



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Λύση του πρώτου Θέματος και μερικές άλλες παρατηρήσεις
Εξέταση Ανάλυσης 29 Φεβρουαρίου 2012

ΘΕΜΑ 1

- (α) Η σειρά είναι για όλες τις τιμές του x απολύτως συγκλίνουσα, συνεπώς το γινόμενο των δύο σειρών μπορεί να υπολογιστεί με οποιαδήποτε σειρά. Επιλέγουμε τον εξής τρόπο πολλαπλασιασμού:

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots\right) \\&= 1 + (x + y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}y + x\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \dots \\&= 1 + (x + y) + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \dots \\&= 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \frac{(x + y)^3}{3!} + \dots \\&= \exp(x + y).\end{aligned}$$

Μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να υπολογίσει τον k -στό όρο ο οποίος αποτελείται από όρους x, y συνολικής τάξης k .

• Σημαντική παρατήρηση: η παραπάνω ταυτότητα βασίζεται στη δυνατότητα γραφής αναπτυγμάτων της μορφής $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2$ ως $x^2 + 2xy + y^2$, που απαιτεί την αντιμεταθετικότητα (commutativity) των x και y , δηλαδή να είναι $xy = yx$, ή όπως συνηθίζουμε να λέμε στη φυσική: ο μεταθέτης (commutator) $[x, y] = xy - yx$ να μηδενίζεται. Αυτό ισχύει βέβαια αν οι x και y είναι αριθμοί, αλλά δεν ισχύει αν είναι άλλα αντικείμενα, όπως για παράδειγμα αν είναι πίνακες. Συνεπώς η παραπάνω σχέση που αποδείξαμε δεν ισχύει αν τα x και y δεν αντιμετατίθενται.

Αμέσως έχουμε από τον όρισμό της $\exp(x)$ ότι $\exp(0) = 1$, ε πίσης είναι προφανές ότι $\exp(x) > 0$ όταν $x > 0$, διότι πρόκειται για άθροισμα θετικών όρων. Επειδή

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1,$$

όταν $x < 0$ θα ισχύει από τα παραπάνω ότι $\exp(-x) = 1/\exp(x) > 0$, άρα $\exp(x) > 0$ για κάθε x . Επίσης, δεν μπορεί να $\exp(x) = 0$ για οποιοδήποτε x , διότι η $\exp(-x)$ δεν θα οριζόταν, πράγμα το οποίο είναι άτοπο, διότι η σειρά $\exp(x)$ ορίζεται και συγκλίνει για κάθε τιμή του x . Άλλος τρόπος να δείξετε ότι δεν μηδενίζεται η εκθετική συνάρτηση, είναι να παρατηρήσετε ότι επειδή $\exp(x + y) = \exp(y)\exp(x)$, αν για κάποια τιμή του x ήταν $\exp(x) = 0$ τότε θα είναι και $\exp(x + y) = 0$ και συνεπώς η $\exp(x)$ θα ήταν μια σταθερή μηδενική συνάρτηση, που είναι άτοπο αφού είναι $\exp(0) = 1$.

- (β) [i] **Όχι.** Π.χ. $\alpha_\nu = 2 - 1/\nu$, $\beta_\nu = 1 + 1/\nu$. Η α_ν είναι γνησίως φθίνουσα και η β_ν γνησίως αύξουσα και είναι $\alpha_\nu > \beta_\nu$, αλλά έχουν διαφορετικά όρια (2 η πρώτης και 1 η δεύτερης). Για να ισχύει η πρόταση πρέπει η διαφορά των δύο ακολουθιών να είναι μηδενική ακολουθία.

