ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Σημειώσεις Ανάλυσης Ι

(ανανεωμένο στις 20 Νοεμβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

1 Ακολουθίες - Όρια ακολουθιών

Έστω η ακολουθία (μια αριθμημένη σειρά δηλαδή) των αριθμών:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, \ldots$$

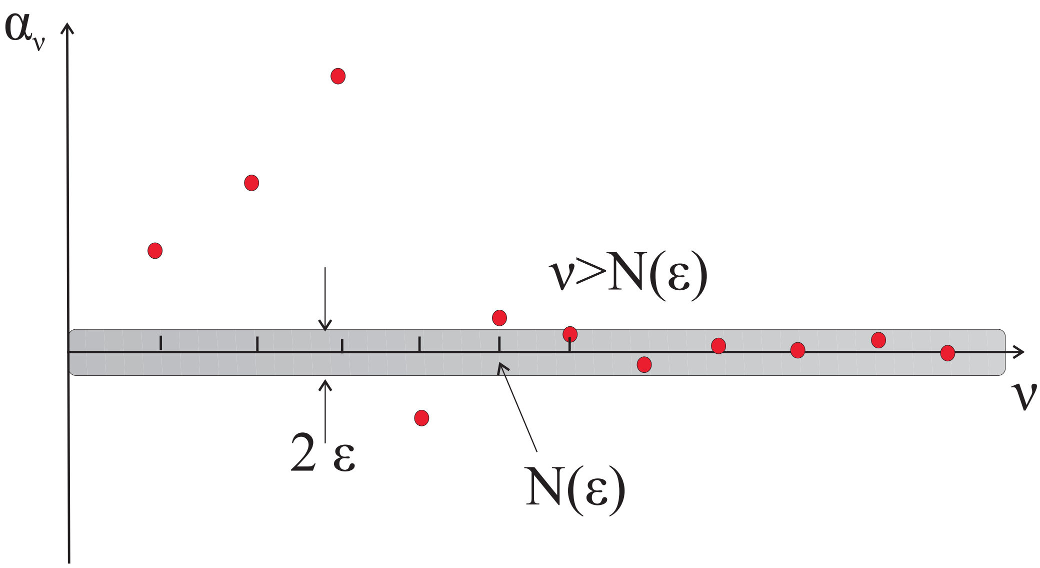
με ν-οστό στοιχείο της ακολουθίας το a_ν. Η ακολουθία ορίζεται πλήρως με τον προσδιορισμό του τύπου που δίνει το ν-οστό στοιχείο της. Π.χ. αν δίνεται $a_\nu = 1/\nu$, εννοούμε την ακολουθία:

$$(a) \;\; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Είναι προφανές ότι σε αυτή την ακολουθία για κάθε θετικό αριθμό ϵ, οσοδήποτε μικρός κι αν είναι αυτός, υπάρχει όρος της ακολουθίας τέτοιος ώστε όλοι οι επόμενοι όροι της ακολουθίας να είναι μικρότεροι του ϵ. Π.χ. αν $\epsilon = 2/12357$, αρκεί να λάβω από την ακολουθία a_ν τον 12357ο όρο αυτής, δηλαδή τον a_{12357}. Αυτός και όλοι οι επόμενοί του, είναι προφανώς μικρότεροι του ϵ. Αυτό συμβαίνει φυσικά για οποιαδήποτε θετική τιμή και αν δώσουμε στον ϵ. Οι ακολουθίες που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται **μηδενικές ακολουθίες**. Στην πραγματικότητα, ακόμη και ακολουθίες που δεν είναι φθίνουσες, όπως η παραπάνω, αλλά καταφέρνουν να συγκεντρώνουν όλους τελικά τους όρους τους (δηλαδή από κάποιον όρο και πάνω) εντός μιας οσοδήποτε λεπτής "ζώνης" γύρω από το μηδέν, είναι μηδενικές.

> **Ορισμός**: Η a_ν είναι μηδενική ακολουθία εάν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N (ο οποίος εξαρτάται συνήθως από το ϵ) τέτοιος ώστε όλοι οι επόμενοι όροι της ακολουθίας, δηλ. οι όροι με δείκτη $\nu > N$, να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότεροι του ϵ, δηλ. $|a_\nu| < \epsilon$.

Για να δείξουμε ότι μία ακολουθία είναι μηδενική αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε για κάθε ϵ ένα κατάλληλο $N(\epsilon)$ ώστε $|a_\nu| < \epsilon$ για κάθε $\nu > N(\epsilon)$. Αυτό



Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση μιας γενικής μηδενικής ακολουθίας (και κατ' επέκταση κάθε ακολουθίας με όριο).

μπορεί να γίνει κατασκευάζοντας στήλες με τα ϵ και τα αντίστοιχά τους $N(\epsilon)$. Για παράδειγμα θεωρήστε την ακολουθία

$$a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu}} \; .$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε την εξής λίστα τιμών

ϵ	$N(\epsilon)$
1	1
0.1	10^2
0.001	10^6
0.00001	10^{10}

Μάλιστα, αν για κάθε επιλογή ϵ επιλέξουμε $N > 1/\epsilon^2$, τότε όλοι οι όροι μετά τον Nοστό είναι πράγματι μικρότεροι του ϵ και συνεπώς η ακολουθία είναι μηδενική.

