ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση 1 & Εφαρμογές

16 Φεβρουαρίου 2016

Αν θέλετε να προσμετρηθεί ο βαθμός της προόδου σημειώστε στην κόλλα σας και ασχοληθείτε μόνο με τα ερωτήματα 7-15. Ανάγραφονται τα μόρια του κάθε ερωτήματος. Καλή σας επιτυχία.

1. Βρείτε το sup και το inf του συνόλου $A = \{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n},\ \text{με } n \in \mathbb{N}\}$. **[5]**

2. Η a_n είναι μια ακολουθία που συγκλίνει και για την οποία ισχύει $a_{n+2} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι σταθερή. **[5]**

3. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n:
$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2\,.$$
[7]

4. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών: $a_n = (1 + 2/n)^n$, $b_n = n - \sqrt{n^2 - n}$. **[5]**

5. Αν η ακολουθία a_n τείνει στο 0, μπορείτε να αποφανθείτε για τη σύγκλιση της σειράς
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\ ;$$
Αν ναι απαντήστε ότι συγκλίνει, ή ότι δεν συγκλίνει. Αν δεν μπορείτε να αποφανθείτε δώστε ένα παράδειγμα όπου αυτή συγκλίνει και ένα όπου αυτή δεν συγκλίνει. **[5]**

6. Προσδιορίστε το άθροισμα
$$\sum_{n=1}^{N} \sin^n \theta\ ,$$
όπου $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. **[5]**

7. Σχεδιάστε στο ίδιο σχέδιο τα γραφήματα της συνάρτησης $f(x) = x^{2n}$, για $n = 1, 2$ καθώς και το γράφημα της $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n}$ για $-\infty < x \leq \infty$. **[6]**

8. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{για} \quad x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{για} \quad x = 0 \end{cases}$$
Σχεδιάστε τη συνάρτηση στο διάστημα $0 \leq x \leq 1/(2\pi)$. Είναι η συνάρτηση συνεχής στο 0; Είναι παραγωγίσιμη στο 0; **[7]**

9. Κατασκευάστε μία συνεχή συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ που δεν έχει μέγιστο στο διάστημα αυτό. **[5]**

10. Η $f(x)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$ και είναι και άρτια (δηλαδή είναι $f(x)=f(-x)$). Αποδείξτε ότι η παράγωγος της $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή $f'(x)=-f'(-x)$ και υπολογίστε την τιμή της παραγώγου της στο $x=0$. **[5]**

11. Προσδιορίστε τα αναπτύγματα Taylor της παρακάτω συνάρτησης περί το $x=0$ κρατώντας όρους μέχρι και του x^3 (συμπεριλαμβανόμενου):
$$\frac{1}{(x^2+9)^{1/2}}\ .$$ **[5]**

12. Δείξτε ότι η τιμή του ολοκληρώματος
$$\int_0^{1/2}\cos(\pi x)\left(\frac{1}{\sqrt{4+x}}-\frac{1}{\sqrt{25-x}}\right)\,dx\ ,$$
είναι ένας θετικός αριθμός ο οποίος φράσσεται από πάνω από τον αριθμό $6-4\sqrt{2}$. **[5]**

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$. **[5]**

14. Ο «τρέχων» μέσος όρος μίας συνεχούς και συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης $f(t)$ συμβολίζεται με $\langle\cdot\rangle$ επί της συνάρτησης και ορίζεται ως:
$$\langle f(t)\rangle=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}f(\tau)d\tau\ .$$

    14.α΄. Υπολογίστε τα $\lim_{T\to\infty}\langle\sin t\rangle$ και $\lim_{T\to\infty}\left\langle\sin^2 t\right\rangle$. **[5]**

    14.β΄. Ελέγξτε αν ισχύει η παρακάτω σχέση: (Αν ναι δώστε απόδειξη, άλλως ένα αντιπαράδειγμα.)
$$\frac{d\langle f\rangle}{dt}=\left\langle\frac{df}{dt}\right\rangle\ .$$ **[5]**

15. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\xi(x)$ που λαμβάνει την τιμή $\xi(x)=(2\epsilon)^{-1}$, όταν $|x|<\epsilon$ και 0, όταν $|x|\geq\epsilon$ για κάποιο $\epsilon>0$, καθώς και μια συνάρτηση $f(x)$ που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $(-\infty,\infty)$.

