αναλυθεί σε μια βάση 3 ανεξάρτητων διανυσμάτων, δείξτε ότι η γενικότερη διανυσματική μορφή που μπορεί να έχει μια θεμελιώδης δύναμη αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων, η οποία σέβεται τις συμμετρίες του Σύμπαντος θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$\mathbf{F}_{\theta\varepsilon\mu} = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) f_r + (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) f_v + (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \times (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) f_{rv} \tag{3}$$

όπου f_r, f_v, f_{rv} είναι βαθμωτές συναρτήσεις των $|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|, |\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}|, \theta_{\widehat{\mathbf{rv}}}$. Αν θέλουμε, επιπλέον, η δύναμη αυτή να είναι συμβατή με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, δείξτε ότι ο τελευταίος όρος (αυτός με το εξωτερικό γινόμενο) δεν θα πρέπει να υπάρχει.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών φορτίων, όπου οι μεταξύ τους μαγνητικές δυνάμεις εξαρτώνται και από την σχετική ταχύτητα που κινούνται αυτά, καταλαβαίνει κανείς ότι μόνο στο πλαίσιο της σχετικιστικής θεώρησης μπορεί να μελετήσει τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.[10] Στο σχετικιστικό πλαίσιο θεώρησης (το μοναδικό πλαίσιο όπου μπορούν να υπολογιστούν σωστά χωρίς προβλήματα αντίφασης οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις), η ταχύτητα μπορεί να ρυθμιστεί ως κατάλληλη χωροχρονική στροφή του συστήματος αναφοράς η οποία συνδιαμορφώνει καταλλήλως τις συνιστώσες του λεγόμενου τανυστή[11] του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή αυτά που έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Έτσι η βασική αλληλεπίδραση δύο φορτίων είναι απλώς η δύναμη Coulomb η οποία εξαρτάται μόνο από την μεταξύ τους απόσταση, όπως και η βαρύτητα, ενώ οι ταχυτητοεξαρτώμενες μαγνητικές δυνάμεις προκύπτουν από τη δύναμη Coulomb, με κατάλληλη επεξεργασία του χωροχρονικού πλαισίου.

[10] Δοκιμάστε να υπολογίσετε τις ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο φορτίων που κινούνται παράλληλα το ένα στο άλλο με κοινή ταχύτητα, πρώτα στο σύστημα του εργαστηρίου και στη συνέχεια στο σύστημα που τα φορτία είναι ακίνητα. Στο πρώτο σύστημα θα αναπτύσσεται και μαγνητική και ηλεκτροστατική δύναμη, ενώ στο δεύτερο σύστημα μόνο ηλεκτροστατική. Προκειμένου να είναι ισοδύναμες οι δύο περιγραφές καταλαβάνει κανείς ότι οι μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις πρέπει να ιδωθούν σε ένα ενιαίο πλαίσιο, αυτό της Ειδικής Σχετικότητας, όπου τα δύο συστήματα αναφοράς μπορούν να εκληφθούν ως κατάλληλες στροφές στο χωρόχρονο και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως ένα ενιαίο πεδίο.

[11] Ένα είδος γενίκευσης του διανύσματος, που περιέχει περισσότερες συνιστώσες από τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε.

3 Μοναδικότητα της λύσης των εξισώσεων κίνησης

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα περιγράφεται με μια διαφορική εξίσωση 2ας τάξης. Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζοντας δύο αρχικές συνθήκες (για την κάθε εξίσωση κίνησης) μπορούμε να λάβουμε τη λύση των εξισώσεων, δεδομένου του τύπου της δύναμης που διέπει το εκάστοτε σωματίδιο (είτε αυτή είναι θεμειώδης, είτε όχι). Γεννάται λοιπόν το ερώτημα: θα είναι αυτή η λύση μοναδική ή μπορεί να έχουμε μια οικογένεια λύσεων;