Παρατηρήσεις:

- Μία ακολουθία μπορεί να είναι μηδενική παρότι ένας πεπερασμένος αριθμός όρων αυτής μπορεί να είναι εξαιρετικά μεγάλος, π.χ. η ακολουθία $a_\nu = 10^{100}/(\nu - 10^6)$ είναι μηδενική (προφανώς γι' αυτή την ακολουθία δεν υπάρχει ο a_{10^6} όρος). Μάλιστα, κάθε μηδενική ακολουθία είναι εξ' ορισμού αναγκαστικά *φραγμένη* (και άνω και κάτω).

- Μία μηδενική ακολουθία μπορεί να περιέχει ή να μην περιέχει το μηδέν. Για παράδειγμα η $a_\nu = \nu^{-1}\sin(\nu\pi/10)$ είναι μηδενική ακολουθία που παίρνει την τιμή μηδέν $a_\nu = 0$ όταν το ν είναι πολλαπλάσιο του 10. Αντιθέτως η $a_\nu = 1/\nu$ είναι μηδενική αν και κανείς όρος της δεν είναι μηδενικός.

Ιδιότητες των μηδενικών ακολουθιών

(α) Αν η a_ν και η b_ν είναι μηδενικές ακολουθίες, τότε και η $a_\nu + b_\nu$ είναι μια μηδενική ακολουθία.

Απόδειξη: Αφού η a_ν και η b_ν είναι μηδενικές ακολουθίες, για κάθε $\epsilon/2$ υπάρχει $N_a(\epsilon/2)$ και $N_b(\epsilon/2)$ ώστε $|a_\nu| < \epsilon/2$ για κάθε $\nu > N_a$ και $|b_\nu| < \epsilon/2$ για κάθε $\nu > N_b$. Συνεπώς αν λάβουμε ως N τον μεγαλύτερο από τους N_a και N_b, τότε όλοι οι όροι των ακολουθιών με δείκτες $\nu > N$ θα ικανοποιούν συγχρόνως τις ανισότητες:

$$-\frac{\epsilon}{2} < a_\nu < \frac{\epsilon}{2} \quad , \quad -\frac{\epsilon}{2} < b_\nu < \frac{\epsilon}{2},$$

και προσθέτοντας

$$-\epsilon < a_\nu + b_\nu < \epsilon.$$

(β) Αν η a_ν είναι μηδενική ακολουθία και η b_ν μια φραγμένη ακολουθία, τότε η $a_\nu b_\nu$ είναι μηδενική.

Απόδειξη: Επειδή η b_ν είναι φραγμένη υπάρχει M έτσι ώστε $|b_\nu| < M$ για κάθε ν, και επειδή η a_ν είναι μηδενική ακολουθία για κάθε θετικό αριθμό ϵ/M, υπάρχει N έτσι ώστε $|a_\nu| < \epsilon/M$ για κάθε $\nu > N$. Συνεπώς

$$|b_\nu a_\nu| < M|a_\nu| < \epsilon,$$

για όλα τα $\nu > N$, και συνεπώς η $a_\nu b_\nu$ είναι μηδενική ακολουθία.

(γ) Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι αν μια μηδενική ακολουθία a_ν πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά b (θετική ή αρνητική), η ακολουθία ba_ν θα είναι και αυτή μηδενική.

Κατανοώντας τι σημαίνει μηδενική ακολουθία μπορούμε να προχωρήσουμε και σε ακολουθίες των οποίων το όριο είναι κάποιος άλλος αριθμός, διαφορετικός από το μηδέν. Όπως και με τις μηδενικές, αρκεί όλοι τελικά οι όροι της ακολουθίας (από κάποιον όρο και μετά) να βρίσκονται εντός μιας οσοδήποτε λεπτής ζώνης γύρω από τον αριθμό αυτό.

Ορισμός: Η ακολουθία a_ν έχει όριο το a εάν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N, έτσι ώστε $|a_\nu - a| < \epsilon$ για κάθε $\nu > N$, δηλ. όταν η ακολουθία $a_\nu - a$ είναι μηδενική.

Κάθε ακολουθία λοιπόν με κάποιο όριο έχει παρόμοια συμπεριφορά με τις μηδενικές.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο είδος ακολουθιών, με όριο όχι κάποιο πραγματικό αριθμό αλλά το άπειρο. Τα στοιχεία ακολουθιών, όπως η ακολουθία των φυσικών αριθμών

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots,$$

έχουν την ιδιότητα να γίνονται μετά απο κάποιο δείκτη N μεγαλύτερες από οποιονδήποτε αριθμό (το N εξαρτάται εν γένει από τον αριθμό που έχουμε επιλέξει). Τέτοιες ακολουθίες λέγεται ότι τείνουν στο συν άπειρο που συμβολίζεται με $+\infty$.

> **Ορισμός**: Η ακολουθία a_ν τείνει στο άπειρο εάν για κάθε θετικό αριθμό M υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $N(M)$, που εξαρτάται εν γένει από τον M έτσι ώστε $a_\nu > M$ για κάθε $\nu > N(M)$. Συμβολικά γράφουμε σε αυτή την περίπτωση:
>
> $$a_\nu \to +\infty \ .$$

Προσέξτε ότι εδώ το ∞ είναι ένα σύμβολο και όχι κάποιος αριθμός και δεν έχουν ορισθεί πράξεις με αυτό, δηλ. οι πράξεις $a + \infty$ κ.λπ. δεν ορίζονται, ούτε η σχέση $a = \infty$ έχει νόημα. Το σύμβολο αυτό δηλώνει αριθμούς που μεγαλώνουν αενάως, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.

