



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξέταση στη Ανάλυση I & Εφαρμογές
2 Ιουνίου 2014

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Όλα τα θέματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας.
Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α

1. Είναι δυνατό μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα να οδηγεί σε μια συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

γνησίως αύξουσα; Αν όχι αποδείξτε το, αν ναι δώστε παράδειγμα.

2. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση μέσω της οποίας ορίζουμε στο διάστημα $[0, 1]$ τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής να δειχθεί ότι για $x \in (0, 1)$, $F'(x) = f(x)$. Δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει γενικά η παραπάνω πρόταση αν η $f(x)$ **δεν** είναι συνεχής.

3. Έστω η ολοκληρώσιμη συνεχής συνάρτηση $f : [a, b]$ για την οποία ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = 2.$$

Αν για οποιεσδήποτε τιμές t_1, t_2 στο διάστημα (a, b) τέτοιες ώστε $t_2 - t_1 = (b - a)/2$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = 1,$$

δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική. Ποια η περίοδος αυτής; Κατασκευάστε ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης. [Υποδ: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.]

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx, \quad (\beta) \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-\gamma t} dt.$$

ΘΕΜΑ Β

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = a/(n+b)$ είναι μηδενική για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία a_n η οποία δίδεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_{n+1} = a_n^2$$

για διάφορες τιμές του αρχικού της όρου a_1 .

3. Ελέγξτε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a,$$

για $a > 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Εξαιτίας του ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου, αν μια μάζα παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή η πυκνότητά της είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας (μετρημένης από το κέντρο της σφαίρας): $\rho(r)$, τότε υπάρχει μια σχέση που συνδέει την επιτάχυνση της βαρύτητας σε κάθε σημείο και της μάζας που περιέχεται στη σφαίρα που διέρχεται από το σημείο αυτό (η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα που βρίσκεται έξω από τη σφαίρα αυτή). Συγκεκριμένα

$$g(r) = \frac{GM_{\text{περ}}}{r^2}$$

όπου $M_{\text{περ}}$ είναι η μάζα που περιέχεται στη σφαίρα ακτίνας r .

1. Από παρατηρήσεις ενός σφαιρικού νεφελώματος ακτίνας R συνάγουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στις παρυφές (στα εξώτερα στρώματα του νέφους) είναι σταθερή και ανεξάρτητη της ακτίνας r από το κέντρο του νεφελώματος. Τι μορφή θα πρέπει να έχει η συνάρτηση $\rho(r)$ ώστε να συμβαίνει αυτό;
Ποια ιδιότητα της συνάρτησης αυτής την καθιστά αφύσικη;
2. Δεδομένου ότι η πυκνότητα δεν μπορεί να ξεπερνά μια μέγιστη τιμή ρ_0 , υποθέστε ότι αντικαθιστάτε την αφύσικη τιμή της ρ του προηγούμενου ερωτήματος, στην περιοχή των ακτίνων που αυτή είναι αφύσικη, με τη σταθερή πυκνότητα ρ_0 . Να υπολογίσετε την επίπτωση στο g αυτής της αλλαγής. Είναι σταθερή πλέον η τιμή του $g(r)$; Σχεδιάστε το γράφημα της $g(r)$ στην περιοχή που η πυκνότητα είναι μη μηδενική και διαφορετική από την ρ_0 .
3. Αν η τιμή του g στην επιφάνεια του νεφελώματος, $r = R$, είναι g_s υπολογίστε τη μεταβολή του g σε πρώτη τάξη ως προς τη μεταβολή του r γύρω από την τιμή $r = R$.
4. Δεδομένου ότι η υποτιθέμενη περιοχή σταθερής πυκνότητας ρ_0 είναι μια πολύ μικρή περιοχή πολύ κοντά στο κέντρο του νεφελώματος, πόσο λάθος κάνει η γραμμική προσέγγιση του προηγούμενου ερωτήματος στον υπολογισμό του g στην μικρή ακτίνα που η πυκνότητα φτάνει στην τιμή ρ_0 ;

[Υπόδ: Ο υπολογισμός της μάζας μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής ύλης μπορεί να γίνει με την ολοκλήρωση της μάζας σφαιρικών φλοιών $\int \rho dV_{\text{σφ.φλ.}} = \int \rho 4\pi r^2 dr$.]

Καλή σας επιτυχία