Δεδομένου ότι η κίνηση θα περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση και η δύναμη θα είναι και αυτή μια ομαλή συνάρτηση με πιθανή εξάρτηση από τη θέση, από την ταχύτητα και το χρόνο, θα πρέπει η θέση ως συνάρτηση του χρόνου να μπορεί να μπορεί να γραφεί με μονοσήμαντο τρόπο ως ανάπτυγμα Taylor (τουλάχιστον μέχρι κάποιο χρονικό διάστημα, εντός του οποίου, η σειρά Taylor θα συγκλίνει):[12]

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\,t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)\,t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(0)t^n + \ldots, \tag{4}$$

όπου το $x^{(n)}(t)$ δηλώνει την n-οστή χρονική παράγωγο της θέσης του σωματιδίου. Δεδομένων των δύο πρώτων όρων (μέσω των υποτιθέμενων γνωστών αρχικών συνθηκών θέσης–ταχύτητας) και του νόμου της δύναμης που καθορίζει όχι μόνο τον 3ο όρο (αυτόν της επιτάχυνσης), αλλά και κάθε άλλο ανώτερο όρο μέσω του 2ου νόμου του Νεύτωνα με κατάλληλες χρονικές παραγωγίσεις, η θέση θα καθορίζεται πλήρως και θα είναι μοναδική.

Αρκεί λοιπόν να μας δώσουν τον τύπο της δύναμης, και τις αρχικές συνθήκες και το μέλλον του σωματιδίου θα είναι πλήρως καθορισμένο. Μάλιστα όχι μόνο το μέλλον, αλλά και το παρελθόν του, αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο της μεταβλητής χρόνος ($t \to -t$). Προφανώς θα πρέπει να αλλάξουμε τότε και το πρόσημο όλων των περιττής τάξης χρονικών παραγώγων στο παραπάνω ανάπτυγμα Taylor.

Φυσικά η μοναδικότητα της λύσης δεν αλλάζει αν έχουμε περισσότερα του ενός σωματίδια τα οποία κινούνται σε έναν τριδιάστατο χώρο. Με άλλα λόγια ο μηχανικός μας κόσμος έχει προκαθορισμένο μέλλον και το μόνο που χρειάζεται για να το αποκαλύψουμε είναι η γνώση των αρχικών του συνθηκών, όπως διατείνονταν το δέκατο-ένατο αιώνα ο διάσημος γάλλος μαθηματικός Laplace. Ή μήπως όχι;

Προφανώς δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες με οσηδήποτε ακρίβεια, αν και αυτό δεν μοιάζει εκ πρώτης όψεως πολύ επικίνδυνο για τις προβλέψεις. Η τεχνολογία (ακόμη και αν αγνοήσουμε την κβαντομηχανική αρχή της αβεβαιότητας) δεν θα είναι ποτέ σε θέση να μετρήσει με απόλυτη ακρίβεια τη διαγώνιο ενός τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς και να ελέγξει αν είναι πράγματι $\sqrt{2}\cdot$ μπορεί ίσως να καταφέρει να δείξει ότι είναι ίση με τα m πρώτα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{2}$, όπου m κάποιος πεπερασμένος αριθμός. Αυτή η έλλειψη πλήρους ακρίβειας, όμως, μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στο χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης του μέλλοντος του σωματιδίου. Αν η δύναμη έχει *χαοτική*, όπως λέγεται, συμπεριφορά, ο δεκαπλασιασμός

[12] Στην παρούσα συζήτηση θα θεωρήσουμε, για διευκόλυνση, ότι έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται σε ένα χώρο μίας διάστασης.

