



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Σημειώσεις Ανάλυσης I (ανανεωμένο στις 5 Δεκεμβρίου 2012)

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

1 Σειρές

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490-430 π.χ.) στη προσπάθειά του να υποστηρίξει τις απόψεις του Παρμενίδη (βλ. Πλάτωνος: Παρμενίδης 128α-δ) ότι τα πάντα είναι “ένα”, και ότι κάθε μεταβολή από μια κατάσταση σε μια άλλη, όπως και η κίνηση, είναι παραίσθηση και ασυμβίβαστη με τη λογική, κατασκεύασε διάφορα παράδοξα. Ένα από τα πιο γνωστά παράδοξα είναι αυτό του βέλους και του στόχου με το οποίο ο Ζήνων υποστηρίζει ότι το βέλος δεν μπορεί να φτάσει στο στόχο του: διότι πρώτα πρέπει να διανύσει τη μισή απόσταση, έπειτα τη μισή της υπόλοιπης απόστασης κ.ο.κ. και επομένως πάντα θα μένει κάποια απόσταση που πρέπει να διανύσει. Συνεπώς το βέλος δεν θα φτάσει ποτέ στο στόχο του. Το παράδοξο βασίζεται, εν μέρει, στην αντίληψη ότι δεν είναι δυνατόν προσθέτοντας ένα άπειρο αριθμό θετικών αριθμών να προκύψει κάποιος πεπερασμένος αριθμός. Όμως, αν το 0 είναι η αφετηρία του βέλους και ο στόχος βρίσκεται στο σημείο 1, τότε το διάστημα $[0, 1]$ μπορεί να χωριστεί σε τμήματα μήκους $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ οπότε είναι λογικό να γράψουμε ότι πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

Έχουμε δει ήδη από τη θεωρία των ακολουθιών ότι αυτή η ισότητα θα μπορούσε να εκλογικευθεί αν οριζόταν ως το όριο της ακολουθίας των αθροισμάτων

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}.$$

Ακολουθίες αθροισμάτων ονομάζονται σειρές και όταν αυτές οι ακολουθίες συγκλίνουν τότε γράφουμε ισότητες της μορφής:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Χρειάζεται όμως ιδιαίτερη προσοχή στο πώς χειριζόμαστε τα άπειρα αυτά αθροίσματα. Τα άπειρα αθροίσματα δεν ικανοποιούν αναγκαστικά τις αλγεβρικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την πρόσθεση πεπερασμένου αριθμού αριθμών.

Έτσι ενώ εάν $\alpha + \beta = \gamma$ τότε θα είναι $2\alpha + 2\beta = 2\gamma$, η ίδια ιδιότητα δεν ισχύει όταν τα α, β και γ είναι σειρές. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι προσθέτουμε τους άπειρους αριθμούς 2, 4, 8 και συμβολίζουμε αυτό το άθροισμα με σ και συμφωνούμε να γράφουμε ότι:

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \sigma .$$

Τότε αν δεχθούμε ότι ισχύουν οι συνήθεις κανόνες της άλγεβρας και πολλαπλασιάσουμε με $1/2$ θα έχουμε ότι

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \frac{\sigma}{2}$$

που οδηγεί στην σχέση

$$1 + \sigma = \frac{\sigma}{2}$$

η οποία σύμφωνα με τους κανόνες της άλγεβρας συνεπάγεται ότι πρέπει να είναι

$$\sigma = -2 ,$$

που προφανώς είναι λάθος, διότι δεν μπορεί να προκύψει αρνητικός αριθμός από πρόσθεση θετικών αριθμών.

Χρειάζεται λοιπόν προσοχή στο πώς χειρίζεται κανείς τις σειρές, και έχει σημασία να προσδιορίσουμε πότε μπορούμε να κάνουμε τις συνήθεις αριθμητικές πράξεις με αυτές. Η σύντομη απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι όταν οι σειρές είναι απολύτως συγκλίνουσες.

1.1 Συγκλίνουσες, Αποκλίνουσες, Απολύτως Συγκλίνουσες και Ημισυγκλίνουσες Σειρές

Μια σειρά $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ λέγεται συγκλίνουσα όταν η ακολουθία σ_n έχει όριο καθώς το $n \rightarrow \infty$. Αν μια σειρά δεν είναι συγκλίνουσα λέγεται αποκλίνουσα. Στη περίπτωση αυτή μπορεί να τείνει στο ∞ ή στο $-\infty$ ή να αιωρείται με φραγμένο πλάτος αιώρησης ή μη φραγμένο πλάτος αιώρησης. Π.χ. η σειρά $\sum_{i=1}^n (-1)^i$ είναι αποκλίνουσα και αιωρείται μεταξύ 1 και -1 , η σειρά $\sum_{i=1}^n 1$ αποκλίνει στο ∞ , ενώ η σειρά $\sum_{i=1}^n (-1 + (-1)^i)$ αποκλίνει στο $-\infty$.