[ii] **Όχι.** Π.χ. η $\alpha_\nu = (-1)^\nu/\nu$ είναι μηδενική αλλά η σειρά που προκύπτει $\sum 1/\nu$ αποκλίνει (αρμονική σειρά). Άλλο παράδειγμα: $\alpha_\nu = 1/2^\nu$ για τους άρτιους όρους ($\nu = 2k$) και $\alpha_\nu = 1/\nu$ για τους περιττούς ($\nu = 2k + 1$), αν και μηδενική ακολουθία οι μεν άρτιοι όροι φτιάχνουν μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, οι δε περιττοί φτιάχνουν μέρος της μη συγκλίνουσας αρμονικής. Παρατήρηση: η σύγκλιση

στην περίπτωση αυτή βεβαιώνεται αν $\alpha_\nu > 0$ και η α_ν είναι επιπλέον φθίνουσα, δηλαδή δεν αρκεί η α_ν να είναι μηδενική. Ερώτηση: σκεφτείτε τι μπορείτε να πείτε για τη σύγκλιση της σειράς:

$$\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} \cdots + \frac{a}{2\nu-1} - \frac{b}{2\nu} + \cdots$$

[iii] **Ναι.** Επειδή για μικρά χ είναι $\eta\chi = \chi - \chi^3/3! + \dots$ θα είναι $\eta\chi/\chi = 1 - \chi^2/6 + \dots$ και ομοίως $\text{syn}\chi = 1 - \chi^2/2! + \dots$. Συνεπώς για μικρά χ θα είναι $\eta\chi/\chi > \text{syn}\chi$. Τα αντίστοιχα γραφήματα θα συμπίπτουν στο $\chi = 0$ αλλά πλησίον αυτού το γράφημα της πρώτης θα “καβαλάει” αυτό της δεύτερης.

[iv] **Όχι.** Για να υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση δεν αρκεί να είναι η συνάρτηση απλά μονότονη, πρέπει να είναι γνησίως μονότονη. Παράδειγμα η σταθερή συνάρτηση είναι μονότονη, αλλά δεν έχει αντίστροφο (μια κατακόρυφη γραμμή δεν είναι γράφημα συνάρτησης).

• **Παρατήρηση:** Πολλοί φοιτητές ανέφεραν ότι για να υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση, απαιτείται η συνάρτηση να είναι συνεχής. Αυτό δεν αληθεύει, π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x$ για $x \leq 0$ και $f(x) = 1 + x$ για $x > 0$, με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[-1, 0] \cup [1, 2]$ έχει αντίστροφη στα αντίστοιχα πεδία. Ομοίως η συνάρτηση $1/x$ στο διάστημα $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ έχει αντίστροφη την $1/y$ (τον εαυτό της), με το ίδιο πεδίο τιμών.

[v] Η $f(x)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία ασυνέχειας της $g(x)$. Π.χ. θεωρήστε τη συνάρτηση βήματος $\Theta(t)$ στο διάστημα $[-1, 1]$ η οποία είναι $\Theta(t) = 0$ όταν $t \leq 0$ και $\Theta(t) = 1$ όταν $t > 0$. Τότε $f(x) = \int_{-1}^x \Theta(t)dt = x\Theta(x)$ δηλαδή $f(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $f(x) = x$ για $x > 0$. Η συνάρτηση είναι εμφανώς συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0 που είναι το σημείο ασυνέχειας της $\Theta(t)$ (προσπαθήστε να αποδείξετε την πρόταση αυτή στη γενική περίπτωση).

[vi] Επειδή

$$\frac{2}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}$$

οι διαδοχικοί όροι της σειράς αλληλοαναιρούνται ο αρνητικός με τον επόμενο θετικό και το όριο της σειράς είναι προφανώς ο πρώτος όρος, δηλαδή 1. Η σειρά αυτή ονομάζεται και “ηλεσκοπική” επειδή μπορεί να μαζευτεί.

ΘΕΜΑ 3β

Θεωρώ τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$$

με όρους

$$\alpha_\nu = \frac{2^{(-1)^\nu}}{2^\nu}.$$

Έχω:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{(-1)^{\nu+1}}}{2^{\nu+1}} \frac{2^\nu}{2^{(-1)^\nu}} = \frac{2^{2(-1)^{\nu+1}}}{2} \leq 2$$

διότι για άρτια ν ο λόγος είναι $1/8$ ενώ για περιττά ν είναι 2. Συνεπώς το κριτήριο του λόγου στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να καθορίσει τη σύγκλιση της σειράς.