της ακρίβειας μέτρησης των αρχικών συνθηκών (κάτι που ίσως να είναι τρομακτικά δύσκολο να υλοποιηθεί και να απαιτεί ένα μεγάλο τεχνολογικό άλμα) μπορεί να μας οδηγήσει σε μια ικανοποιητική πρόβλεψη μόλις μερικά δευτερόλεπτα πιο μπροστά στο μέλλον (αναλογιστείτε αν πράγματι θα άξιζε να το κάνει κανείς αυτό για την πρόβλεψη του καιρού). Στις διαλέξεις μας δεν πρόκειται να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τέτοιου είδους φαινόμενα που παρουσιάζουν υψηλή ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

4 Και τώρα πλέον η λύση

Τι μένει λοιπόν να κάνουμε για να βρούμε αυτή τη μοναδική λύση που περιγράφει την κίνηση των σωματιδίων; Γνωρίζοντας πλέον τους νόμους του Νεύτωνα, τι άλλο χρειαζόμαστε; Αν κάποιος μας δώσει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης –που όπως ξέρουμε εμφανίζονται κατά ζεύγη– σε ένα σύστημα σωμάτων, αρκεί να ολοκληρώσουμε το σύστημα των δευτεροτάξιων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα και ιδού η εξέλιξη του συστήματος. Ίσως συναντήσουμε τεχνικές δυσκολίες στην επίλυση των διαφορικών αυτών εξισώσεων –πράγμα μάλλον πολύ πιθανό, αν η δύναμη έχει περίπλοκη μορφή, ή τα σωματίδια είναι περισσότερα του ενός. Εντούτοις, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε πώς να λύσουμε με αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να προστρέξουμε στη βοήθεια ενός υπολογιστή. Ας δούμε πώς θα μπορούσαμε μέσω ενός υπολογιστή να υπολογίσουμε την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου.

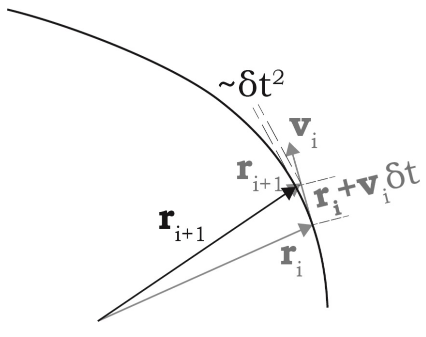
Έστω ένα σωματίδιο ευρισκόμενο τη χρονική στιγμή t στη θέση $\mathbf{r}(t)$, κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$. Ένα πολύ μικρό[13] χρονικό διάστημα δt αργότερα το σωματίδιο θα βρεθεί στη θέση

$$\mathbf{r}(t+\delta t) \simeq \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\,\delta t. \tag{5}$$

Η δε ταχύτητα του σωματιδίου θα μεταβληθεί σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και θα γίνει

$$\mathbf{v}(t+\delta t) \simeq \mathbf{v}(t) + [\mathbf{F}(t)/m]\,\delta t. \tag{6}$$

Οι προηγούμενες σχέσεις,[14] αν και προσεγγιστικές, είναι τόσο περισσότερο ακριβείς όσο



Σχήμα 1: Με γκρι διανύσματα σημειώνονται τα αριθμητικά υπολογισμένα διανύσματα, ενώ με μαύρα τα ακριβή. Το σωματίδιο κινείται εφαπτομενικά κάθε φορά στην τροχιά και όχι επί της καμπύλης τροχιάς. Το λάθος είναι τάξης $(\delta t)^2$.

[13] Εδώ ίσως ανακύπτει το πρακτικό ερώτημα τι εννοούμε όταν λέμε μικρό. Είναι εξίσου μικρό το χρονικό διάστημα του ενός δευτερολέπτου για τη δράση της βαρύτητας σε ένα βλήμα όπλου, ή σε έναν κομήτη που περνά κοντά από τον Ήλιο; Η απάντηση είναι *όχι* και πρέπει κανείς να εξασκήσει τη φυσική του διαίσθηση προκειμένου να μπορεί να δώσει μια χοντρική εκτίμηση στο ποιο χρονικό διάστημα είναι μικρό σε κάθε φυσικό πρόβλημα.

