

Σημειώσεις Ανάλυσης I

6. Συναρτήσεις

Πρωταρχική έννοια στη φυσική είναι η έννοια της συνάρτησης. Π.χ. η θέση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου $x = f(t)$ ή $x(t)$. Στη πρώτη περίπτωση προσδιορίζουμε ότι η αντιστοίχιση της μεταβλητής t με την x γίνεται μέσω των κανόνων που εμπεριέχονται στην f , η οποία λέγεται και η συνάρτηση, π.χ. $f(t) = t^2$. Στη δεύτερη περίπτωση δεν προσδιορίζουμε επακριβώς τη συνάρτηση, μπορεί να προσδιορισθεί π.χ. με παρατήρηση της θέσης κάποιου κινητού, τονίζεται απλώς με αυτή τη γραφή ότι θεωρούμε ζεύγη (t, x) στα οποία αντιστοιχούμε σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t μία κάποια τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής x . Σημαντικά παραδείγματα συναρτήσεων είναι η σταθερά συνάρτηση η οποία λαμβάνει για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t σταθερή τιμή δηλ. $f(t) = c$ και η συνάρτηση βήματος

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \geq 0, \\ 0 & \text{εάν } t < 0. \end{cases}$$

Έχει σημασία να προσδιορίσουμε το σύνολο στο οποίο λαμβάνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή, αυτό λέγεται πεδίο ορισμού, και το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η x , το πεδίο τιμών δηλαδή της εξαρτημένης μεταβλητής. Π.χ. όταν το πεδίο ορισμού είναι οι φυσικοί αριθμοί οι τιμές της συνάρτησης σχηματίζουν μία ακολουθία και τον γενικό όρο της ακολουθίας τον γράφουμε συνήθως ως a_n . Το παδίου ορισμού μπορεί όμως να είναι οι ρητοί αριθμοί. Π.χ. θεωρήστε τη συνάρτηση $\Theta(x^2 - 2)$ όπου x ρητός αριθμός. Εμείς κατα κύριο λόγο θα μελετήσουμε πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλη την πραγματική ευθεία, π.χ. την παραπάνω συνάρτηση $\Theta(x^2 - 2)$ όταν ο x είναι πραγματικός αριθμός. Το πεδίο ορισμού μπορεί να είναι φραγμένο και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε συνάρτησης που ορίζονται σε διαστήματα της πραγματικ'ς ευθείας. Τα διαστήματα αυτά μπορεί να είναι κλειστά, δηλ. το πεδίο τιμών να είναι το $a \leq x \leq b$ που συμβολίζεται και $[a, b]$, ή ανοικτά, δηλ. το πεδίο τιμών είναι το $a < x < b$ που συμβολίζεται με (a, b) .

Εάν το σύνολο των τιμών μίας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ είναι περατωμένο (φραγμένο) τότε η συνάρτηση λέγεται περατωμένη, και αν η συνάρτηση είναι πραγματική τότε θα υπάρχει κάποιος αριθμός M που θα είναι το ανώτερο πέρας της συνάρτησης και m που θα είναι το κατώτερο πέρας της συνάρτησης, και η ποσότητα $M - m$ ορίζει την αιώρηση της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα. Εάν δεν χωρίσω το διάστημα $[a, b]$ σε μικρότερα διαστήματα $[\alpha, \alpha_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, $\dots$, $[\alpha_n, \beta]$ και καλέσω M_1, μ_1 το ανώτερο και κατώτερο πέρας της συνάρτησης στο $[\alpha, \alpha_1]$, M_2 και μ_2 το ανώτερο και κατώτερο πέρας στο $[\alpha_1, \alpha_2]$ κ.ο.κ. τότε θα έχω ότι:

1. Ένα τουλάχιστον από τα $M_1, M_2, \dots, M_{\nu+1}$ θα συμπίπτει με το M και ένα τουλάχιστον από τα $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\nu+1}$ θα ισούται με το μ .
2. Κανένα από τα $M_1, M_2, \dots, M_{\nu+1}$ θα υπερβainei το M , και κανένα από τα $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\nu+1}$ θα είναι μικρότερο από το μ .
3. Καμμία από τις αιωρήσεις $M_1 - \mu_1, M_2 - \mu_2, \dots, M_{\nu+1} - \mu_{\nu+1}$ θα υπερβainei την $M - \mu$.
4. Το άθροισμα των αιωρήσεων θα είναι τουλάχιστον ίσο με το $M - \mu$.

