ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση 1 & Εφαρμογές

Εξέταση επί Πτυχίω

20 Σεπτεμβρίου 2016

Καλή σας επιτυχία.

1. Εάν οι A και B είναι άρρητοι αριθμοί, τι πρέπει να ισχύει για τους ρητούς α, β, γ ώστε να είναι

$$\alpha A + \beta B + \gamma = 0.$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **[6]**

2. Βρείτε ένα παράδειγμα φραγμένου συνόλου, που να δείχνει γιατί η ακόλουθη πρόταση είναι λανθασμένη: *Αν $a = \sup A$, για κάποιο σύνολο A, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο του συνόλου A, ώστε $a - \epsilon < x < a$.* **[4]**

3. Να αποδειχθεί η ανισότητα $(1+x)^n \geq 1 + n(n-1)x^2/2$ για $x \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. **[5]**

4. Να υπολογιστεί το όριο των ακολουθιών $a_n = n^n/(n-e)^n$, $b_n = \sqrt[n]{(\pi/e)^n + (e/\pi)^n}$ και $c_n = \left(1 + \frac{1}{(-n)^n}\right)^{(-n)^n}$. **[9]**

5. Αληθές ή ψευδές; Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής η πρόταση αποδείξτε την, αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

   5.α΄. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία αρρήτων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό. **[4]**

   5.β΄. Εάν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και είναι $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) > 4/5$. **[4]**

   5.γ΄. Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία. **[4]**

   5.δ΄. Η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α, β). Τότε η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. **[4]**

   5.ε΄. Η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού στο $[-1, 1]$ εκτός από το σημείο 0. Τότε, η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα αυτό. **[4]**

6. Δίνεται η ακολουθία:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} .$$

   6.α΄. Βρείτε το όριο της ακολουθίας αυτής. **[5]**

   6.β΄. Δείξτε ότι όλοι οι άρτιοι όροι της ακολουθίας S_{2k} είναι μικρότεροι του ορίου ενώ όλοι οι περιττοί είναι μεγαλύτεροι του ορίου. **[5]**

7. Δείξτε με δύο παραδείγματα ότι μια σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ μπορεί είτε να συγκλίνει, είτε να αποκλίνει, εφόσον $a_{k+1}/a_k \to 1$. **[4]**

8. Σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τα γραφήματα των συναρτήσεων $f_1(x) = \sin^{-1} x$, $f_2(x) = \tan(\pi x/2)$, $f_3(x) = x^3$, στο διάστημα $-1 < x < 1$. **[6]**

9. Προσδιορίστε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων για $0 < x << 1$ (κρατώντας τον όρο του x με τη μικρότερη δυνατή τάξη):

   9.α΄. $f(x) = \tan(x)$. **[4]**

   9.β΄. $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$. **[4]**

   9.γ΄. $f(x) = \cos x - \cos(2x)$ **[4]**

10. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\tan^2 x}$$

[6]

11. Κατασκευάστε μια συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία όμως να έχει ασυνεχή παράγωγο σε όποιο σημείο $x = x_0 \in \mathbb{R}$ εσείς επιθυμείτε και μόνο σε αυτό. Καθορίστε πρώτα ποιο είναι το σημείο αυτό. **[4]**

12. Παραγωγίστε τη συνάρτηση

$$x(t) = \int_t^{2t} f(s)\, ds \ ,$$

όπου $f(s)$ μία συνεχής συνάρτηση σε όλη την πραγματική ευθεία. **[4]**

13. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)}$ και $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **[6]**

14. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor του $\log(x)$ γύρω από το 1 μέχρι τον όρο 3ης τάξης. **[4]**