[14] Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor για τις συναρτήσεις της

μικρότερο είναι το χρονικό βήμα δt. Παρατηρήστε ότι για ένα κατάλληλα μικρό χρονικό διάστημα, οι παράγωγοι στους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης μπορούν να θεωρηθούν ως κλάσματα καταλλήλως μικρών ποσοτήτων, αν λύσουμε τις παραπάνω δύο σχέσεις ως προς την ταχύτητα και την επιτάχυνση (δύναμη ανά μονάδα μάζας), αντίστοιχα.

Ίσως αναρωτηθείτε γιατί δεν κρατήσαμε ακόμη περισσοτερους όρους στις (5,6). Η απάντηση είναι ότι αν το κάναμε αυτό, θα αυξάναμε το υπολογιστικό φορτίο πράγμα το οποίο θα ήταν περίπου ισοδύναμο με το να αυξήσουμε αναλόγως το πλήθος των απλών αυτών βημάτων προώθησης θέσης και ταχύτητας.

Συνεχίζοντας αυτή την κατασκευή «επόμενων» θέσεων και ταχυτήτων μπορούμε να βρούμε τη θέση των σωματιδίων στο μέλλον. Μια τέτοια εργασία είναι ιδανική για έναν υπολογιστή (βλ. Πλαίσιο 1):

Πλαίσιο: 1

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\mathbf{r_0} = \mathbf{r}(0) \ \ , \ \ \mathbf{v_0} = \mathbf{v}(0)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:

$$\mathbf{F}(t)(\mathbf{r}(t))$$

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ / ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ:

$$\delta t \ \ , \ \ N = T/\delta t$$

(T είναι ο συνολικός χρόνος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός αφού πρόκειται για πλήθος.)

ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ t = i\,\delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t\,\mathbf{v}_i, \\ \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \delta t\,\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)/m, \\ \text{Επανάληψη} \end{array}\right.$$

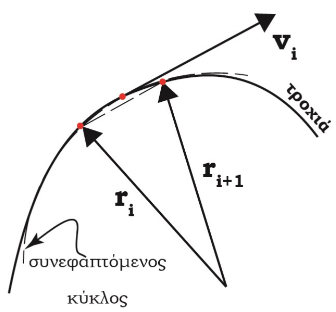
Ένα πρόγραμμα σαν το παραπάνω εκτελούμενο σε έναν σύγχρονο υπολογιστή μπορεί να ολοκληρωθεί εν ριπή οφθαλμού ακόμη και για πλήθος βημάτων N της τάξης των δεκάδων ή και εκατοντάδων χιλιάδων. Είναι άραγε κάτι τέτοιο ικανοποιητικό; Αν θέλουμε να προωθήσουμε το μηχανικό μας σύστημα κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον, το N θα

θέσης και της ταχύτητας, μέχρι και τον γραμμικό όρο. Θεωρούμε ότι το δt είναι τόσο μικρό ώστε οι επόμενοι όροι των αναπτυγμάτων να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι σε σχέση με τους όρους που ήδη έχουμε κρατήσει. Αν η σειρά Taylor συγκλίνει είναι εύκολο να δει κανείς ότι καθώς το δt μικραίνει, οι όροι που αποκόπτουμε γίνονται ολοένα και πιο ασήμαντοι σε σχέση με αυτούς που έχουμε κρατήσει.

καθορίσει και το μέγεθος του βήματος δt. Θα είναι αυτό αρκετά μικρό ώστε τα λάθη που οφείλονται στην προσεγγιστική μορφή των αναπτυγμάτων Taylor (μέχρι όρους πρώτης τάξης) να μην συσσωρευτούν σε βαθμό τέτοιο ώστε να αλλοιώσουν σημαντικά το αποτέλεσμα; Και κάτι ακόμη πιο επίφοβο: μήπως στην προσπάθεια μας να μικρύνουμε τα σφάλματα με μείωση του δt (και άρα αύξηση του N) είναι ανώφελη, αφού θα γίνουν N τέτοια; Για να μην κινδυνεύουμε από κάτι τέτοιο, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι τα σφάλματα σε κάθε βήμα μικραίνουν πιο γρήγορα από $1/N$.