    15.α΄. Εξηγήστε γιατί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\xi(x)\,dx$ υπάρχει. **[4]**

    15.β΄. Η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ (αν ναι αποδείξτε το, αν όχι δώστε αντιπαράδειγμα). **[4]**

    15.γ΄. Η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι φραγμένη στο κλειστό διάστημα $[-\epsilon,\epsilon]$ (αν ναι αποδείξτε το, αν όχι δώστε αντιπαράδειγμα). **[4]**

15.δ΄. Υπολογίστε με προσοχή το όριο του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \xi(x)\, dx$ στο όριο $\epsilon \to 0$. (Υπόδ. Γράψτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)$ περί το 0 γράφοντας και κατάλληλο υπόλοιπο, ή χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής.) **[8]**

Απαντήσεις

1. Τα στοιχεία του συνόλου είναι:

$$-\frac{1}{1}, 2+\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \cdots$$

συνεπώς είναι $\inf(A) = -1$ και $\sup(A) = 2.5$.

2. Η ακολουθία έχει δύο μόνο στοιχεία τα a_1 και a_2 και είναι η : $a_1, a_2, a_1, a_2, \cdots, a_1, a_2, \cdots$. Αν $a_1 \neq a_2$ τότε η διαφορά τους δεν θα είναι μηδενική, $a_1 - a_2 = a \neq 0$ και $|a| = |a_1 - a_2| < |a_1| + < |a_2|$. Αν $a_n \to 0$ τότε για κάθε $\epsilon/2 > 0$ υπάρχει $N(\epsilon)$ ώστε για κάθε $n > N(\epsilon)$, $a_n < \epsilon/2$ οπότε για την παραπάνω ακολουθία αναγκαστικά $|a_1| < \epsilon/2$ και $|a_2| < \epsilon/2$ για κάθε αριθμό ϵ, άρα και $|a_1 - a_2| < \epsilon$ που αντίκειται στην υπόθεση ότι $a_1 \neq a_2$ διότι αρκεί να πάρουμε $\epsilon < |a_1 - a_2|$.

3. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2^2}\ , \quad \frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}\ ,$$

και συνεπώς:

$$1 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1-(1/2)^n}{1/2} < 2\ .$$

4. Το πρώτο όριο είναι e^2. Το δεύτερο:

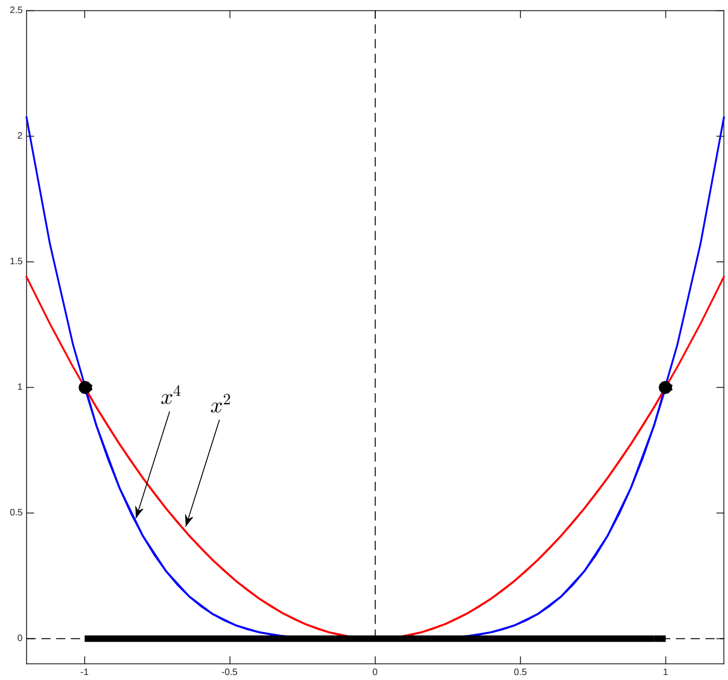
$$\begin{aligned} n - \sqrt{n^2-n} &= \frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} \to \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

5. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε τίποτε. Π.χ. η ακολουθία $a_n = 1/n$ συγκλίνει στο 0 αλλά η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει ενώ η $\sum(-1)^n a_n$ συγκλίνει. Ενώ αν λάβουμε τη συγκλίνουσα στο μηδέν ακολουθία $a_n = (-1)^n/n$ συνβαίνει το αντίστροφο: η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει και η $\sum(-1)^n a_n$ αποκλίνει. Απαιτείται η ακολουθία a_n να μην είναι μόνο μηδενική αλλά και φθίνουσα για να είναι η $\sum(-1)^n a_n$ πάντοτε συγκλίνουσα.