Χωρίς υπερβολή η πιο χρήσιμη σειρά είναι η γεωμετρική:

$$\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i .$$

Επειδή

$$\sigma_n(x) = x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) = x \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

όταν $|x| < 1$ θα είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ οπότε η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στο $\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = x/(1 - x)$. Όταν $x = 1$ η σειρά αποκλίνει στο ∞ , ομοίως και όταν $x > 1$. Όταν $x = -1$ η σειρά αποκλίνει αιωρούμενη μεταξύ 1 και -1 , ενώ όταν $x < -1$ η σειρά αποκλίνει αιωρούμενη με μη φραγμένη αιώρηση. Συνεπώς η γεωμετρική σειρά συγκλίνει μόνον όταν $|x| < 1$.

Εάν μια σειρά είναι συγκλίνουσα και αποτελείται από θετικούς και αρνητικούς όρους μπορεί περαιτέρω να χαρακτηριστεί ως απολύτως συγκλίνουσα ή ημισυγκλίνουσα. Μια σειρά $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα όταν η σειρά $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ είναι συγκλίνουσα. Εάν η σειρά είναι μεν συγκλίνουσα όχι όμως και απολύτως συγκλίνουσα τότε η σειρά λέγεται ημισυγκλίνουσα. Είναι εύκολο να δούμε ότι η απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς. Δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο. Συνεπώς υπάρχουν ημισυγκλίνουσες σειρές. Η σειρά

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n}$$

είναι μια χαρακτηριστική ημισυγκλίνουσα σειρά. Η σειρά θα δείξουμε ότι συγκλίνει (στο $\log 2^1$), αλλά δεν είναι απολύτως συγκλίνουσα. Οι απόλυτες τιμές των όρων της σειράς αυτής σχηματίζουν την αρμονική σειρά

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n}$$

η οποία τείνει στο άπειρο, παρότι οι όροι της σειράς τείνουν στο μηδέν (σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα βρίσκεται σε συμφωνία με τα επιχειρήματα του Ζήνωνα) και η σειρά είναι ημισυγκλίνουσα. Η απόδειξη ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει βρίσκεται στο βιβλίο του Burkill (εδάφ. 2.11, σελ. 40-42).² Μάλιστα

¹ Αν και παλαιότερα συνηθιζόταν ο συμβολισμός $\ln 2$, ειδικά στη Φυσική δεν υπάρχει κανένα νόημα να σημειώνεται διαφορετικά ο νεπέρειος λογάριθμος από το δεκαδικό λογάριθμο. Ο λόγος είναι ότι ο αριθμός 10 δεν έχει καμία ιδιαίτερη φυσική σημασία, σε αντίθεση με τον αριθμό e που βρίσκεται πίσω από πλήθος φυσικών φαινομένων.

² Μια άλλη απόδειξη η οποία αναδεικνύει πιο καθαρά γιατί η σειρά αυτή αποκλίνει είναι η ακόλουθη: Έστω ότι η σειρά αυτή συγκλίνει στο s . Εάν αυτή η θετικών όρων σειρά συγκλίνει τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους συνηθισμένους κανόνες άλγεβρας που ισχύουν για πεπερασμένα αθροίσματα (θα το δείξουμε σε λίγο). Τότε η σειρά που απαρτίζεται από τους άρτιους όρους αυτής $1/2, 1/4, 1/6, \dots$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά το μισό της αρχικής σειράς, οπότε συγκλίνει στο $s/2$. Όμως τότε οι υπόλοιποι όροι (οι περιττοί) είναι αμιγώς μεγαλύτεροι από τους άρτιους ($1 >$

αποδεικνύεται εκεί ότι χρειάζονται 2^n όροι της σειράς για να ξεπεράσει το άθροισμα τον αριθμό $(n+1)/2$, δηλαδή ο αριθμός των όρων που απαιτείται για να γίνει το άθροισμα μεγαλύτερο από κάποιο αριθμό αυξάνει εκθετικά με τον αριθμό αυτό. Τα μερικά αθροίσματα δηλαδή της αρμονικής σειράς αυξάνουν λογαριθμικά με το πλήθος των όρων.