Μία συνάρτηση $y = f(x)$ θα λέγεται πεπερασμένη σε ένα διάστημα όταν σε κάθε τιμή του διαστήματος αντιστοιχεί πεπερασμένη τιμή της συνάρτησης. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι πεπερασμένη σε ένα διάστημα αλλά να μην είναι περατωμένη. Π.χ. η συνάρτηση $y = 1/x$ στο διάστημα $(0,1)$ είναι πεπερασμένη αλλά όχι περατωμένη. Ομοίως και η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx^2 + 1}.$$

στο $[0, 1]$ είναι και αυτή πεπερασμένη αλλά δεν είναι περατωμένη, επειδή $f(0) = 0$ και $f(x) = 1/x$ για $x \neq 0$.

6. Συνέχεια

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί είναι τόσοι πολλοί μπορούμε να κατασκευάσουμε ιδιαίτερα περίπλοκες συναρτήσεις οι οποίες δεν φαίνεται να είναι συμβατές με την εμπειρία μας. Π.χ. Θεωρήστε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ που είναι

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \text{ είναι ρητός,} \\ 0 & \text{εάν } x \text{ είναι άρρητος.} \end{cases}$$

στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτές οι συναρτήσεις διαφέρουν από τις συναρτήσεις της εμπειρίας μας στο ότι είναι παντού “ασυνεχείς”. Ο κόσμος όμως γύρω μας εξελίσσεται με συνεχείς τρόπους. Π.χ. όταν είστε έξω από τη πόρτα του σπιτιού σας και θέλετε να πάτε στο δωμάτιό σας, στη πορεία σας από την εξωτερική πόρτα στο δωμάτιό σας, θα περάσετε από όλα τα ενδιάμεσα σημεία της πορείας, π.χ. θα περάσετε κάποια στιγμή από την πόρτα. Εγείρεται λοιπόν το θέμα πως να ορίσουμε την συνέχεια συνάρτησης. Αξίζει να σταθείτε, πριν διαβάσετε παρακάτω, και να κατασκευάσετε κάποιο ορισμό. Μία σκέψη θα ήταν να ορίσουμε συνεχείς συναρτήσεις αυτές που ικανοποιούν την θεμελιώδη αρχή της ενδιάμεσης τιμής δηλ. αν μία συνάρτηση παίρνει την τιμή β και την τιμή α τότε θα πάρει και όλες τις τιμές που είναι ενδιάμεσες των δύο. Αυτός ορισμός είναι και διασθητικός και

φαίνεται να ανταποκρίνεται στην εμπειρία. Ας τον εξετάσουμε όμως. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{nx}{nx^2 + 1} \right)$$

στο διάστημα $[0,1]$. Αυτή είναι 0 στο $x = 0$ και ίση με $\sin(1/x)$ για $x \neq 0$. Ο ορισμός που δώσαμε θα χαρακτήριζε αυτή τη συνάρτηση συνεχή σε κάθε σημείο του $[0,1]$. Η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχή της ενδιάμεσης τιμής, παρότι στο σημείο 0 παρουσιάζει ασυνέχεια.

Ο ορισμός της συνέχειας που έχει επιλεγεί είναι ο εξής:

Ορισμός: Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο a αν η συνάρτηση είναι πεπερασμένη στο σημείο αυτό και όταν $x \rightarrow a$ η συνάρτηση $f(x) \rightarrow f(a)$, δηλαδή δοθέντος αριθμού ϵ υπάρχει αριθμός δ , τέτοιος ώστε να είναι $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ για κάθε $|x - a| < \delta$. Όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία ενός διαστήματος τότε λέγεται συνεχής σε όλο το διάστημα.