Ένα βασικό λάθος που γίνεται σε κάθε βήμα είναι ότι κινούμενοι με την αρχική ταχύτητα σε κάθε βήμα, προκειμένου να προωθήσουμε τη θέση, προχωρούμε κατά μήκος της εφαπτομένης της πραγματικής τροχιάς. Επομένως, αν η τροχιά είναι καμπύλη, η αριθμητική ολοκλήρωση που περιγράψαμε θα μας οδηγήσει σταδιακά εκτός της πραγματικής τροχιάς! (Βλ. σχήμα 1.) Στο λάθος αυτό θα έρθει να προστεθεί και το λάθος στην επιτάχυνση λόγω του ότι το σωματίδιό μας θα βρίσκεται σε άλλη θέση από την πραγματική και επομένως η δύναμη που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα για την αλλαγή στην ταχύτητα θα είναι και αυτή λανθασμένη. Τα λάθη όμως αυτά θα είναι τάξης δt^2 και επομένως θα είναι ανάλογα του $1/N^2$. Η συσσώρευση N τέτοιων θα είναι λοιπόν ανάλογη του $1/N$. Συνεπώς μας συμφέρει να μεγαλώσουμε όσο γίνεται το N (με τίμημα προφανώς στην καθυστέρηση του υπολογισμού λόγω αυξημένου υπολογιστικού φορτίου).

Το λάθος «εκτροχιασμού» της κίνησης θα μπορούσε εν μέρει να ελαχιστοποιηθεί αν κάναμε την εξής παρατήρηση: Κάθε μικρό τμήμα της τροχιάς μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά με ένα τόξο κύκλου (του επονομαζόμενου συνεφαπτόμενου κύκλου [osculating circle]). Η εφαπτομένη όμως στο μέσο ενός κυκλικού τόξου είναι παράλληλη στη χορδή του τόξου αυτού (βλ. σχήμα 2)· επομένως η μεταβολή στη θέση (χορδή) έχει περίπου (με την ακρίβεια που το κυκλικό τόξο περιγράφει ικανοποιητικά μικρό κομμάτι της καμπύλης) τη διεύθυνση της ταχύτητας (εφαπτομένη) στο μέσο του διαστήματος (που συμπίπτει προσεγγιστικά με το μέσο του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος αν θεωρήσουμε ότι δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά το μέτρο της ταχύτητας στο εν λόγω βήμα). Επομένως αρκεί να προωθούμε τη θέση όχι με την ταχύτητα στην αρχή του κάθε βήματος, αλλά με την ταχύτητα στο μέσο αυτού και αντίστοιχα την ταχύτητα με την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στο μέσο του αντίστοιχου βήματος. Με απλά λόγια θα υπολογίζουμε τη θέση σε ακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος και την ταχύτητα σε ημιακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος. Ο μοναδικός επιπλέον υπολογισμός, πέραν αυτών του προηγούμενου τρόπου υπολογισμού της τροχιάς, είναι η αρχική εύρεση της ταχύτητας στο μέσο του πρώτου βήματος, $\delta t/2$ μετά τη



Σχήμα 2: Με την ολοκλήρωση κατά Feynman η ταχύτητα υπολογίζεται στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η θέση και παράλληλα η θέση στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η ταχύτητα. Έτσι εκτιμάται καλύτερα και η μεταβολή της θέσης και η μεταβολή της ταχύτητας.