Κατ' αναλογία ορίζουμε ότι η ακολουθία a_ν τείνει στο μείον άπειρο εάν για κάθε θετικό αριθμό M υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $N(M)$, τέτοιος ώστε $a_\nu < -M$ για κάθε $\nu > N$ και γράφουμε σε αυτή την περίπτωση $a_\nu \to -\infty$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο, π.χ. η $a_\nu = (-1)^\nu$. Οι ακολουθίες αυτές λέμε ότι ταλαντώνονται (είτε πεπερασμένα όπως η παραπάνω, είτε απεριόριστα όπως η $a_\nu = (-1)^\nu \nu$).

Μερικές βασικές ιδιότητες των ορίων:

(α) Το όριο μίας ακολουθίας είναι μοναδικό, δηλ. αν $a_\nu \to a$ και $a_\nu \to b$ θα είναι οπωσδήποτε $a = b$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι a, b δεν είναι ίσοι (και χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ανισότητα $a < b$). Εξ' ορισμού για κάθε ϵ υπάρχει δείκτης $\nu_1(\epsilon)$ ώστε για κάθε $\nu > \nu_1$ να είναι $|a_\nu - a| < \epsilon$. Ομοίως, υπάρχει $\nu_2(\epsilon)$ έτσι ώστε για $\nu > \nu_2$ να είναι $|a_\nu - b| < \epsilon$. Αν επιλέξουμε $\epsilon = (b - a)/2$ και ως N τον μεγαλύτερο από τους $\nu_1(\frac{b-a}{2})$ και $\nu_2(\frac{b-a}{2})$, τότε για $\nu > N$ προκύπτει από την πρώτη και δεύτερη σχέση ότι

$$|a_\nu - a| < \frac{b-a}{2} \quad , \quad |a_\nu - b| < \frac{b-a}{2}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι αν αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές θα καταλήξουμε στο παράλογο αποτέλεσμα

$$a_\nu < \frac{b+a}{2} \quad \text{και} \quad a_\nu > \frac{b+a}{2} \ !$$

Συνεπώς $a = b$. Η πρόταση είναι προφανής εφόσον έχει κατανοήσει κανείς την έννοια του ορίου.

(β) Αν μία ακολουθία είναι σταθερή, δηλ. $a_\nu = a$, τότε $a_\nu \to a$.

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι οσοδήποτε κοντά στο a, για την ακρίβεια είναι σε μηδενική απόσταση από το a.

(γ) Αν $a_\nu \to a$ και $b_\nu \to b$ τότε $a_\nu + b_\nu \to a + b$ και $a_\nu b_\nu \to ab$.

Απόδειξη: Οι $a_\nu - a$ και $b_\nu - b$ είναι μηδενικές ακολουθίες, συνεπώς και το άθροισμά τους $(a_\nu + b_\nu) - (a+b)$ είναι μηδενική ακολουθία. Άρα $a_\nu + b_\nu \to a + b$. Για το γινόμενο ακολουθιών χρησιμοποιούμε την ανισότητα:

$$|a_\nu b_\nu - ab| \leq |a_\nu b_\nu - a_\nu b| + |a_\nu b - ab| = |a_\nu||b_\nu - b| + |b||a_\nu - a|.$$

Η a_ν είναι φραγμένη αφού έχει όριο, και η $b_\nu - b$ είναι μηδενική, απομένως η $a_\nu(b_\nu - b)$ είναι μηδενική. Ταυτόχρονα και η $b(a_\nu - a)$ είναι μηδενική (ως σταθερή επί μηδενική). Επομένως η $a_\nu b_\nu - ab$ είναι μηδενική, ό.έ.δ. Στην απόδειξη αυτή φαίνεται γιατί αρχικά ορίσαμε τη μηδενική ακολουθία και της ιδιότητές της, μετατοπίζοντας το ερώτημα για το άθροισμα και το γινόμενο ακολουθιών με όρια στο όριο μηδενικών ακολουθιών.

(δ) Αν $a_\nu \to a$ και $a \neq 0$ τότε $\frac{1}{a_\nu} \to \frac{1}{a}$.

Απόδειξη: Μπορεί κανείς να ακολουθήσει τις γραμμές της προηγούμενης απόδειξης για το γινόμενο.

Με την διαδοχική χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων μπορούμε να υπολογίσουμε τα όρια σύνθετων παραστάσεων. Π.χ. Να βρεθεί το όριο όταν $\nu \to \infty$ της ακολουθίας:

$$\alpha_\nu = \left(\frac{\nu - 3}{3\nu + 1}\right)^3 .$$

Εργαζόμαστε ως εξης: σχηματίζουμε μηδενικές ακολουθίες γράφοντας την παράσταση στη μορφή:

$$\left(\frac{1 - 3/\nu}{3 + 1/\nu}\right)^3 .$$

Επειδή η $1/\nu$ είναι μηδενική θα έχουμε τα όρια $1 - \frac{3}{\nu} \to 1$ και $3 + \frac{1}{\nu} \to 3$ και συνεπώς

$$\left(\frac{\nu - 3}{3\nu + 1}\right)^3 \to \frac{1}{3^3} .$$

2 Αύξουσες και φθίνουσες ακολουθίες

Ορισμός: Η ακολουθία a_ν είναι αύξουσα αν $a_{\nu+1} \geq a_\nu$ για κάθε ν. Λέγεται γνησίως αύξουσα αν για κάθε ν είναι: $a_{\nu+1} > a_\nu$. Ομοίως η ακολουθία a_ν είναι φθίνουσα αν $a_{\nu+1} \leq \alpha_\nu$ για κάθε ν και γνησίως φθίνουσα αν για κάθε ν είναι: $a_{\nu+1} < a_\nu$. Μία ακολουθία χαρακτηρίζεται *μονότονη*, αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