Ο ορισμός είναι δυστυχώς τεχνικός και πρέπει δείξουμε ότι συνεπάγεται την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Αυτό δεν είναι άμεσο. Π.χ. θεωρήστε τη συνάρτηση $\Theta(x^2 - 2)$ όπου x ρητός αριθμός. Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής αν το πεδίο τιμών είναι οι ρητοί (είναι ασυνεχής όταν το πεδίο είναι οι πραγματικοί, δείξτε τα) και παρόλο ότι είναι συνεχής στο πεδίο των ρητών δεν ικανοποιεί την αρχή της ενδιάμεσης τιμής: η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές ενδιάμεσες του 0 και του 1. Φαίνεται ότι για να ισχύει η ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής πρέπει να βασισθούμε στην πληρότητα των πραγματικών αριθμών. Θα δείξουμε πράγματι ότι οι πραγματικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τον ορισμό της συνέχειας που έχουμε δώσει περιορίζονται στις συναρτήσεις που είναι συμβατές με τη φυσική εμπειρία μας.

Πριν προχωρήσουμε θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες που εύκολα μπορείτε να αποδείξετε είτε από τον ορισμό ή κάνοντας χρήση τα αντίστοιχα θεωρήματα σύγκλισης ακολουθιών (να σχεδιάσετε τις αποδείξεις). Η σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο της, καθώς και η ταυτοτική (ή μοναδιαία) συνάρτηση $f(x) = x$. Επίσης το άθροισμα και το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις, καθώς και το πηλίκο, εφόσον ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Συνεπώς η συνάρτηση x^n είναι συνεχής καθώς και κάθε πολυώνυμο ή κάθε ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων) στα σημεία που δεν μηδενίζεται το πολυώνυμο που βρίσκεται στο πηλίκο. Π.χ. $1/x^n$ με $n > 0$ είναι παντού συνεχής εκτός από το σημείο $x = 0$. Επίσης η σύνθεση συναρτήσεων δίνει μία συνεχή συνάρτηση, δηλ. εάν η $f(x)$ και η $g(x)$ είναι συνεχείς, τότε και η $f(g(x))$ είναι συνεχής, υπό την προϋπόθεση βεβαίως ότι το πεδίο τιμών της $g(x)$ είναι και πεδίο ορισμού και συνέχειας της $f(x)$.

Συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{n}{nx + 1} \right) .$$

Αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχή της ενδιάμεσης τιμής αλλά δεν είναι συνεχής. Πεπλεγμένη συνάρτηση. Αντίστροφη συνάρτηση. Περαιτωμένη συνάρτηση. Πεπερασμένη συνάρτηση. Κλειστό ανοικτό διάστημα. $f(x) = 1/x$ είναι πεπερασμένη στο $(0, 1)$ αλλά όχι περαιτωμένη. Η

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx^2 + 1} .$$

στο $[0, 1]$ είναι και αυτή πεπερασμένη αλλά δεν είναι περαιτωμένη, επειδή $f(0) = 0$ και $f(x) = 1/x$ για $x \neq 0$. Όταν το ανώτερο πέρας είναι και τιμή της συνάρτησης τότε λέγεται μέγιστο. Αντιστοίχως για το ελάχιστο.

Η έννοια της συνέχειας. Η σημασία του πεδίου ορισμού. π.χ. η $f(x) = -1$ όταν $x^2 < 2$ και $f(x) = 1$ για $x^2 \geq 2$ είναι συνεχής όταν το πεδίο ορισμού είναι οι ρητοί. Αυτή η συνάρτηση βεβαίως δεν ικανοποιεί το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής

Η συνέχεια της σταθερής συνάρτησης και της x . Συνέχεια αθροίσματος, γινομένου, σύνθεσης, κ.λ.π. και συνεπώς πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Θα αποδείξουμε το πρώτο σημαντικό θεώρημα συνέχειας των συναρτήσεων: ότι όταν μία συνάρτηση παίρνει σε δύο διαφορετικά σημεία διαφορετικές τιμές τότε υπάρχει σημείο στο οποίο η συνάρτηση λαμβάνει κάποια ενδιάμεση τιμή. Αν πρόκειται να πάτε απο την Αθήνα στους Δελφούς και ο δρόμος περνά απο την Αγχίαλο τότε κάποια στιγμή θα περάσετε από την Αγχίαλο. Οι ψυχολόγοι έχουν κάνει πειράματα και έχουν δείξει ότι αυτή τη βασική αρχή την μαθαίνουμε πολύ νωρίς. Εμείς όμως αναγκάζομαστε για να την αποδείξουμε για να καταλάβουμε τις προϋποθέσεις αλήθειας αυτής της πρότασης.

Η απόδειξη είναι παραλαγή της πρωτόγονης αναζήτησης ενός κινδύνου ή ενός θησαυρού π.χ. ενός λέοντος

Πρώτο Θεώρημα: Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν $f(a) \leq 0$ και $f(b) \geq 0$, τότε υπάρχει τιμή του διαστήματος c , δηλ. που είναι $a \leq c \leq b$, για την οποία η συνάρτηση λαμβάνει την ενδιάμεση τιμή 0, δηλ. $f(c) = 0$.

Απόδειξη: Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη σε τρία βήματα

I : Θα φτιάξουμε δύο ακολουθίες σημείων που θα συγκλίνουν στο επιθυμητό σημείο. Έστω $a_0 = a$, $b_0 = b$ και λαμβάνουμε το ενδιάμεσο σημείο $c = (a_0 + b_0)/2$. Αν $f(c) < 0$ τότε $a_1 = c$ και $b_1 = b_0$, άλλως $a_1 = a_0$ και $b_1 = c$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τα a_1 , b_1 , στα οποία η συνάρτηση

λαμβάνει τιμές $f(a_1) \leq 0$ και $f(b_1) \geq 0$. Από το $c = (a_1 + b_1)/2$ ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τα a_2 και b_2 και έτσι κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες εκ των οποίων η μεν a_n είναι αύξουσα και $f(a_n) \leq 0$, ενώ η b_n είναι φθίνουσα και είναι $f(b_n) \geq 0$. Δηλαδή οι ακολουθίες είναι διατεταγμένες ως:

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots a_n \dots \leq b_n \leq \dots b_1 \leq b_0$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$ είναι μηδενική ακολουθία.

II : Η a_n είναι αύξουσα και φραγμένη (από το b). Συνεπώς συγκλίνει στο ξ . Επειδή

$$b_n = a_n + (b_n - a_n)$$

και η b_n έχει ως όριο το ξ .

II : Το ερώτημα είναι ποία η τιμή της $f(\xi)$. Εφόσον $a_n \rightarrow \xi$ λόγω συνέχειας θα είναι και $f(a_n) \rightarrow f(\xi)$. Επειδή $f(a_n) \leq 0$ θα είναι αναγκαστικά $f(\xi) \leq 0$. Διότι αν $f(\xi) = k > 0$ τότε θα ίσχυε για όλες τις τιμές της a_n ότι: $f(\xi) - f(a_n) \geq k > k/2$. Αυτό όμως αντιτίθεται στην συνέχεια της συνάρτησης, διότι σύμφωνα με τα παραπάνω αν επιλέξουμε $\epsilon = k/2$ δεν υπάρχει δ τέτοιο ώστε να είναι $|f(\xi) - f(a_n)| < k/2$ όταν $|\xi - a_n| < \delta$. Ομοίως, επειδή $b_n \rightarrow \xi$ θα είναι $f(b_n) \rightarrow f(\xi)$ και επειδή $f(b_n) \geq 0$ θα είναι $f(\xi) \geq 0$. Συνεπώς θα είναι αναγκαστικά $f(\xi) = 0$, άλλως έχουμε άτοπο.

