ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση επί Πτυχίω στη Ανάλυση I & Εφαρμογές

17 Φεβρουαρίου 2014 (περίοδος Σεπτεμβρίου 2013)

Θέμα 1. (i) Δώστε ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα $(0,1)$ η οποία να μην έχει μέγιστο.

(ii) Έστω $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία έχει τον τύπο $f(x)=x^2$, όταν το x είναι ρητός αριθμός. Βρείτε την τιμή $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ και στη συνέχεια υπολογίστε το $\sup\{f(x), x\in(0,1)\}$ και το $\inf\{f(x), x\in(0,1)\}$. Έχει η συνάρτηση αυτή μέγιστο στο πεδίο ορισμού της;

(iii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n=\frac{c^n}{n!}\text{ , για κάθε } c\in\mathbf{R}\ ,\ b_n=n\sin(1/n^2).$$

Θέμα 2. (i) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}\quad,\quad\int\frac{dx}{e^x+e^{2x}}.$$

(ii) Σχεδιάστε το διάγραμμα της συνάρτησης

$$f(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\,dx}{x^2+\gamma^2}.$$

(iii) Εξετάστε για ποια $x\in\mathbf{R}$ συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Θέμα 3. (i) Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

και ότι συνεπώς για $n\geq 3$ ισχύει επίσης η ανισότητα

$$(1+n)^n<n^{n+1}\ .$$

(ii) Δείξτε τώρα ότι η ακολουθία $a_n=n^{1/n}$ είναι φθίνουσα για $n\geq 3$ και φραγμένη από κάτω. Έχει επομένως όριο; Δείξτε τώρα με προσοχή ότι αν η a_n έχει όριο, δεν είναι δυνατόν το όριό της να είναι μεγαλύτερο από το 1 και συνεπώς είναι

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1\ .$$

Θέμα 4. Η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς με μήκος l και μάζα m μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο. (Η δυναμική ενέργεια μετριέται από το σημείο ανάρτησης.)

(i) Θέτοντας την ενέργεια ίση με τη δυναμική ενέργεια στο ακραίο σημείο αιώρησης, δηλαδή $E = -mgl\cos\theta_0$ (τα $\pm\theta_0$ είναι τα όρια της γωνίας θ), λύστε την εξίσωση ως προς $\dot{\theta}$.

(ii) Διαχωρίστε την εξίσωση που κατασκευάσατε, ως προς τις μεταβλητές θ και t και ολοκληρώστε την (χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα) γράφοντας ένα ολοκλήρωμα ως προς θ με όλες τις σταθερές εκτός του ολοκληρώματος.

(iii) Αν το ολοκλήρωμα ως προς τη γωνία θ ολοκληρωθεί στο διάστημα $[-\theta_0, \theta_0]$ τι όρια πρέπει να βάλετε αντίστοιχα στα ολοκληρώματα ως προς το χρόνο t; [Σκεφθείτε σε ποια κίνηση αντιστοιχεί μια περίοδος του εκκρεμούς.]

(iv) Μετατρέψτε τα δύο συνημίτονα της υπόρριζης ποσότητας του ολοκληρώματος ως προς θ, σύμφωνα με την τριγωνομετρική σχέση $\cos a = 1 - 2\sin^2(a/2)$ και στη συνέχεια αντικαταστήστε το $\sin(\theta/2)$ με $\sin(\theta_0/2)\sin\psi$. Τώρα αλλάξτε μεταβλητή ολοκλήρωσης από θ σε ψ φροντίζοντας να μετασχηματίσετε κατάλληλα το $d\theta$. Δείξτε ότι το προηγούμενο ολοκλήρωμα ως προς θ (του ερωτήματος (iii)) έχει πλέον μετατραπεί από

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad \text{σε} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}\cos\psi\, d\psi}{\cos(\theta/2)\sqrt{1-\sin^2\psi}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}\, d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\psi}}.$$

(v) Προκειμένου να υπολογίσετε το παραπάνω ολοκλήρωμα, θεωρήστε την παράμετρο $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ μικρή και αναπτύξτε την ολοκληρωτέα ποσότητα ως ανάπτυγμα Taylor ως προς την ποσότητα αυτή για μικρές τιμές της παραμέτρου αυτής (κρατήστε μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς την παράμετρο αυτή).

(vi) Τώρα υπολογίστε το ολοκλήρωμα ως προς ψ του αναπτύγματος της ολοκληρωτέας ποσότητας που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και από αυτό μια προσεγγιστική τιμή της περιόδου του εκκρεμούς για μικρές γωνίες αιώρησης.

(vii) Ελέγξτε αν για αμελητέα πλάτη αιώρησης ανακτήσατε τον γνωστό από το σχολείο τύπο $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Πόσο διαφορετικό είναι το αποτέλεσμα της περιόδου για μια ταλάντωση με πλάτος τέτοιο ώστε $\sin(\theta_0/2) = 0.1$ (περίπου $11.5°$);