1.2 Θεμελιώδη θεωρήματα σύγκλισης σειρών

• **Θεώρημα 1.** Αν η σειρά $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ συγκλίνει τότε η α_n είναι μηδενική ακολουθία.

• **Απόδειξη:** Είναι $\alpha_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n$. Η ακολουθία όμως σ_n συγκλίνει, δηλαδή $\sigma_n \rightarrow \sigma$, αλλά και η $\sigma_{n+1} \rightarrow \sigma$ (ως υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας). Συνεπώς η α_n είναι μηδενική ακολουθία.

Η συνθήκη $\alpha_n \rightarrow 0$ είναι **ικανή** συνθήκη για την σύγκλιση της ακολουθίας $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, όχι όμως και **αναγκαία** διότι μπορεί μεν να ισχύει η $\alpha_n \rightarrow 0$ αλλά τελικά η σειρά να μην συγκλίνει, όπως συμβαίνει με την αρμονική σειρά.

Η πρόταση $\mathcal{A}$ είναι **ικανή** για την αλήθεια της $\mathcal{B}$, αν η $\mathcal{B}$ δεν είναι δυνατόν να είναι αληθής αν δεν ισχύει η $\mathcal{A}$, δηλαδή η ισχύς της πρότασης $\mathcal{B}$ συνεπάγεται οπωσδήποτε την αλήθεια της $\mathcal{A}$. Με άλλα λόγια η $\mathcal{A}$ είναι ικανή συνθήκη για τη $\mathcal{B}$ αν $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Η πρόταση $\mathcal{A}$ είναι **αναγκαία** για τη $\mathcal{B}$, αν η ισχύς της $\mathcal{A}$ συνεπάγεται την αλήθεια της $\mathcal{B}$, δηλαδή όταν $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Τέλος η $\mathcal{A}$ είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη όταν $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

• **Θεώρημα 2.** Αν όλοι όροι της σειράς $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ είναι θετικοί τότε αναγκαία και ικανή συνθήκη να συγκλίνει η σειρά είναι για κάθε N , $\sigma_N < K$. Το όριο δε της σειράς είναι $\sigma \leq K$.

• **Απόδειξη:** Αποδείξτε το ως άσκηση.

• **Θεώρημα 3.** Αν όλοι όροι της σειράς είναι θετικοί τότε η σειρά $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ συγκλίνει αν $\alpha_n < \beta_n$ και η σειρά $\sum_{i=1}^n \beta_i$ συγκλίνει.

$1/2, 1/3 > 1/4, 1/5 > 1/6, \dots$) και επομένως η σειρά που σχηματίζουν αυτούν ξεπερνά το $s/2$ τουλάχιστον κατά $1 - 1/2 = 1/2$ (τη διαφορά των πρώτων όρων των δύο σειρών). Όμως η δεύτερη σειρά θα όφειλε να έχει όριο το $s/2$. Επομένως ο αρχικός ισχυρισμός ότι συγκλίνει η σειρά είναι άτοπος.

• **Απόδειξη:** Αποδεικνύεται το ως άσκηση.

• **Θεώρημα 4.** Αν η σειρά $\sum \alpha_n$ συγκλίνει στο α , η σειρά $\sum \beta_n$ συγκλίνει στο β τότε η σειρά με όρους τους $\gamma_n = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n$ συγκλίνει στο $\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta$.

• **Απόδειξη:** Αποδεικνύεται το ως άσκηση.

• **Θεώρημα 5.** Αν η σειρά $\sum |\alpha_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum \alpha_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια μια απολύτως συγκλίνουσα σειρά είναι κατ' ανάγκη συγκλίνουσα.

• **Απόδειξη:** Θα ορίσουμε μια σειρά που αποτελείται από τους θετικούς μόνο όρους της $\sum \alpha_n$ και μια από τους αρνητικούς. Ορίζουμε τώρα τη σειρά με n -στό όρο $\beta_n = \alpha_n$ όταν $\alpha_n \geq 0$ και $\beta_n = 0$ αν $\alpha_n < 0$. Ομοίως ορίζουμε τη σειρά με όρους γ_n , όπου $\gamma_n = 0$ αν $\alpha_n \geq 0$ και $\gamma_n = -\alpha_n$ αν $\alpha_n < 0$. Οι δύο αυτές σειρές δεν έχουν αρνητικούς όρους και ισχύουν οι ισότητες:

$$\alpha_n = \beta_n - \gamma_n, \quad |\alpha_n| = \beta_n + \gamma_n.$$

Επειδή η $\sum |\alpha_n|$ συγκλίνει θα συγκλίνουν αναγκαστικά και η $\sum \beta_n$ και η $\sum \gamma_n$ (γιατί;) συνεπώς θα συγκλίνει και η $\sum \alpha_n$.