6. Γεωμετρική σειρά $x + x^2 + \cdots + x^N$ με $x = \sin\theta$. Το άθροισμα της είναι:

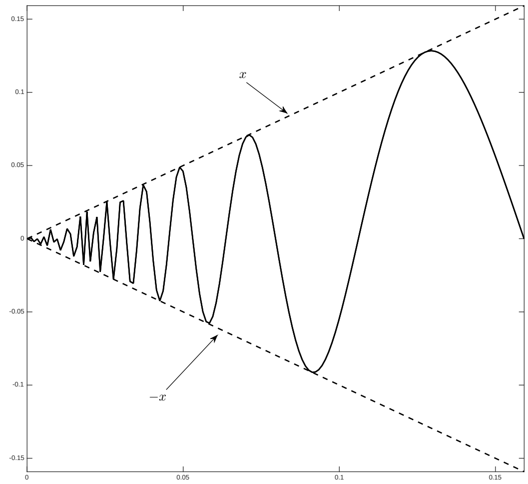
$$\sin\theta \frac{1 - \sin^N\theta}{1 - \sin\theta} \,.$$

7.



Σχήμα 1: Ερώτημα 7. Οι γραφικές παραστάσεις της x^2 (κόκκινο), της x^4 (μπλε) και της $\lim_{n\to\infty} x^{2n}$ (με μαύρο) που είναι 0 όταν $|x| < 1$, λαμβάνει την τιμή 1 για $x = \pm 1$ και είναι ∞ για κάθε $|x| > 1$ (με μαύρο). Η τελευταία συνάρτηση είναι ασυνεχής παρότι όριο συνεχών συναρτήσεων.

8.



Σχήμα 2: Ερώτημα 8. Η $f(x) = x\sin(1/x)$ έχει αριθμήσιμα άπειρο αριθμό ριζών στα $x = 1/(n\pi)$ και έχει απόλυτη τιμή μικρότερη από το $|x|$. Η γραφική παράσταση δεν μπορεί να αποδωθεί με ακρίβεια διότι η συνάρτηση έχει πυκνό αριθμό ριζών στην περιοχή του 0. Αν θεωρηθεί οτι η τιμή στο 0 είναι 0 τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο μηδέν διότι ειναι $|x\sin(1/x)| \leq |x|$, και συνεπώς $f(x) \to 0$ όταν $x \to 0$, αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο 0 διότι η $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν έχει όριο όταν $x \to 0$.

9. Οποιαδήποτε αύξουσα ή φθίνουσα συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ θα είναι συνεχής και στο $(0, 1)$ και δεν έχει μέγιστο (αλλά ούτε και ελάχιστο) στο $(0, 1)$ π.χ. η x.

10. Επειδή η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη θα είναι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

και για $h > 0$ αλλά και για $h < 0$. Επιπλέον επειδή είναι $f(x) = f(-x)$ θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{f(-x+(-h)) - f(-x)}{-h} \\ &= -f'(-x) \end{aligned}$$

Άρα $f'(0) = -f'(0)$ και $f'(0) = 0$.

11. Επειδή $f(0) = 1/3$, $f'(0) = f'''(0) = 0$ και $f''(0) = -1/27$ είναι

$$\frac{1}{(x^2+9)^{1/2}} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{54} + O(x^4) \; .$$

12. Στο διάστημα $[0, 1/2]$ η $\cos(\pi x)$ είναι φθίνουσα με μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη 0. Συνεπώς η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι $\geq\ 0$ επειδή είναι γινόμενο της θετικής συνάρτησης $1/\sqrt{4+x} - 1/\sqrt{25-x}$ επειδή

$$\frac{1}{\sqrt{4+x}} > \frac{1}{\sqrt{25-x}} \quad , \quad \text{επειδή } \; 25 - x > 4 + x, \; \text{ επειδή } \; \frac{21}{2} > x,$$

και της μη αρνητικής συνάρτησης $\cos(\pi x)$. Επειδή η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μηδενική μόνο στο μεμονωμένο σημείο $x = \pi/2$ και θετική αλλού, το ολοκλήρωμα είναι > 0. Επειδή $0 \leq \cos(\pi x) \leq 1$ το ολοκλήρωμα είναι μικρότερο από το