Θα αποδείξουμε τώρα το θεμελιώδες θεώρημα ότι οι μονότονες ακολουθίες τείνουν σε κάποιο όριο αν δεν τείνουν στο ∞ ή στο $-\infty$. Θα θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση των αυξουσών ακολουθιών.

Θεώρημα: Έστω η αύξουσα ακολουθία a_ν. Η ακολουθία αυτή θα τείνει αναγκαστικά στο άπειρο ή σε κάποιο όριο. Όταν η αύξουσα ακολουθία είναι επιπλέον και φραγμένη τότε τείνει αναγκαστικα σε κάποιο όριο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Υπάρχει κάποιος αριθμός A έτσι ώστε είναι $a_\nu \leq A$ για κάθε ν.
(ii) Για κάθε αριθμό A υπάρχει πάντα δείκτης N τέτοιος ώστε $a_N > A$.

Στην (ii) περίπτωση επειδή η a_ν είναι αύξουσα προκύπτει ότι για κάθε A, οσοδήποτε μεγάλο, υπάρχει δείκτης N έτσι ώστε όλοι οι επόμενοι όροι της ακολουθίας είναι $a_\nu > A$. Συνεπώς η ακολουθία τείνει στο ∞.

Μένει η (i) περίπτωση, στην οποία η ακολουθία είναι φραγμένη. Επειδή τα στοιχεία της ακολουθίας a_ν είναι άνωθεν φραγμένα έχουν σύμφωνα με το θεώρημα του supremum ένα ανώτερο πέρας ξ που είναι και αυτό άνω φράγμα, δηλ. όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $a_\nu < \xi$, και για κάθε ϵ, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ο όρος N της ακολουθίας που θα είναι: $a_N > \xi - \epsilon$ (διότι αλλιώς το ανώτερο πέρας θα ήταν το $\xi - \epsilon$). Επιπλέον, επειδή η a_ν είναι αύξουσα, θα είναι και $a_\nu > \xi - \epsilon$ για κάθε $\nu > N$. Συνεπώς όλοι οι όροι μετά τον N-οστό θα βρίσκονται στο διάστημα $\xi - \alpha_\nu < \epsilon$, άρα $\alpha_\nu \to \xi$.

Το αντίστοιχο θεώρημα για τις φθίνουσες ακολουθίες αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι αν η α_ν είναι φθίνουσα τότε η $-\alpha_\nu$ είναι αύξουσα.

3 Σημαντικές ανισότητες

Στο εδάφιο αυτό θα παραθέσουμε μια σειρά από πολύ σημαντικές ανισότητες, τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όταν διερευνούμε την ύπαρξη ή μη ορίου διαφόρων ακολουθιών.

3.1 Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

Η πρώτη ανισότητα αφορά τους n θετκούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ και τη σχέση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών αυτών:

$$\Gamma = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$$

και του αριθμητικού μέσου αυτών:

$$A = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} .$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\Gamma \leq A$$

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι η ισότητα ισχύει μόνον όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$. Θα παραθέσουμε την κατασκευαστική απόδειξη που έδωσε ο Cauchy (1820). Αν το $n = 2$ η πρόταση αληθεύει, διότι τότε είναι προφανώς:

$$\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Η πρόταση αληθεύει όταν $n = 4$, διότι ισχύει ανά 2 . Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} &= \left((\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} (\alpha_3 \alpha_4)^{1/2}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} . \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει η πρόταση όταν $n = 2^k$. Θεωρήστε τώρα ότι ο n δεν είναι δύναμη του 2. Τότε θα υπάρχει $N = 2^k > n$ και το θεώρημα θα ισχύει για τους N ακόλουθους αριθμούς $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, A, \ldots, A$, όπου ο A είναι ο αριθμητικός μέσος των πρώτων n αριθμών ενώ το πλήθος των A είναι $N - n$. Αν Γ είναι ο γεωμετρικός μέσος των πρώτων n αριθμών τότε για τους N αριθμούς θα ισχύει η ανισότητα

$$\Gamma^{n/N} A^{(N-n)/N} = \sqrt[N]{\Gamma^n A^{(N-n)}} \leq \frac{nA + (N-n)A}{N} = A,$$

όπου το nA που εμφανίζεται στην αρχή του δεξιού σκέλους (μετά την ανισότητα) είναι απλώς επαναγραφή του αθροίσματος των πρώτων n αριθμών. Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$\Gamma^{n/N} \leq A^{n/N}$$

και συνεπώς η πρόταση $\Gamma < A$.