χρονική στιγμή $t = 0$. Κατά τα άλλα το πλήθος των βημάτων είναι ακριβώς ίδιο με τον προηγούμενο τρόπο, την ολοκλήρωση κατά Euler, όπως αυτή είναι γνωστή. Το πρόγραμμα λοιπόν με το τρυκ του μεσοδιαστήματος για ακόμη καλύτερη ακρίβεια θα έχει ως εξής:

Πλαίσιο: 2

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) \ , \ \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:

$$\mathbf{F}(t)(\mathbf{r}(t))$$

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ / ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ:

$$\delta t \ , \ N = T/\delta t$$

(T είναι ο συνολικός χρόνος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός αφού πρόκειται για πλήθος.)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ:

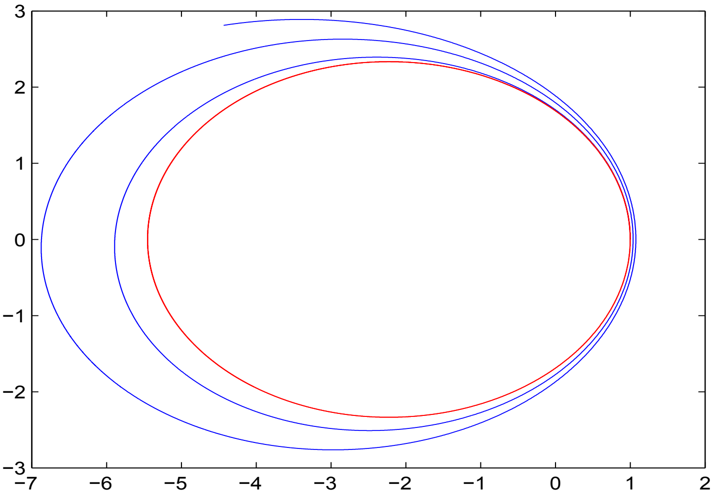
$$\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 + (\delta t/2)\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)/m$$

ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ t = i\,\delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t\,\mathbf{v}'_i, \\ \mathbf{v}'_{i+1} = \mathbf{v}'_i + \delta t\,\mathbf{F}(\mathbf{r}_{i+1})/m, \\ \text{Επανάληψη} \end{array}\right.$$

Προσέξτε ότι τώρα η προώθηση της ταχύτητας από την $\mathbf{v}'_i$ στην $\mathbf{v}'_{i+1}$ γίνεται μέσω της δύναμης υπολογισμένης στην $\mathbf{r}_{i+1}$ και όχι στην $\mathbf{r}_i$ θέση, όπως στην ολοκλήρωση κατά Euler, εξαιτίας του νέου τρόπου αρίθμησης των διαδοχικών θέσεων και ταχυτήτων: Η i-οστή ταχύτητα $\mathbf{v}'_i$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $(i + 1/2)\delta t$, ενώ η i-οστή θέση $\mathbf{r}_i$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $i\delta t$.

Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η τροχιά ενός πλανήτη ο οποίος περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $\mathbf{F} = -m\mathbf{r}/r^2$. Οι δύο καμπύλες έχουν κατασκευαστεί μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Euler (μπλε) και της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Feynman (κόκκινη). Είναι φανερό ότι η ολοκλήρωση κατά Feynman πετυχαίνει πολύ καλύτερα το παρατηρούμενο αστρονομικό αποτέλεσμα του Kepler για το ίδιο μέγεθος χρονικού βήματος και συνολικού χρόνου ($\delta t = 0.01$ και $T = 1000$ αντίστοιχα).