1.3 Σύγκλιση σειράς με όρους εναλλάξ θετικών και αρνητικών

Έστω τώρα μία σειρά με όρους εναλλάξ θετικών και αρνητικών, δηλαδή της μορφής:

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots$$

με $\alpha_n > 0$. Ας υποθέσουμε ότι οι όροι φθίνουν

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$$

και ότι σχηματίζουν μία μηδενική ακολουθία, θα αποδείξουμε ότι τότε η σειρά συγκλίνει.

Ας θεωρήσουμε τα αθροίσματα αρτίου πλήθους όρων:

$$\sigma_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \sigma_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4, \dots$$

Η ακολουθία σ_{2n} είναι αύξουσα

$$\sigma_2 < \sigma_4 < \sigma_6 < \dots < \sigma_{2n} < \dots$$

και επιπλέον είναι φραγμένη άνωθεν, διότι είναι

$$\sigma_{2n} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - \dots - (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}) - \alpha_{2n} < \alpha_1.$$

Συνεπώς η ακολουθία των αρτίου πλήθους αθροισμάτων σ_{2n} έχει όριο, το οποίο θα είναι μικρότερο ή ίσο με το α_1 .

Ας θεωρήσουμε τώρα τα αθροίσματα περιττού πλήθους όρων:

$$\sigma_1 = \alpha_1, \sigma_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \dots$$

Η ακολουθία σ_{2n-1} είναι φθίνουσα

$$\sigma_1 > \sigma_3 > \dots > \sigma_{2n-1} > \dots$$

και έχει ως κάτω φράγμα το σ_2 διότι:

$$\sigma_{2n+1} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}) + \alpha_{2n+1} > \alpha_1 - \alpha_2 = \sigma_2.$$

Συνεπώς θα έχει όριο το οποίο πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το σ_2 . Επειδή όμως

$$\alpha_{2n+1} = \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}$$

και η α_{2n+1} είναι μηδενική ακολουθία, θα είναι μηδενική και η $\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}$ και συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

Π.χ. η σειρά

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

συγκλίνει διότι και οι απόλυτες τιμές των διαδοχικών όρων φθίνουν και ορίζουν μηδενική ακολουθία. Το όριο δε πρέπει, σύμφωνα με τα παραπάνω, να βρίσκεται μεταξύ του $\alpha_1 = 1$ και του $\alpha_1 - \alpha_2 = 1/2$. Το όριο είναι $\log 2 = 0.6931 \dots$

1.4 Το άθροισμα μίας απολύτως συγκλινουσας σειράς είναι ανεξάρτητο της διάταξης των όρων

• **Θεώρημα 6.** Κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά έχει άθροισμα που είναι ανεξάρτητο της διάταξης των όρων.

• **Απόδειξη:** Θεωρούμε τη σειρά $\sum \alpha_n$ η οποία είναι απολύτως συγκλίνουσα. Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα $\sum \alpha_n$ δεν εξαρτάται από τη διάταξη των όρων. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A: Η σειρά $\sum \alpha_n$ έχει μόνο θετικούς όρους και είναι συγκλίνουσα.

Σχηματίζουμε τότε τη σειρά $\sum \beta_n$ η οποία έχει τους ίδιους όρους με την $\sum \alpha_n$ αλλά σε άλλη διάταξη, δηλαδή κάθε όρος β_n είναι ίσος με κάποιο

όρο $\alpha_{p(n)}$ της αρχικής σειράς, έτσι ώστε τελικά όλοι οι όροι της $\sum \alpha_n$ να συμπεριλαμβάνονται στην $\sum \beta_n$ (η $p(n)$ είναι μία 1-1 απεικόνιση μεταξύ των φυσικών αριθμών, η οποία λέγεται και μετάθεση). Έχουμε υποθέσει ότι η $\sum \alpha_n$ συγκλίνει στον αριθμό σ . Συμβολίζουμε το άθροισμα των n πρώτων όρων της $\sum \alpha_n$ με σ_n και αντιστοίχως με s_ν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$. Για οποιαδήποτε τιμή του ν υπάρχει $n \geq \nu$ τέτοιο ώστε όλοι οι όροι της $\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$ να συμπεριλαμβάνονται στο άθροισμα $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ (θα είναι $n = \max_{i=1, \dots, \nu} (p^{-1}(i))$), και επομένως πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$s_\nu \leq \sigma_n < \sigma$$