Δεύτερο Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε κλειστο διάστημα $[a, b]$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο a τότε η $f(x)$ θα είναι φραγμένη σε μία περιοχή του a έστω στην $[a, a + \delta/2]$. Πράγματι, λόγω συνέχειας αν επιλέξω $\epsilon = 1$ τότε θα υπάρχει δ τέτοιο ώστε για $x - a < \delta$, άρα και για $x \leq a + \delta/2$, να είναι $-1 < f(x) - f(a) < 1$. Δηλαδή πράγματι στο $[a, a + \delta/2]$ η $f(x)$ είναι περατωμένη. Θεωρώ, τώρα το σύνολο Σ που αποτελείται από τα σημεία ξ τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι περατωμένη στο διάστημα $[a, \xi]$. Το σύνολο Σ δεν είναι κενό και έχει στοιχεία (π.χ. όλα τα σημεία του $[a, a + \delta/2]$). Το Σ είναι άνωθεν φραγμένο από το b . Θεωρώ τώρα το ανώτερο πέρας του Σ το ξ . Θα είναι $\xi \leq b$. Θα δείξουμε ότι είναι αδύνατο να είναι $\xi < b$. Πράγματι αν $\xi < b$ με τα ίδια επιχειρήματα που δείξαμε προηγουμένως ότι η $f(x)$ είναι περατωμένη σε μία περιοχή του a μπορούμε να δείξουμε ότι η $f(x)$ θα είναι περατωμένη και στο $[\xi, \xi + \delta'/2]$. Αλλά αυτό είναι άτοπο διότι τότε το $\xi + \delta'/2$ θα ανήκε στο Σ , ενώ επειδή το ξ είναι το ανώτερο πέρας του Σ το $\xi + \delta'/2$ δεν ανήκει στο Σ .

Τρίτο Θεώρημα: Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε δοθέντος αριθμού ϵ το διάστημα μπορεί να χωρισθεί σε πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων έτσι ώστε η αιώρηση της συνάρτησης σε κάθε διάστημα να είναι μικρότερη από το ϵ .

Απόδειξη: Θεωρήστε ότι το θεώρημα δεν ισχύει, δηλ. το αρχικό διάστημα δεν μπορεί να χωρισθεί σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων στα οποία η αιώρηση να μην είναι μεγαλύτερη από ϵ . Λαμβάνω $a_0 = a$, $b_0 = b$ και χωρίζω το διάστημα στη μέση σχηματίζοντας δύο υποδιαστήματα: το $[a, c]$ και το $[c, b]$, $c = (a_0 + b_0)/2$. Σε τουλάχιστον ένα από τα δύο υποδιαστήματα το θεώρημα δεν θα ισχύει, αν δεν ισχύει το θεώρημα στο αριστερό τότε λαμβάνω $a_1 = a_0$ και $b_1 = c$, αν δεν ισχύει στο δεξιό, τότε $a_1 = c$ και $b_1 = b_0$, αν δεν ισχύει και στα δύο τότε επιλέγω το αριστερό διάστημα και λαμβάνω $a_1 = a_0$, $b_1 = c$. Χωρίζω τώρα το $[a_1, b_1]$ πάλι σε δύο υποδιαστήματα τα $[a_1, c]$ και $[c, b_1]$ με $c = (a_1 + b_1)/2$, και πάλι επιλέγω με τον ίδιο τρόπο το διάστημα στο οποίο δεν ισχύει το θεώρημα και έτσι ορίζω δύο ακολουθίες εκ των οποίων η μεν a_n είναι αύξουσα, ενώ η b_n είναι φθίνουσα και οι ακολουθίες αυτές έχουν κατασκευασθεί με την υπόθεση ότι το θεώρημα δεν ισχύει σε κανένα από τα διαστήματα $[a_n, b_n]$. Δηλαδή οι ακολουθίες είναι διατεταγμένες ως:

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots a_n \dots \leq b_n \leq \dots b_1 \leq b_0$$

και η $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$ είναι μηδενική ακολουθία. Συνεπώς και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο σημείο ξ . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ και συνεπώς δοθέντος του ϵ η αιώρηση της $f(x)$ θα είναι μικρότερη από το ϵ όταν η συνάρτηση λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Αλλά για n αρκούντως μεγάλο όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ θα είναι μέσα στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ και έχει υποτεθεί ότι αυτά τα διαστήματα δεν μπορούν να υποδιαιρεθούν σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων στα οποία η αιώρηση της συνάρτησης είναι μικρότερη από το ϵ . Αυτό αποτελεί όμως αντίφαση. Συνεπώς το θεώρημα ισχύει.