Σχήμα 3: Ένας πλανήτης κινούμενος υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου διαγράφει έλλειψη όπως έδειξε ο Νεύτωνας. Η αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς κατά Euler (μπλε καμπύλη) και κατά Feynman (κόκκινη καμπύλη) δείχνει καθαρά την υπεροχή της δεύτερης. Ο αριθμητικός υπολογισμός και στις δύο περιπτώσεις έγινε με βήμα $\delta t = 0.01$ για συνολικό χρόνο $T = 1000$ και με αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(v_{x0}, v_{y0}) = (0, 1.2)$. Παρατηρήστε πως η συσσώρευση σφαλμάτων στην ολοκλήρωση κατά Euler εκτροχιάζει βαθμιαία την τροχιά. Προσπαθήστε με ένα δικό σας πρόγραμμα να αναπαράγετε τα αποτελέσματα αυτά. (Για χρόνο αρκετά μεγαλύτερο του $T = 1000$ και η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Feynman αρχίζει να αποκλίνει από την θεωρητικά αναμενόμενη ελλειπτική τροχιά.)

Δοκιμάστε μόνοι σας να φτιάξετε ένα πρόγραμμα το οποίο να εκτελεί τις δύο παραπάνω μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αλλάξτε κατάλληλα το μέγεθος των βημάτων μέχρις ότου η τροχιά αρχίζει να μοιάζει με έλλειψη. Στη συνέχεια «παίξτε» με τις αρχικές συνθήκες για να δείτε πως αλλάζει το σχήμα της έλλειψης. Δοκιμάστε να μπείτε στο ρόλο του Kepler και να επιβεβαιώσετε αριθμητικά τους τρεις νόμους του: (i) σε τι βαθμό το σχήμα αυτό είναι έλλειψη, δηλαδή με τι ακρίβεια το άθροισμα αποστάσεων από τις δύο εστίες κρατιέται σταθερό, (ii) με πόση ακρίβεια τα εμβαδά σε διαδοχικά βήματα είναι ίσα, (iii) αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες ώστε να αλλάξει το σχήμα της έλλειψης, διατηρείται σταθερός ο λόγος του κύβου της μεγάλης διάστασης της έλλειψης προς το τετράγωνο του συνολικού χρόνου μιας τροχιάς; Τέλος δοκιμάστε να αλλάξετε το νόμο της δύναμης· πώς αλλάζει τότε το σχήμα της τροχιάς;

Αν το παραπάνω παράδειγμα σας φαίνεται απλουστευμένο, τι θα λέγατε αν υπολογίζατε την εξέλιξη, ή ακόμη και το παρελθόν του Ηλιακού μας συστήματος; Πρόκειται για ένα σύστημα 9 σωμάτων (του Ήλιου και των 8 πλανητών, αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους δορυφόρους και τα άλλα μικρά ουράνια σώματα εντός του ηλιακού μας συστήματος). Επομένως μπορεί να γράψει κανείς τη δύναμη που ασκείται στο καθένα από αυτά ως το άθροισμα 9 βαρυτικών δυνάμεων.

Πόσες πράξεις αλήθεια απαιτούνται; Είναι διαχειρίσιμο υπολογιστικά το πρόβλημα αυτό; Ας κάνουμε κάποιους χοντρικούς υπολογισμούς: (9 σώματα) x [3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της θέσης + 3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της ταχύτητας + 3 συνιστώσες της δύναμης για κάθε θέση των σωμάτων $\times$ (8 όροι δυνάμεων + 1 άθροιση των 8 όρων)] $\times$ (1000 ας πούμε βήματα ανά έτος) $\simeq$ 300.000 υπολογισμοί ανά έτος. Ένας απλός υπολογιστής με δυνατότητα εκτέλεσης 10^7 πράξεων ανά δευτερόλεπτο θα μπορούσε να «τρέξει» την εξέλιξη του Ηλιακού μας συστήματος κατά περίπου 30 έτη μέσα σε ένα δευτερόλεπτο, ή αν τον αφήναμε να εργάζεται για ένα χρόνο θα μας έδινε το στίγμα των πλανητών ένα δισεκατομμύριο χρόνια στο μέλλον ή στο παρελθόν! (Όπως είπαμε παραπάνω και θα συζητήσουμε εκτενέστερα και στο επόμενο κεφάλαιο, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου). Παρόμοιες ολοκληρώσεις έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια (Wisdom, 1990) προκειμένου να ελεγχθεί η ευστάθεια ή μη του Ηλιακού μας συστήματος και στηρίζονται κατά μεγάλο μέρος σε μεθόδους των οποίων η ακρίβεια βασίζεται σε εργαλεία που έχουν προκύψει από τη θεωρητική ανάλυση μηχανικών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (μέθοδος διαταραχών του Poincaré).