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{4+x}} - \frac{1}{\sqrt{25-x}} \right) &= 2\sqrt{4+x}\Big|_0^{1/2} + 2\sqrt{25-x}\Big|_0^{1/2} \\
&= 3\sqrt{2} - 4 + 7\sqrt{2} - 10 \\
&= 10\sqrt{2} - 14
\end{aligned}$$

το οποίο είναι μικρότερο από το $6 - 4\sqrt{2}$ διότι $10\sqrt{2} - 14 < 6 - 4\sqrt{2}$ επειδή $20 > 14\sqrt{2}$ ή $10 > 7\sqrt{2}$, διότι $10 > 9.94 = 7 \times 1.42 > 7\sqrt{2}$ επειδή $1.42 > \sqrt{2} > 1.4$ και $7 \times 1.42 = 9.94$. (τελικά δικαίως ζήτησε ο φοιτητής τη χρήση υπολογιστή στο σημείο αυτό, αλλά δεν είναι καλύτερα να το κάνει κάποιος χωρίς υπολογιστή;)

13. Ορίζετε τη μεταβλητή $x = (3/2)\sin t$.

14 α. Είναι

$$\langle \sin t \rangle = \frac{\int_{t-T}^{t+T} \sin\tau d\tau}{2T} = \frac{\cos(t-T) - \cos(t+T)}{2T}$$

και επειδή η απόλυτη τιμή του αριθμητή του κλάσμαστος είναι φραγμένη από το 2 το κλάσμα τείνει στο μηδέν όταν $T \to \infty$. Άρα είναι $\lim_{T\to\infty} \langle \sin t \rangle = 0$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$$

έχουμε ότι

$$\langle \sin^2 t \rangle = \frac{\int_{t-T}^{t+T} (1 - \cos(2\tau))\, d\tau}{4T} = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2t+2T) - \sin(2t-2T)}{8T},$$

άρα είναι

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle \sin^2 t \right\rangle = \frac{1}{2}$$

14β. Αφενός είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\langle f(t)\rangle}{dt} &= \frac{1}{2T}\frac{d}{dt}\left(\int_{t-T}^{t+T} f(\tau)d\tau\right) \\ &= \frac{1}{2T}\left(f(t+T)-f(t-T)\right) \ , \end{aligned}$$

και αφετέρου

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \frac{df(\tau)}{d\tau}\, d\tau \\ &= \frac{1}{2T}\left(f(t+T)-f(t-T)\right) \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει η ισότης και ο μέσος όρος αντιμετατίθεται με την παράγωγο.

15 α. Για οποιοδήποτε πεπερασμένο $a > \epsilon > 0$ είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx \ ,$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα διότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[-a, a]$ με πεπερασμένες ασυνέχειες μόνο στα $x = \pm\epsilon$ και οποιαδήποτε συνάρτηση σε πεπερασμένο διάστημα έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann (η συνεισφορά από τις ασυνέχειες είναι μηδενική, το ίδιο ισχύει ακόμα και αν η συνάρτηση έχει αριθμήσιμο αριθμό ασυνεχειών). Συνεπώς το ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι ίσο με

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)dx \ .$$

15 β. Λάθος. Π.χ. η $f(x) = x^2$ έχει τη συνεχή παράγωγο $f'(x) = 2x$ η οποία δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty, \infty)$.

15 γ. Σωστό. Διάτι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη και η $f'(x)$ είναι εξ'υποθέσεως συνεχής άρα είναι φραγμένη στο $[-\epsilon, \epsilon]$.

15 δ. Από το θεώρημα της μέσης τιμής για κάθε x υπάρχει κάποιο ξ στο διάστημα $(0, x)$ αν $x > 0$ ή στο διάστημα $(x, 0)$ αν $x < 0$ για το οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi) \ .$$

Συνεπώς επειδή το ξ εξαρτάται από το x θα είναι

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} xf'(\xi(x))dx \; .$$

Αλλά,

$$\left|\int_{-\epsilon}^{\epsilon} xf'(\xi(x))dx\right| < \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |x||f'(\xi(x))|dx < 2M\int_{0}^{\epsilon} xdx = M\epsilon^2 \; .$$

όπου M είναι το ανώτερο φράγμα της $f'(x)$ στο κλειστό διάστημα $[-\epsilon, \epsilon]$. Συνεπώς

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} xf'(\xi(x))dx = 0 \; ,$$

και

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)dx = f(0) \; .$$