3.2 Ανισότητες Bernoulli

$$(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha, \text{ αα} \geq -1 \text{ κ } r > 1$$

και

$$(1+\alpha)^r < 1 + r\alpha, \text{ αα} \geq -1 \text{ κ } 0 \geq r < 1$$

Θα αποδείξουμε τις ανισότητες αυτές για ρητό $r = p/q$. Ας υποθέσουμε κατά αρχάς ότι $0 < r = p/q < 1$ δηλαδή $0 < p < q$.
Λαμβάνουμε q αριθμούς, από τους οποίους οι p είναι ίσοι με $1+\alpha$ και οι υπόλοιποι $q-p$ είναι 1. Για τους αριθμούς αυτούς ο γεωμετρικός μέσος είναι

$$\Gamma = \sqrt[q]{(1+\alpha)^p} = (1+\alpha)^{p/q}$$

και ο αριθμητικός μέσος είναι

$$A = \frac{p(1+\alpha)+q-p}{q} = 1 + \frac{p}{q}\alpha.$$

Εφόσον $\alpha > -1$, και οι δύο μέσοι A, Γ είναι θετικοί και θα ισχύει η ανισότητα $\Gamma \leq A$, άρα:

$$(1+\alpha)^{p/q} \leq 1 + \frac{p}{q}\alpha, \;\; p/q < 1, \;\; \alpha \geq -1.$$

Συνεπώς απεδείχθη η σχέση για $r = p/q < 1$. Αν γράψουμε την παραπάνω ανισότητα ως

$$1+\alpha \leq \left(1 + \frac{p}{q}\alpha\right)^{q/p}$$

και θέσουμε $\beta = p\alpha/q$ τότε η ανισότητα είναι

$$(1+\beta)^{q/p} \geq 1 + \frac{q}{p}\beta$$

που αποδεικνύει την ανισότητα για $r > 1$ αν $\beta \geq -1$.

4 Μερικές σημαντικές ακολουθίες

(1) Θεωρήστε πρώτα την ακολουθία $a_\nu = a^\nu$ και την συμπεριφορά της στο όριο $\nu \to \infty$.

- Εάν $a = 1$ τότε όλοι οι όροι είναι $a_\nu = 1$ και το όριο είναι το 1. Ομοίως αν $a = 0$, το όριο είναι το μηδέν.

- Εάν $a > 1$ τότε $a = 1 + k$ με $k > 0$ και έχουμε την ανισότητα [1]

$$a_\nu = (1+k)^n > 1 + nk\ .$$

  Επειδή $1 + nk \to \infty$ και η ακολουθία $\alpha_\nu \to \infty$ θα τείνει στο άπειρο.

- Αν $0 < a < 1$ η ακολουθία $b_\nu = 1/a_\nu > 1$ τείνει στο άπειρο ($b_\nu \to \infty$) και επομένως είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $a_\nu = 1/b_\nu$ είναι μηδενική.

- Αν $-1 < a < 0$ τότε η ακολουθία $b_\nu = |a_\nu|$ είναι μηδενική και συνεπώς και η a_ν είναι μηδενική.

- Αν $\alpha_\nu = -1$, η ακολουθία λαμβάνει διαδοχικά τις τιμές -1 και 1, οπότε δεν έχει όριο αλλά είναι φραγμένη.

- Αν $\alpha_\nu < -1$, η υπακολουθία που αποτελείται από τους άρτιους όρους της ακολουθίας τείνει στο άπειρο, ενώ η υπακολουθία που αποτελείται από τους περιττούς όρους τείνει στο μείον άπειρο. Συνεπώς η ακολουθία ταλαντώνεται απεριόριστα και δεν έχει όριο (ούτε είναι και φραγμένη).

(2) Θεωρήστε τώρα την ακολουθία $x^{1/n}$ με $x > 0$, δηλαδή την ακολουθία

$$x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}, \cdots$$

---

[1] Η ανισότητα αυτή για n θετικό ακέραιο προκύπτει και από το διωνυμικό ανάπτυγμα, δηλαδή:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots \binom{n}{l} x^{n-l} y^l + \ldots y^n$$

όπου

$$\binom{n}{l} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)}{l!} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

με $0! \equiv 1$. Το ανάπτυγμα προκύπτει από τον υπολογισμό του γινομένου $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$ που αποτελείται από το άθροισμα όρων της μορφής $x^{n-l}y^l$ όπου το l παίρνει τιμές από το 0 έως το n. Ο αριθμός των όρων στους οποίους εμφανίζεται ο y^l είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων που μπορώ να επιλέξω l ίδια αντικείμενα, τα y, από ένα διαθέσιμο σύνολο n. Το πρώτο μπορώ να το επιλέξω με n τρόπους. Έχοντας επιλέξει το πρώτο, το δεύτερο μπορεί να επιλεγεί με $n-1$ τρόπους κ.ο.κ. μέχρι το l που απομένουν $n-l+1$ τρόποι. Συνεπώς το y^l μπορεί να επιλεγεί με $n(n-1)\ldots(n-l+1)/l!$ διαφορετικούς τρόπους διότι τα αντικείμενα είναι ίδια και ο προηγούμενος αριθμός πρέπει να διαιρεθεί διά του αριθμού των μεταθέσεων αυτών των ιδίων αντικειμένων, που είναι $l!$. Στην περίπτωση μας έχουμε

$$(1+k)^n = 1 + nk + \frac{n(n-1)}{2!} k^2 + \ldots + k^n\ .$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του αναπτύγματος $(x+y)^n$, είναι ο απευθείας υπολογισμός του για $n = 1, 2, 3$ και στη συνέχεια η απόδειξη της γενικής μορφής με την επαγωγική μέθοδο.