Κλείνοντας το παρόν κεφάλαιο θα συνοψίζαμε λέγοντας ότι ουσιαστικά γνωρίζοντας τους νόμους του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμ, με απλούς (όπως δείξαμε) υπολογισμούς, την κίνηση κάθε μηχανικού συστήματος (οι διαστημικές εταιρείες εκτελούν παρόμοιους υπολογισμούς, όταν ετοιμάζουν μια αποστολή δορυφόρου στο Διάστημα). Η εύρεση αναλυτικών λύσεων σε συγκεκριμένα προβλήματα εφαρμογής των νόμων του Νεύτωνα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια δεν έχει ουσιαστικά κανένα ιδιαίτερο πλεονέκτημα ως προς την πρόβλεψη της εξέλιξης μηχανικών συστημάτων σε σχέση με την παραπάνω προσεγγιστική, αριθμητική μέθοδο αφού ακόμη και αυτό το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου εξαιτίας των πεπερασμένων βημάτων μπορεί να εξαλειφθεί μειώνοντας το βήμα περαιτέρω. Παρά ταύτα η αναλυτική μελέτη συγκεκριμένων συστημάτων (αν και ιδιαίτερα εξιδανικευμένα σε σχέση με τα πραγματικά φυσικά συστήματα) που διέπονται από τους νόμους του Νεύτωνα και για τα οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές εκφράσεις για την εξέλιξή τους, θα μας οδηγήσει σε καινούρια εργαλεία και νέες φυσικές ποσότητες τα οποία και βαθύτερη κατανόηση στο πώς δουλεύει η φύση θα μας προσφέρουν και μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα στην εξυπνότερη χρήση αριθμητικών υπολογισμών αυξάνοντας έτσι την προβλεπτική ικανότητα των τελευταίων. Στα δύο αυτά στοιχεία κυρίως έγκειται η χρησιμότητά τους και όχι στο ότι η αναλυτική μορφή της λύσης τους υπερτερεί της αριθμητικής.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 2

- Η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια όρια ισχύος, εντός των οποίων είναι εξαιρετικά ακριβής και δεν διαφέρει, ως προς τις προβλέψεις της, από άλλες πιο ευρείας ισχύος θεωρίες.
- Οι θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση οφείλουν να είναι συμμετρικές ως προς τη μετάθεση, την περιστροφή και την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Δεν θα πρέπει επίσης να είναι χρονοεξαρτώμενες. Αυτό σημαίνει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο υλικών σημείων θα πρέπει να είναι συνάρτηση το πολύ των $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ και της

γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ και $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

- Η δύναμη της βαρύτητας και η ηλεκτρομαγνητική εξαρτώνται (κατ' ουσίαν) μόνο από τη σχετική θέση των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων και έχει την κατεύθυνση της ευθείας που συνδέει αυτά.
- Οι άλλες δυνάμεις της καθημερινής μας εμπειρίας δεν είναι θεμελιώδεις· είναι συνέπεια των δύο παραπάνω θεμελιωδών δυνάμεων.
- Δεδομένης της δύναμης και των αρχικών συνθηκών (θέσεις - ταχύτητες) ενός συστήματος σωματιδίων, η εξέλιξη του συστήματος (και προς το μέλλον και προς το παρελθόν) είναι μοναδική.
- Με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λύση των εξισώσεων του Νεύτωνα ακόμη και για πολύπλοκα συστήματα αλληλεπιδρώντων σωμάτων.