Το Τρίτο θεώρημα, δίνει αμέσως μία άλλη απόδειξη ότι συνεχείς συναρτήσεις σε κλειτα διαστήματα είναι περατωμένες.

Τέταρτο Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε κλειστο διάστημα $[a, b]$ είναι μέγιστο και ελάχιστο.

Απόδειξη:

- (Α) Έχουμε δείξει ότι η $f(x)$ είναι φραγμένη και έστω M το ανώτερο φράγμα και επιπλέον ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση δεν λαμβάνει την τιμή M . Θα δείξω ότι αυτό είναι άτοπο. Η συνάρτηση τότε

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα και συνεπώς φραγμένη. Δηλαδή είναι

$$\frac{1}{M - f(x)} < \epsilon$$

που συνεπάγεται παραδόξως ότι το $M - 1/\epsilon$ είναι και αυτό άνω φράγμα διότι

$$f(x) < M - \frac{1}{\epsilon}.$$

Όπερ άτοπον, και συνεπώς η $f(x)$ λαμβάνει την τιμή M και έχει μέγιστο. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι έχει ελάχιστο m .

Θα δώσουμε και άλλη απόδειξη σε αυτό το θεώρημα, διότι η παραπάνω απόδειξη είναι λεπτή, έμμεση και κάπως τεχνητή και κρύβει σε αυτή την τελειότητα την ουσία του θεωρήματος.

- (B) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της διάτμησης. Έστω M το ανώτερο πέρας. Κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες a_n, b_n ως εξής. Οι πρώτοι όροι είναι τα άκρα του διαστήματος: $a_0 = a, b_0 = b$. Έπειτα λαμβάνουμε το μέσο του διαστήματος $c = (a_0 + b_0)/2$ και ελέγχουμε σε ποιο από τα δύο υποδιαστήματα που δημιουργήθηκαν βρίσκεται το M , αν είναι στο $[c, b_0]$ τότε $a_1 = c$ και $b_1 = b_0$, αν στο αριστερό $[a_0, c]$ τότε $a_1 = a_0$ και $b_1 = c$, αν είναι και στα δύο τότε λαμβάνουμε το αριστερό και $a_1 = a_0$ και $b_1 = c$, κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε δύο μονότονες και φραγμένες ακολουθίες a_n, b_n που συγκλίνουν στο ίδιο σημείο ξ . Θα είναι εξ'ορισμού $f(\xi) \leq M$. Θα δείξουμε ότι $f(\xi) = M$. Αν όμως η τιμή της συνάρτησης στο ξ είναι μικρότερη του ανωτέρου φράγματος, τότε $f(\xi) = k < M$ και αν πάρουμε ως $\epsilon = (M - k)/2$ τότε λόγω της συνέχειας της συνάρτησης θα υπάρχει δ τέτοιο ώστε όταν $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ να είναι $f(x) < f(\xi) + (M - k)/2 = (M + k)/2$. Συνεπώς στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ στο οποίο συμπεριλαμβάνονται και όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ για n αρκούντως μεγάλο το ανώτερο πέρας είναι μικρότερο από το M , όπερ άτοπο, διότι έχουμε υποθέσει ότι το ανώτερο πέρας είναι το M .

8. Ομαλή συνέχεια

Είδαμε ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και μας δοθεί οποιοσδήποτε θετικός αριθμός ϵ τότε μπορώ να χωρίσω το $[a, b]$ σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων, έτσι ώστε η αιώρηση σε καθένα από τα αυτά τα διαστήματα να είναι μικρότερη από το ϵ . Έστω λοιπόν ότι έκανα τέτοια διαίρεση του διαστήματος και έστω λ το πλάτος του μικροτέρου από το πεπερασμένο πλήθος των διαστημάτων. Θα θέλαμε να συμπεράνουμε ότι η αιώρηση θα είναι το

πολύ ε , αν λάβω διαστήματα που έχουν πλάτος μικρότερο από το λ . Αλλά αυτό δεν έπεται από τα παραπάνω. Χρειάζεται λίγο παραπάνω σκέψη.