Καλή επιτυχία

Απαντήσεις

1. Βασιζόμαστε στην ιδιότητα οτι οι ρητοί είναι κλειστοί στις πραξεις του αθροίσματος και γινομένου ότι το γινόμενο ρητού και αρρήτου παράγει άρρητο αριθμό, όπως επίσης ότι το άθροισμα ρητού και αρρήτου είναι και αυτό άρρητο. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο αρρήτων μπορεί να είναι όμως ρητός π.χ. $3+\sqrt{2}, 5-\sqrt{2}$. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπώσεις. Στην πρώτη κανένας γραμμικός συνδυασμός των A και B δεν είναι ρητός. Τότε αναγκασικά ο γ=0 και επίσης α=0 και β=0 διότι άλλως αA=-βB ή A/B = -α/β οπότε A= - α χ, χ κάποιος αρρητος και B = β χ , οπότε ο (1/α) A + (2/β) B θα ήταν ρητός, που είναι αντίθετο στην υπόθεσή μας. Στην άλλη περίπτωση που κάποιος γραμμικός συνδυασμός των A και B δίνει ρητό τότε αυτά τα α,β, γ ικανοποιουν την αA+βB+γ=0.

2. Το συνολο A=$\{0\}$.

3. Είναι $(1+x)^n = 1 + x + n(n-1)x^2/2 + \cdots + x^n$, δηλαδή άθροισμα θετικών όρων άρα το $(1+x)^n$ είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε από αυτούς ή αθροισμα αυτών συνεπώς θα είναι και $(1+x)^n \geq 1 + n(n-1)/x^2/2$. Η ανισότητα ισχύει για κάθε φυσικό (η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ είτε $n = 0$).

4. τα όρια είναι αντίστοιχα e^e, π/e, e

5. α) ψευδής, π.χ. η ακολουθία αρρήτων $1+\sqrt{2}/n$ συγκλίνει στο 1.

5. β) αληθής. Απ. επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, για κάθε ε, άρα και για το $\varepsilon = 1/5$, υπάρχει δ τέτοιο ώστε όταν $|x - x_0| < \delta$ να είναι $|f(x) - 1| < 1/5$, δηλαδή να είναι $4/5 < f(x) < 6/5$.

5. γ) υπάρχει, π.χ. η $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, και $f(x) = 0$ αν $x \in \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$.

5. δ) ψευδής, π.χ. η συνάρτηση $f(x) = 1/(x-\alpha)+1/(x-\beta)$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο ανοικτό διάστημα (α, β).

5. ε) ψευδής, π.χ. η συνάρτηση $f(x) = 1/x$.

6. α). Είναι:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

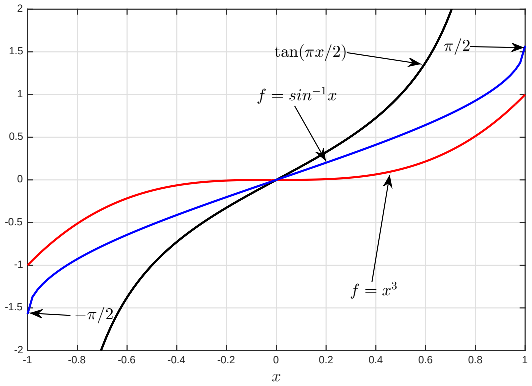
6. β). Είναι:

$$S_{2k} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right) \quad , \quad S_{2k-1} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)$$

οπότε $S_{2k} > 1/3$ και $S_{2k-1} < 1/3$ και επιπλέον η S_{2k} είναι γνησίως φθίνουσα και η S_{2k-1} αύξουσα και κάθε άρτιο άθροισμα είναι μεγαλύτερο από κάθε περιττό: $S_{2k_1} > S_{2k_2-1}$.

7. Η σειρά με όρους τους $a_n = 1/n$ αποκλίνει ενώ αυτή με όρους τα $a_n = (-1)^n/n$ συγκλίνει.

8.



9. α) $f(x) \approx x$, β) $f(x) \approx x/3$ και γ) $f(x) \approx 3x^2/2$.

10. Είναι:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\tan^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\tan^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \cos^2 x \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 - x^2/2 - \cdots\right)^2 \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 - x^2 + \cdots\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

11. π.χ. η $f(x) = |x - x_0|$.

12. $x'(t) = 2f(2t) - f(t)$.

13 α) $\log\sqrt{3}$ β) $\pi/2$.

14.

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$