Αν $x > 1$ θα είναι $x^{1/n} > 1$ και συνεπώς το 1 είναι κάτω φράγμα. Επίσης επειδή $x^{1/n} > x^{1/(n+1)}$ η ακολουθία είναι φθίνουσα. Συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο όριο $\alpha \geq 1$. Αν όμως $\alpha > 1$ τότε επειδή $x^{1/n} > \alpha$ θα είναι $x > \alpha^n$ για κάθε n, οσοδήποτε μεγάλο. Αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι σύμφωνα με το (1) $\alpha^n \to \infty$ και επομένως δεν μπορεί να φραχθεί από πάνω από κανένα αριθμό. Συνεπώς η ακολουθία συγκλίνει στο 1. Με παρόμοια συλλογιστική βρίσκουμε ότι $x^{1/n} \to 1$ όταν $0 < x < 1$. Συνεπώς για κάθε $x > 0$ είναι $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$.

(3) Οι παρακάτω ιδιότητες είναι πολύ χρήσιμες.

Εάν έχουμε μία θετική ακολουθία α_n που ικανοποιεί την ανισότητα $\alpha_{n+1}/\alpha_n \geq K$ με $K > 1$ τότε $\alpha_n \to \infty$. Διότι

$$\alpha_n \geq K\alpha_{n-1} \geq K^2\alpha_{n-2} \geq \cdots \geq K^{n-1}\alpha_1$$

και συνεπώς η α_n τείνει στο άπειρο αφού η K^n τείνει στο άπειρο. Παρομοίως, αν ισχύει ότι $|\alpha_{n+1}|/|\alpha_n| < K$ με $0 < K < 1$ (τώρα δεν είναι αναγκαίο να είναι η α_n θετική) τότε η α_n είναι μηδενική ακολουθία.

Μια ακόμη ισχυρότερη πρόταση είναι η ακόλουθη: Μια θετική ακολουθία α_n τείνει στο άπειρο αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = K > 1\ .$$

Η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση ότι εφόσον $\alpha_{n+1}/\alpha_n \to K > 1$ υπάρχει φυσικός N τέτοιος ώστε για $n > N$ θα είναι $\alpha_{n+1}/\alpha_n > M > 1$ όπου $K > M > 1$. Συνεπώς για $n > N+1$ θα είναι $\alpha_n > M^{n-N-1}\alpha_{N+1}$ και επομένως η α_n τείνει στο άπειρο αφού η M^{n-N-1} τείνει στο άπειρο όταν $n \to \infty$.

Ομοίως μία ακολουθία α_n είναι μηδενική αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = K\ , \quad -1 < K < 1$$

Στη περίπτωση αυτή δεν είναι αναγκαίο η ακολουθία να είναι θετική.

Πρώτη σημαντική εφαρμογή των ιδιοτήτων αυτών είναι ότι $x^n/n \to \infty$ αν $x > 1$ και $x^n/n \to 0$ αν $|x| \leq 1$. Επίσης αμέσως προκύπτει ότι $x^n/n!$ είναι μηδενική για κάθε τιμή του x [2]. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε για

[2] Ένας πιο άμεσος τρόπος να καταλάβει κανείς γιατί η ακολουθία αυτή είναι μηδενική είναι ο ακόλουθος: Έστω N ο ακέραιος αμέσως μετά τον $|x|$. Οι όροι της ακολουθίας μετά τον N-στό θα έχουν τη μορφή

$$|a_n| = |a_N| \frac{|x|}{N+1} \frac{|x|}{N+2} \cdots \frac{|x|}{n} < |a_N| \left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{(n-N)}\ .$$

Όμως η τελευταία αυτή ακολουθία είναι μηδενική αφού $|x|/(N+1) < 1$. Επομένως η ακολουθία $|a_n|$, όντας φραγμένη από άλλη μηδενική, είναι μηδενική και επομένως και η ίδια η a_n είναι μηδενική.

$n > N$ θα είναι $n! > x^n$ για κάθε δεδομένη τιμή του x, δηλαδή η $n!$ υπερισχύει τελικά της x^n. Επειδή για κάθε x υπάρχει N τέτοιο ώστε για $n > N$ να είναι $n! > x^n$ ή $(n!)^{1/n} > x$ η συμπαιρένουμε ότι $\sqrt[n]{n!}$ τείνει στο άπειρο.