Θεωρώ κάποια διαίρεση του $[a, b]$ τέτοια ώστε η αιώρηση να είναι μικρότερη από $\varepsilon/2$ και έστω δ το πλάτος του μικρότερου από αυτά τα διαστήματα. Λαμβάνω δύο σημεία τέτοια ώστε $|x_1 - x_2| < \delta$. Τότε τα x_1 και x_2 θα ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα ή σε γειτονικά. Στη πρώτη περίπτωση

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση, αν c το κοινό άκρο των δύο υποδιαστημάτων θα είναι

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(x_2)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Συνεπώς έχουμε:

Πέμπτο Θεώρημα: Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε δοθέντος αριθμού ε υπάρχει αριθμός δ τέτοιος ώστε η αιώρηση της συνάρτησης σε κάθε διάστημα πλάτους δ να είναι μικρότερη του ε .

Συναρτήσεις που δεν είναι μόνο συνεχείς αλλά έχουν την ιδιότητα δοθέντος ε να υπάρχει $\delta(\varepsilon)$, που να μην εξαρτάται από το σημείο x , τέτοιο ώστε να είναι $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ όταν $|x - y| < \delta$, λέγονται ομαλά συνεχείς. Με το πέμπτο θεώρημα δείξαμε ότι κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα είναι αναγκαστικά ομαλά συνεχής. Π.χ. Η συνάρτηση $\sin(1/x)$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομαλά συνεχής. Ομοίως η $\Theta(x^2 - 2)$ όταν x είναι ρητός είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομαλά συνεχής. Στη φυσική οι συναρτήσεις που συναντούμε είναι συνήθως ομαλά συνεχείς.

Η ομαλή συνέχεια είναι σημαντική διότι αυτή η ιδιότητα μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος, επίσης είναι θεμελιώδης έννοια για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων ορίων ακολουθιών συναρτήσεων $f_n(x)$ οι οποίες για κάθε x έχουν ως όρο τη συνάρτηση $f(x)$. Εμείς εδώ σαν μία εφαρμογή αναφέρουμε ότι συναρτήσεις που ορίζονται στους ρητούς μπορούν να ορίσουν συνεχείς συναρτήσεις επί των πραγματικών αν αυτές είναι ομαλώς συνεχείς. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις της μορφής $x^{\sqrt{2}}$. Π.χ. η $\Theta(x^2 - 2)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση επί των ρητών, αλλά όχι ομαλά συνεχής, δεν επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση αν το πεδίο ορισμού επεκταθεί στους πραγματικούς. Η συνάρτηση x^ρ με τον εκθέτη ρ ένα ρητό αριθμό είναι ομαλά συνεχής όταν το πεδίο ορισμού είναι οι ρητοί, οπότε επεκτείνεται στην συνεχή συνάρτηση x^ρ επί των πραγματικών. Ομοίως η ρ^x είναι ομαλά συνεχής σε κλειστά διαστήματα όταν $\rho > 0$ και x ρητός, οπότε επεκτείνεται στη συνεχή συνάρτηση ρ^x επί των πραγματικών.

9. Αύξουσες ή ελαττούμενες συναρτήσεις

Είδαμε ότι η απαίτηση να έχει μία συνάρτηση την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής δεν την καθιστά συνεχή. Αν όμως η συνάρτηση είναι μονότονος, είτε αύξουσα ή ελλατούμενη και έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής τότε είναι συνεχής. Μία συνάρτηση

9. Αντίστροφοι συναρτήσεις 10. Κατασκευή γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

παραδείγματα ρητών συναρτήσεων, $\cosh(x)$ $\sinh(x)$ $\tanh(x)$ $\sin^{-1}(x)$ $\tan^{-1}(x)$.