Υπολογίζω τώρα:

$$(\alpha_\nu)^{1/\nu} = \frac{(2^{(-1)^\nu})^{1/\nu}}{2}$$

Ο αριθμητής τείνει στο 1 (επειδή για κάθε $a > 0$ τό όριο της $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a)^{1/\nu} = 1$). Συνεπώς $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha_\nu)^{1/\nu} = 1/2 < 1$. Με το κριτήριο της ρίζας κρίνεται ότι η σειρά συγκλίνει. Δηλαδή, με το παράδειγμα αυτό μαθαίνουμε ότι το κριτήριο της ρίζας φαίνεται ότι είναι ισχυρότερο από το κριτήριο του λόγου.

• **Παρατηρήσεις:**

- (i) Είναι εύκολο να αθροίσουμε τη σειρά αυτή μιας και αποδείξαμε ότι συγκλίνει. Επειδή η σειρά έχει θετικούς όρους και συγκλίνει (είναι απολύτως συγκλίνουσα δηλαδή), κάθε αναδιάταξη της σειράς έχει το ίδιο άθροισμα, και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τό άθροισμα προσθέτοντας πρώτα τους περιττούς όρους και έπειτα του άρτιους όρους. Τα άθροισματα αυτά είναι εύκολο να υπολογισθούν γιατί σχηματίζουν αντίστοιχα δύο γεωμετρικές σειρές. Οι όροι περιττής τάξης της σειράς σχηματίζουν τη γεωμετρική σειρά

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu-1}} = \frac{1}{3},$$

ενώ οι όροι άρτιας τάξης είναι

$$S_2 = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}} = \frac{2}{3}.$$

Συνεπώς το άθροισμα της σειράς είναι 1.

- (ii) Ας δούμε πιο καθαρά το λόγο που το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο: Έστω η σειρά με θετικούς όρους a_ν , και έστω ότι οι διαδοχικοί λόγοι ικανοποιούν την ανισότητα

$$0 < r_2 < \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq r_1$$

ή

$$r_2^\nu \alpha_0 \leq \alpha_\nu \leq r_1^\nu \alpha_0.$$

Οπότε για ν αρκούντως μεγάλο θα ισχύει η ανισότητα

$$r_2 - \epsilon \leq (\alpha_\nu)^{1/\nu} \leq r_1 + \epsilon$$

όπου το ϵ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Συνεπώς η ρίζα του νιοστού όρου της σειράς φράσσεται από τα φράγματα της ακολουθίας των λόγων της σειράς, και έτσι συμπεραίνουμε ότι το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο του λόγου. Από αυτή τη παρατήρηση προκύπτει η ενδιαφέρουσα πρόταση ότι αν $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu = \alpha$ τότε και $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha_\nu)^{1/\nu} = \alpha$. Βασισμένοι σε αυτή τη παρατήρηση μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το δύσκολο όριο του Θέματος 4α, στο οποίο ζητείται το όριο της ακολουθίας

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu^{1/\nu}$$

με

$$\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}.$$

Από τα παραπάνω, αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

τότε το όριο αυτής θα είναι και το όριο της $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu^{1/\nu}$. Η ακολουθία των λόγων συγκλίνει διότι είναι

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{1}{(1 + 1/\nu)^\nu}$$

που συγκλίνει στο $1/e$. Συνεπώς και

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(\nu!)^{1/\nu}}{\nu} = \frac{1}{e}.$$

Πιο ακριβέστερα η προσέγγιση Stirling δίνει την ακόλουθη εκτίμηση για τα παραγοντικά μεγάλων αριθμών ν (την ασυμπτωτική προσέγγιση όπως λέγεται):

$$\nu! \approx \sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu.$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πολύτιμη για τις εκτιμήσεις πλήθους καταστάσεων στη στατιστική φυσική.