Ο ρυθμός αύξησης της $n!$ όταν $n \to \infty$ δίδεται απο την προσσεγγιστική έκφραση του Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

[Ερ. Σκεφθείτε ποιο είναι το $\lim_{n\to\infty} n/(n!)^{1/n}$;]

(4) Τώρα μια πολύ ιδιαίτερη ακολουθία το όριο της οποίας εμφανίζεται συχνότατα στη φυσική. Θα υπολογίσουμε το όριο της ακολουθίας

$$a_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu .$$

Βλέποντας αυτήν την ακολουθία δεν είναι εύκολο να αποφασίσει κανείς για τη συμπεριφορά της. Καθώς το ν τείνει στό άπειρο η παρένθεση τείνει στο 1 αλλά η δύναμη στην οποία θα πρέπει να υψωθεί αυτό το περίπου 1 είναι απείρως μεγάλη. Μένει λοιπόν κανείς με το ερώτημα τι είναι πιο δυνατό η τάση της ποσότητας μέσα στην παρένθεση στη μονάδα ώστε η ακολουθία να τείνει τελικά στο 1 ή η δύναμη που θα εκτινάξει έναν αριθμό μεγαλύτερο της μονάδας στο ∞ όπως στην προηγούμενη ακολουθία. Η απάντηση, όπως θα δούμε είναι μια περίεργη ισορροπία ανάμεσα στις δύο τάσεις.

Υπολογίζουμε τις πρώτες τιμές της ακολουθίας

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 ,\\
a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 ,\\
a_3 &= 2.37037 ,\\
a_4 &= 2.44141 ,\\
a_5 &= 2.48832 , \ldots
\end{aligned}$$

οι οποίες βαίνουν απ' ότι φαίνεται αύξουσες, δημιουργώντας την υπόνοια ότι ίσως η ακολουθία είναι αύξουσα. Αυτό πράγματι ισχύει διότι από τον τύπο του διωνύμου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} &= 1+\frac{\nu}{1}\frac{1}{\nu}+\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdots 1}\frac{1}{\nu^2}+\cdots \\
&+ \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k\cdots 2\cdots 1}\frac{1}{\nu^k}+\cdots \\
&+ \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\nu+1)}{\nu\cdots 2\cdots 1}\frac{1}{\nu^\nu} \\
&= 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+\cdots+ \\
&+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)+\cdots \\
&+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots \nu}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1} &= 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu-1}\right)+\cdots+ \\
&+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\left(1-\frac{1}{\nu-1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu-1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu-1}\right)+\cdots \\
&+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots (\nu-1)}\left(1-\frac{1}{\nu-1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu-1}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-2}{\nu-1}\right)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της a_ν είναι $\nu+1$ το πλήθος ενώ αυτοί της $a_{\nu-1}$ είναι ν. Επίσης συγκρίνοντας τον k-οστό όρο της a_ν με τον k-οστό όρο της $a_{\nu-1}$ (εκτός από τους δύο πρώτους που είναι ίσοι) της a_ν είναι μεγαλύτερος (λόγω του ότι $1/\nu < 1/(\nu-1)$). Επομένως η a_ν έχει και περισσότερους και μεγαλύτερους όρους.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους όρους της ακολουθίας. Προς τούτο παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Οπότε από τον τύπο του δυωνύμου έχουμε:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^\nu}$$

(οι όροι στις παρενθέσεις είναι όλοι μικρότεροι της μονάδας και τους θέσαμε 1 προκειμένου να φτιάξουμε ένα άνω φράγμα. Επειδή όμως το άθροισμα όρων μιας γεωμετρικής σειράς υπολογίζεται εύκολα

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

έχουμε ότι

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^\nu} = 2(1 - (1/2)^{\nu+1}) < 2$$

και συνεπώς κάθε όρος της ακολουθίας ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < 3\,.$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι αφού η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη θα έχει όριο. Το όριο αυτό[3] το συμβολίζουμε με τον αριθμό e. Μία δε προσεγγιστική τιμή αυτού είναι

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696...$$

Παρατηρούμε άλλη μία φορά τη σημασία της κατασκευής των πραγματικών αριθμών. Κάθε στοιχείο της ακολουθίας είναι ένας ρητός αριθμός. Το όριο όμως της ακολουθίας δεν υπάρχει στο σύνολο των ρητών. Το όριο αυτό είναι ένας άρρητος αριθμός (στις ασκήσεις θα αποδείξετε ότι πράγματι ο e είναι άρρητος). Περαιτέρω μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο αριθμός είναι ακόμα πιο ιδιόρρυθμος, δεν είναι ούτε καν αλγεβρικός άρρητος αριθμός όπως ο $\sqrt{2}$, δηλαδή δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Ο e είναι όπως λέμε ένας υπερβατικός αριθμός.

Θα δείξουμε τώρα ότι το όριο e προκύπτει ακόμα και όταν ο δείκτης ν πηγαίνει στο άπειρο με οποιονδήποτε τρόπο. Ας εξετάσουμε το όριο της ακολουθίας