Συνεπώς η s_ν έχει άνω φράγμα και όντας αύξουσα (επειδή αποτελείται μόνο από θετικούς όρους) συγκλίνει σε ένα αριθμό s που σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να είναι:

$$s \leq \sigma .$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η ανισότητα:

$$\sigma \leq s .$$

Έχοντας αποδείξει ότι $\sum \beta_n \rightarrow s$, αντιστρέφοντας το ρόλο των σειρών $\sum \beta_n$ και $\sum \alpha_n$ στο προηγούμενο επιχείρημα καταλήγουμε στην παραπάνω ανισότητα. Συνεπώς

$$s = \sigma$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι κάθε συγκλίνουσα σειρά θετικών όρων έχει άθροισμα που δεν εξαρτάται από τη διάταξη των όρων της.

B: Η σειρά έχει θετικούς και αρνητικούς όρους και είναι απολύτως συγκλίνουσα.

Θα έχουμε αποδείξει ότι το άθροισμα της σειράς είναι ανεξάρτητο της διάταξης των όρων της, αν αποδείξουμε ότι ανεξαρτήτως διατάξεως των όρων το άθροισμα της σειράς είναι πάντοτε ίσο με τη διαφορά των σειρών $\sum x_n - \sum y_n$ όπου $x_n = \alpha_n$ όταν $\alpha_n \geq 0$ αλλιώς $x_n = 0$ και $y_n = 0$ όταν $\alpha_n \geq 0$ αλλιώς $y_n = -\alpha_n$ όταν $\alpha_n < 0$. Και οι δύο σειρές, $\sum x_n, \sum y_n$ έχουν θετικούς όρους και συγκλίνουν³, οπότε η διαφορά $\sum x_n - \sum y_n$ ορίζεται. Το άθροισμα της σειράς $\sum \alpha_n$ το γράφουμε X , ενώ το άθροισμα των πρώτων n όρων της σειράς το συμβολίζουμε με X_n , αντιστοίχως το άθροισμα της

³Διότι αν $\Sigma = \sum |\alpha_n|$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum x_n$ και $\sum y_n$ σχηματίζουν αύξουσες ακολουθίες που και οι δύο έχουν άνω φράγμα το Σ και συνεπώς και οι δύο συγκλίνουν.

$\sum y_n$ το γράφουμε Y και τα αντίστοιχα αθροίσματα των πρώτων n όρων με Y_n .

Ας θεωρήσουμε το άθροισμα σ_n των πρώτων n όρων της σειράς $\sum \alpha_n$. Θα ισχύει προφανώς η ισότητα:

$$\sigma_n = X_n - Y_n ,$$

η οποία θα ισχύει για κάθε τιμή του n . Επειδή όμως $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ και

$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$, το άθροισμα σ της σειράς $\sum \alpha_n$ είναι

$$\sigma = X - Y,$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι είναι:

$$\sum \alpha_n = \sum x_n - \sum y_n .$$

Επειδή επιπλέον οι σειρές $\sum x_n$ και $\sum y_n$ είναι συγκλίνουσες και έχουν θετικούς όρους το άθροισμα τους είναι ανεξάρτητο από τη διάταξη των όρων. Συνεπώς σε οποιαδήποτε διάταξη και να τοποθετηθούν οι όροι της $\sum \alpha_n$ το άθροισμα της σειράς θα είναι το ίδιο.

Εν συντομία θα λέγαμε ότι αφού η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα οι μερικές σειρές των θετικών και αρνητικών όρων θα είναι και αυτές συγκλίνουσες και αφού απαρτίζονται η καθεμιά από όρους σταθερού προσήμου μπορούν οι όροι τους να διαταχθούν με οποιονδήποτε τρόπο σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

Το θεώρημα αυτό το οφείλουμε στον Dirichlet.

1.5 Μια αναπάντεχη πρόταση: Το άθροισμα μίας ημισυγκλίνουσας σειράς μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή με αναδιάταξη των όρων

Έστω η ημισυγκλίνουσα σειρά $\sum \alpha_n$ με άθροισμα των πρώτων n όρων σ_n η οποία έχει μέν όριο $\sigma = \sum \alpha_n$, αλλά η σειρά $\sum |\alpha_n|$ αποκλίνει. Θα δείξουμε ότι με αναδιάταξη των όρων της $\sum \alpha_n$ μπορούμε να καταλήξουμε σε οποιοδήποτε άθροισμα, έστω το A .

