ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Μαθηματικών - Φυσικής

Εξέταση στη Ανάλυση Ι

29 Φεβρουαρίου 2012

Θέμα 1.

(α) Θεωρήστε τη σειρά:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

όπου x πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε την ιδιότητα $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την για να δείξετε ότι η $\exp(x)$ είναι πάντοτε θετική και δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του x.

(β) Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, δίνοντας από ένα παράδειγμα κάθε φορά, είτε η απάντησή σας είναι θετική είτε αρνητική, εκτός αν ζητείται κάτι άλλο:

i. Έστω δύο ακολουθίες a_ν, b_ν για τις οποίες ισχύει ότι $a_\nu > b_\nu$ και η a_ν είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η b_ν είναι γνησίως αύξουσα. Έχουν οπωσδήποτε αυτές οι δύο ακοουθίες ίδιο όριο;

ii. Αν η a_ν είναι μηδενική ακολουθία, η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (-1)^\nu a_\nu$$

πάντα συγκλίνει;

iii. Οι τιμές της συνάρτησης ημ$(x)/x$ για $|x| << 1, x \neq 0$ είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της συνάρτησης συν(x); (Δώστε ένα πειστικό επιχείρημα αντί για παράδειγμα).

iv. Μια μονότονη συνάρτηση έχει πάντα αντίστροφη συνάρτηση;

v. Έστω $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ μια ολοκληρώσιμη και ασυνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ με $x \in [a, b]$. Τι συμπεραίνετε για την $f(x)$; (Όχι παράδειγμα.)

vi. Ποιο είναι το όριο της σειράς

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2}{(2\nu-1)(2\nu+1)};$$

(Υπολογίστε το.)

Θέμα 2.

(α) Έστω $f : [1,2] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbf{Q} \\ -x^2 & , x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Εξετάστε (i) εάν η f είναι συνεχής και (ii) εάν είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

i.
$$\int \frac{\text{τοξεφ}[\text{τοξεφ}(2x)]}{1+4x^2}dx$$

ii.
$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$$

Θέμα 3.

(α) Έστω
$$a_\nu = \sqrt[\nu]{1+2^\nu+\ldots+\nu^\nu}\ \text{ημ}(1/\nu).$$

Να υπολογίστε το όριό της.

(β) Δίδεται η σειρά
$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} 2^{(-1)^\nu-\nu}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου τι συμπεραίνετε όσον αφορά στη σύγκλιση της σειράς αυτής; Κατόπιν εφαρμόστε το κριτήριο της ρίζας. Τι συμπεραίνετε τώρα;

Θέμα 4.

(α) Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_\nu = \frac{\sqrt[\nu]{\nu!}}{\nu}\ ,\ a_\nu = \frac{\sqrt[\nu]{\nu!}}{\sqrt[\nu+1]{(\nu+1)!}}\ ,\ \text{με } \nu \geq 2.$$

(β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Θέμα 5.

(α) Να ευρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του διαστήματος $(1, 4]$.

(β) Έστω η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, με $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i)
$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \gamma.$$

(ii) Για κάθε ακολουθία x_ν τέτοια ώστε $x_\nu \in (\alpha, \beta)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ με $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \alpha$, συνεπάγεται
$$\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = \gamma.$$