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\,.$$

[3]Το e αναφέρεται ως η σταθερά του Euler προς τιμή του Ελβετού μαθηματικού και φυσικού Euler (1707-1783). Ο e έχει θεμελιώδη σημασία στα μαθηματικά και στη φυσική και μαζί με τους αριθμούς 0, 1, π και το φαντασικό i, αποτελούν τους πιο σημαντικούς αριθμούς. Ο e και ο i είναι έργο της νέας εποχής των μαθηματικών που συμβαδίζει με τις νέες θεωρίες για τη μηχανική του κόσμου. Η ανακάλυψη της σταθεράς e ως το όριο που μελετήσαμε έγινε απο τον Ελβετό μαθηματικό και φυσικό Jacob Bernoulli (1654-1705). Ο Bernoulli υπολόγισε αυτό το όριο επειδή ήθελε να μελετήσει την αξία μίας χρηματικής κατάθεσης η οποία τοκίζεται με συνεχή τρόπο και όρισε το αριθμό e ως την αξία μίας μονάδας χρήματος μετά την πάροδο ενός χρόνου, όταν αυτή ανατοκίζεται συνεχώς με ετήσιο τόκο 100%. Διότι αν ο ανατοκισμός υπολογίζονταν ημερησίως τότε καθε μέρα η αξία θα μεγάλωνε καθημερινώς κατα $1 + 1/365$, και στο τέλος του χρόνου το αρχικό ποσό θα γινόταν $(1+1/365)^{365}$ φορές μεγαλύτερο. Στο όριο που ανατοκιζόταν συνεχώς η αξία μετά απο ένα χρόνο θα ήταν e. Συνεπώς, αν ο ετήσιος τόκος ήταν 5% η κατάθεση ανατοκιζόμενη συνεχώς θα είχε αξία $e^{0.05} = 1.0527$. Η πρώτη γνωστή χρήση της σταθεράς, η οποία και συμβολίζονταν με το γράμμα b, βρίσκεται σε επιστολή του Gottfried Leibniz στον Christiaan Huygens κατά τα έτη 1690 και 1691. Ο Euler άρχισε να χρησιμοποιεί το γράμμα e για τη σταθερά το 1727 και 1728, σε μία αδημοσίευτη εργασία για τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την έκρηξη κανονιών. Η πρώτη φορά που εμφανίζεται το e σε δημοσίευση είναι στη Μηχανική του Euler το 1736.

Η a_n είναι μία αύξουσα ακολουθία η οποία τείνει στο άπειρο. Λαμβάνουμε τον θετικό ακέραιο ν που είναι το ακέραιο μέρος του a_n και ικανοποιεί την ανισότητα $\nu \leq a_n \leq \nu + 1$. Συνεπώς
$$\frac{1}{\nu+1} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\nu}$$
και
$$\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} ,$$
δηλ. η ακολουθία $\gamma_n = (1 + 1/a_n)^{a_n}$ έχει φραχθεί απο τις ακολουθίες $\beta_n = (1 + 1/(\nu+1))^{\nu}$ και $\delta_n = (1 + 1/\nu)^{\nu+1}$. Γράφουμε την δ_n ως:

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$$

και παρατηρούμε ότι η μεν $1/\nu$ είναι μηδενική επειδή το ν βαίνει αυξανόμενο προς το άπειρο, παρότι το ν δεν παίρνει διαδοχικές ακέραιες τιμές, και ομοίως η $(1 + 1/\nu)^{\nu} \to e$. Συνεπώς

$$\delta_n = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \to e$$

Ομοίως
$$\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)} ,$$
και η β_n συγκλίνει και αυτή στον e. Έχουμε δηλ. δύο ακολουθίες β_n και δ_n που έχουν το ίδιο όριο και την ακολουθία γ_n που βρίσκεται "εγκιβωτισμένη" μεταξύ τους δηλαδή ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$\beta_n \leq \gamma_n \leq \delta_n .$$

Είναι προφανές ότι και η γ_n θα συγκλίνει τότε στο ίδιο όριο e. Πράγματι, δοθέντος ϵ υπάρχει N τέτοιο ώστε όλοι οι επόμενοι όροι των ακολουθιών, δηλ. όροι με δείκτες $n > N$, να ικανοποιούν τις ανισότητες: $e - \epsilon < \beta_n \leq \gamma_n \leq \delta_n < e + \epsilon$. Συνεπώς $\gamma_n \to e$.

Η πρόταση που αποδείξαμε για τα όρια εγκιβωτισμένων ακολουθιών είναι πολύ χρήσιμη για τον προσδιορισμό ορίων. Αρκεί να εγκιβωτίσουμε μία ακολουθία μεταξυ δύο άλλων περισσότερο γνώριμων ακολουθιών που έχουν το ίδιο όριο.

Τώρα θα δείξουμε ότι το όριο της ακολουθίας

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} .$$

όταν το λαμβάνει αρνητικές τιμές και $\mu \to -\infty$ είναι πάλι το e . Θέτουμε, $M = -\mu$

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} &= \left(1-\frac{1}{M}\right)^{-M} = \left(\frac{M}{M-1}\right)^{M} = \left(\frac{M-1}{M-1}+\frac{1}{M-1}\right)^{M} \\ &= \left(1+\frac{1}{M-1}\right)^{M} = \left(1+\frac{1}{M-1}\right)^{M-1}\left(1+\frac{1}{M-1}\right), \end{aligned}$$

το οποίο έχει ως όριο όταν το $M \to \infty$ πάλι το αριθμό e.

Με τις παραπάνω προτάσεις μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι το όριο της ακολουθίας

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x} .$$

Αυτό προκύπτει διότι σύμφωνα με τα προηγούμενα για οποιοδήποτε x (θετικό ή αρνητικό αλλά διαφορετικό από το 0) είναι

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x} \to e$$

και

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^{x} .$$

Βασιζόμαστε στη γενικευμένη πρόταση ότι αν $a_n \to a$ (ας υποθέσουμε εδώ για απλότητα ότι ο a είναι θετικός) θα ισχύει ότι $a_n^x \to a^x$, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό[4] x.

[4]Μπορείτε να σκιαγραφήσετε πως θα ορίζατε το a^x, αρχίζοντας με την πράξη του πολλαπλασιασμού;