Σχηματίζουμε με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δύο θετικές σειρές από τους θετικούς και τους αρνητικούς όρους της αρχικής σειράς, με την ίδια σειρά που εμφανίζονται στην αρχική σειρά. Η σειρά που αντιστοιχεί

στους θετικούς όρους είναι η $\sum x_n$, με άθροισμα των πρώτων n όρων X_n , και η σειρά που αντιστοιχεί στους αρνητικούς όρους είναι η $\sum y_n$ με άθροισμα των πρώτων n όρων Y_n . Θα είναι

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = X_n + Y_n .$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι εφόσον οι απόλυτες τιμές της σειράς αποκλίνουν ότι αναγκαστικά και οι δύο ακολουθίες X_n και Y_n θα πρέπει να αποκλίνουν. Πράγματι, αν η X_n είχε όριο τότε επειδή

$$\sigma_n = X_n - Y_n$$

θα είναι

$$Y_n = X_n - \sigma_n .$$

Απο την ισότητα αυτή προκύπτει η σύγκλιση της Y_n διότι η σ_n είναι συγκλίνουσα εξ' υποθέσεως. Αυτό όμως συνεπάγεται και την απόλυτη σύγκλιση της $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ που οδηγεί σε άτοπο διότι η σειρά έχει υποθεθεί ημισυγκλίνουσα. Με τον ίδιο τρόπο αποκλείουμε να συγκλίνει μόνο η Y_n . Συνεπώς οι X_n και Y_n αποκλίνουν.

Τώρα θα κατασκευάσουμε μια αναδιάταξη των όρων της $\sum \alpha_n$ που θα έχει όριο οποιοδήποτε αριθμό A . Αρχίζω παίρνοντας από την $\sum x_n$ όσους όρους απαιτούνται για να έχω άθροισμα μόλις μεγαλύτερο από τον αριθμό A . Δηλαδή, έστω ότι

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n_1} > A \quad , \text{ και } x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n_1-1} \leq A$$

και συμβολίζουμε την πρώτη ανισότητα με

$$\Sigma_{n_1} > A$$

Έπειτα προσθέτω όσους όρους από την $\sum y_n$ απαιτούνται για να έχω άθροισμα μόλις μικρότερο από τον αριθμό A . Δηλαδή

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n_1} - y_1 - y_2 - \cdots - y_{n_2} < A \quad ,$$

και

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n_1} - y_1 - y_2 - \cdots - y_{n_2-1} \geq A$$

και συμβολίζουμε την ανισότητα που ικανοποιείται από το άθροισμα των $n_1 + n_2$ όρων της σειράς που κατασκευάσαμε:

$$\Sigma_{n_1+n_2} < A .$$

Με τον τρόπο αυτό θα έχω $\Sigma_{n_1+n_2+n_3} > A$ και $\Sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4} < A$ κ.ο.κ. Επειδή η διαφορά

$$|\Sigma_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_k} - A|$$

είναι εκ κατασκευής μικρότερη του x_{n_k} ή του y_{n_k} και είναι $x_n \rightarrow 0$ και $y_n \rightarrow 0$ (βλ. εδάφ. 1.2 -Θ.1) θα συγκλίνει η αναδιάταξη της σειράς που κατασκευάσαμε στον αριθμό A .

Την παρατήρηση αυτήν την οφείλουμε στον Riemann.

• **Παρατήρηση.** Το γεγονός ότι μόνο στις αμιγώς συγκλίνουσες σειρές (όχι όμως στις ημισυγκλίνουσες) έχουμε τη δυνατότητα να αναδιατάσσουμε τους όρους χωρίς να αλλάζουμε το αποτέλεσμα της σειράς, μας δίνει τη δυνατότητα να τις χειριζόμαστε αυτές όπως ακριβώς και τους αριθμούς: να τις πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς, να τις προσθέτουμε ή ακόμη και να τις πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους. Αυτό είναι εξαιρετικής σημασίας στη Φυσική, όπου έχουμε να κάνουμε συχνά με συναρτήσεις που αντιπροσωπεύονται από τέτοιες σειρές τις οποίες τις χειριζόμαστε με την ίδια αλγεβρική άνεση που χειριζόμαστε και τους απλούς αριθμούς.